# 数学竞赛中的解析几何问题(一)

赵 小 云
(杭州师院数学系,浙江　310036)

**中图分类号**:O12 - 4　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:0488 - 7395(2000)08 - 0039 - 03

解析几何是高中数学的重要内容. 解析法的特点就是通过代数运算解决几何问题,因此,解析几何问题在高中数学联赛中的内容也是十分丰富的.

## 1　基本知识

设 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 是直角坐标平面上的两点,则

1) $|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{1 + k^2}|x_1 - x_2|$ (其中 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 为直线 $P_1P_2$ 的斜率);

2) 若点 $P(x, y)$ 分 $\overline{P_1P_2}$ 的比为 $\lambda$ ($\lambda \neq -1$),则 $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$;

3) 直线 $P_1P_2$ 的方程可写成 $y - y_1 = k(x_1 - x_2)$ (当斜率 $k$ 存在时),且一定能表示为 $Ax + By + C = 0$ ($A, B, C$ 不全为零)的形式;

4) 直线 $P_1P_2$ 的方程除了 3) 中的形式外,还可以有 $y = kx + b$(斜截式),$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (截距式)等形式;

5) 设 $P_0(x_0, y_0)$,则 $P_0$ 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$;

6) 设不重合的两条直线 $l_1, l_2$ 的斜率分别为 $k_1, k_2$,则 $l_1$ 到 $l_2$ 的角 $\theta$ 满足 $\mathrm{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$. 特别地,当 $k_1 = k_2$ 时,必有 $l_1 \parallel l_2$;当 $k_1k_2 = -1$ 时,必有 $l_1 \perp l_2$.

## 2　应用举例

**例 1**　(1994年全国高中数学联赛试题) 已知有向线段 $PQ$ 的起点 $P$ 和终点 $Q$ 的坐标分别为 $(-1, 1)$ 和 $(2, 2)$,若直线 $l: x + my + m = 0$ 与 $PQ$ 的延长线相交,求 $m$ 的取值范围.

思路 1:欲求 $m$ 的取值范围,即需知 $m$ 存在于直线方程的什么条件下. 由于直线方程 $x + my + m = 0$ 可变形为 $y = -\frac{1}{m}x - 1$ (显然有 $m \neq 0$),因此我们可以从比较直线斜率的大小关系来确定 $m$ 的取值范围.

事实上,由于有向线段 $PQ$ 所在的直线方程为 $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$,斜率 $k = \frac{1}{3}$. 又直线 $y = -\frac{1}{m}x - 1$ 必过点 $A(0, -1)$,于是由直线 $l$ 与 $PQ$ 的延长线相交的条件可知(如图 1):

$$k_{PQ} < k_l < k_{AQ}$$

即 $\frac{1}{3} < -\frac{1}{m} < \frac{2}{3}$.

$\therefore m$ 的取值范围是 $-3 < m < -\frac{2}{3}$.

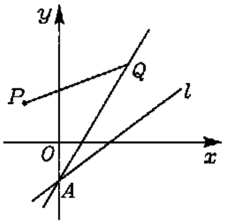


图 1　例 1 图

思路 2:由于直线 $l$ 与有向线段 $PQ$ 的延长线相交,于是我们可以通过研究直线 $l$ 与直线 $PQ$ 的交点坐标来确定 $m$ 的取值范围.

事实上,联立直线 $l$ 与 $PQ$ 的方程,不难得到直线 $l$ 与直线 $PQ$ 的交点坐标 $R(\frac{-7m}{m+3}, \frac{4-m}{m+3})$. 由 $R$ 是有向线段 $PQ$ 延长线上的点可知:$\begin{cases} \frac{-7m}{m+3} > 2, \\ \frac{4-m}{m+3} > 2, \end{cases}$

解之得　$-3 < m < -\frac{2}{3}$,这就是 $m$ 的取值范围.

注:显然,$m \neq -3$,否则就有直线 $l$ 与 $PQ$ 平行.

思路 3:考虑到 $R$ 是 $PQ$ 延长线上的点,即 $R$ 是 $\overline{PQ}$ 的外分点,令 $\frac{PR}{RQ} = \lambda$,则必有 $\lambda < -1$,由定比分点公式可得 $R(\frac{-1+2\lambda}{1+\lambda}, \frac{1+2\lambda}{1+\lambda})$. 于是由 $R$ 在直线 $l$ 上有 $\frac{-1+2\lambda}{1+\lambda} + m\frac{1+2\lambda}{1+\lambda} + m = 0$,解之 $\lambda = \frac{1-2m}{2+3m}$ ($m \neq -\frac{2}{3}$). 由 $\lambda < -1$ 便可确定 $m$ 的取值范围.

上述几种解题思路,都是根据问题所给的已知条件,运用所学的有关基础知识和基本方法展开思考和分析的. 思路 1 运用直线方程的位置关系,通过比较斜率的大小关系来确定的取值范围. 在这里图形的直观性起了重要的作用;思路 2 通过两条直线相交求得交点坐标,由点的位置来确定 $m$ 的范围,在这里图形的直观性同样起了重要作用;思路 3 通过直线 $l$ 与有向线段 $PQ$ 的延长线相交这一条件,联想到点 $R$ 是有向线段 $PQ$ 的一个外分点,利用 $\lambda$ 求得 $m$ 的取值范围.

**例 2**　(1994年全国高中数学联赛试题) 在平面直角坐标系中,方程 $\frac{|x+y|}{2a} + \frac{|x-y|}{2b} = 1$ ($a, b$ 为

**收稿日期**:2000 - 02 - 15

不相等的两个正数)所代表的曲线是　(　　)

(A) 三角形.　(B) 正方形.

(C) 非正方形的矩形.　(D) 非正方形的菱形.

**解**　方程 $\frac{|x+y|}{2a}+\frac{|x-y|}{2b}=1$ ($a,b$ 为不相等的两个正数)所代表的曲线由以下四条曲线(实际上是线段)组成:

$l_1$: $\frac{x+y}{2a}+\frac{x-y}{2b}=1$ ($x+y\geq0$, $x-y\geq0$),即 $(a+b)x-(a-b)y=2ab(x+y\geq0, x-y\geq0)$;

$l_2$: $\frac{x+y}{2a}-\frac{x-y}{2b}=1$ ($x+y\geq0$, $x-y\leq0$),即 $-(a-b)x+(a+b)y=2ab(x+y\geq0, x-y\leq0)$;

$l_3$: $-\frac{x+y}{2a}-\frac{x-y}{2b}=1$ ($x+y\leq0$, $x-y\leq0$),即 $-(a+b)x+(a-b)y=2ab(x+y\leq0, x-y\leq0)$;

$l_4$: $-\frac{x+y}{2a}+\frac{x-y}{2b}=1$ ($x+y\leq0$, $x-y\geq0$),即 $(a-b)x-(a+b)y=2ab(x+y\leq0, x-y\leq0)$.

由题中所给的选项知,所给方程所代表的曲线是一个封闭图形,因此上述四线段必围成一个四边形,于是只要求出此四边形的顶点,便可判定它所代表的曲线是什么图形.

显然, $l_1 /\!/ l_3$, $l_2 /\!/ l_4$. 于是联立 $l_1$, $l_2$ 得 $l_1$ 与 $l_2$ 的交点 $A(a,a)$,同样可求得 $l_1$ 与 $l_4$ 的交点 $B(b,-b)$, $l_3$ 与 $l_4$ 的交点 $C(-a,-a)$ 及 $l_3$ 与 $l_2$ 的交点 $D(-b,b)$. 容易看出 $AC$, $BD$ 相交于原点 $O$,并且 $AO=CO$, $BO=DO$, $AC\perp BD$. 由于 $a\neq b$,故 $AC\neq BD$,由此可知这四条线段围成的图形是非正方形的菱形.

**例 3**　(1999年全国高中数学联赛试题) 已知直线 $ax+by+c=0$ 中的 $a,b,c$ 取自集合 $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ 中的 3 个不同的元素,并且该直线的倾斜角为锐角,试问这样的直线共有多少条?

分析:由题设可知直线的斜率 $k>0$,即有 $-\frac{a}{b}>0$. 注意到集合中元素的对称性,不妨设 $a>0$,于是 $b<0$. 下面我们只须分 $c=0$ 和 $c\neq0$ 两种情形进行讨论.

1) $c=0$,此时 $a$ 可取 1, 2, 3, $b$ 可取 $-1$, $-2$, $-3$,但由于 $3x-3y=0$, $2x-2y=0$ 及 $x-y=0$ 为同一直线,故这样的直线有 $3\times3-2=7$ 条;

2) $c\neq0$,此时 $a$ 可取 1, 2, 3, $b$ 可取 $-1$, $-2$, $-3$, $c$ 可取 $a$, $b$ 取定后剩下的四个数中的任意一个,故这样的直线有 $3\times3\times4=36$ 条.

由 1), 2) 不难得到满足题设要求的直线有 43 条.

**例 4**　(1999年全国高中数学联赛试题) 平面直角坐标系中,纵、横坐标都是整数的点叫做整点,那么满足不等式 $(|x|-1)^2+(|y|-1)^2<2$ 的整点 $(x,y)$ 的个数是　(　　)

(A) 16.　(B) 17.　(C) 18.　(D) 25.

**解**　由 $(|x|-1)^2+(|y|-1)^2<2$ 可得 $(|x|-1, |y|-1)$ 为 $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$ 及 $(-1,0)$,于是不难得到 $(x,y)$ 共有 16 个,选(A).

**例 5**　已知 $\triangle ABC$ 的三顶点分别是 $A(1,2)$, $B(2,3)$, $C(3,1)$,又设 $l$ 是过原点的直线,试求三角形 $ABC$ 的三顶点到直线 $l$ 的距离的平方和的最大值.

**解**　不妨记 $A$, $B$, $C$ 到直线 $l$ 的距离的平方和为 $d$,于是

1) 若 $l$ 与 $x$ 轴垂直,则 $l$ 的方程为 $x=0$,此时 $d=14$;

2) 若 $l$ 与 $x$ 轴不垂直,设 $l$ 的斜率为 $k$,则 $l$ 的方程为 $kx-y=0$,于是 $d=\frac{14k^2-22k+14}{1+k^2}$,即有 $(d-14)k^2+22k+(d-14)=0$. 由于 $k\in R$,故 $\Delta=22^2-4(d-14)^2\geq0$, $\therefore 3\leq d\leq25$, $d_{\max}=25$ (此时 $k=-1$). 由 1), 2) 知 $d_{\max}=25$.

**例 6**　(根据1999年全国高中数学联赛试题改编) 已知点 $A(1,2)$,过点 $(5,-2)$ 的直线与抛物线 $y^2=4x$ 交于另外两点 $B$, $C$,证明: $\triangle ABC$ 必是直角三角形.

分析:由几何直观,我们只须证明 $\angle BAC=90°$. 于是只须证明: $k_{AB}\cdot k_{AC}=-1$. 考虑到 $B$, $C$ 是抛物线 $y^2=4x$ 上的点,且异于 $A$,故不妨设 $B(t^2,2t)$, $C(s^2,2s)$,其中 $s\neq t$, $s\neq1$, $t\neq1$,由于 $B$, $C$, $(5,-2)$ 在同一直线上,故有 $\frac{2t+2}{t^2-5}=\frac{2s+2}{s^2-5}$,即有 $(1+t)(1+s)=-4$,因此 $k_{AB}\cdot k_{AC}=\frac{2-2t}{1-t^2}\cdot\frac{2-2s}{1-s^2}=\frac{4}{(1+t)(1+s)}=-1$. $\therefore \angle BAC=90°$, $\triangle ABC$ 为直角三角形.

有不少的解析几何问题,首先要考虑的就是如何减少运算量,这取决于对坐标、方程等的选择. 例 6 中我们对 $B$, $C$ 的坐标是用了参数坐标形式,这给解题带来了很大的方便,由此也使我们体会到正确设立点的坐标以及处理好各点间的关系的重要性.

## 习　题

1　直线 $(3a+2)x-(a-1)y-1=0$ 不通过第二象限,则 $a$ 的取值范围是　(　　)

(A) $a>1$.　(B) $a<0$ 或 $a\geq1$.

(C) $a\geq1$.　(D) $-1<a<2$.

2　(1999年第十届希望杯全国数学邀请赛试题) 过点 $P(1,1)$ 且与两条坐标轴围成面积为 2 的三角形的直线的条数是____.

3　(1995年全国高中数学联赛试题) 直角坐标平面上,满足不等式组 $\begin{cases} y\leq3x \\ y\geq\frac{1}{3}x \\ x+y\leq100 \end{cases}$ 的整点的个数是____.

4　(1994年全国高中数学联赛试题) 已知点集 $A=\{(x,y) \mid (x-3)^2+(y-4)^2\leq(\frac{5}{2})^2\}$, $B=\{(x,$

# 从距离的角度来看代数式

**沈伟忠**

(广东省中山市中山纪念中学,广东　528454)

**中图分类号**:O12-4　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:0488-7395(2000)08-0041-01

用代数的眼光来看代数式,解决问题可能很复杂,如果换一个角度,用几何的眼光看代数式,或许会简单.比如一类函数的最值问题,转化为距离问题求解就是如此.

**例1**　(第三届希望杯高二第一试试题) 设 $x\in R$,函数 $f(x)=\sqrt{x^2+3x+3}+\sqrt{x^2-3x+3}$ 的最小值为____.

**解**　将函数式作如下变形

$$f(x)=\sqrt{(x+\frac{3}{2})^2+(0+\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2+(0-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}.$$

设 $P(x,0)$, $A(-\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$, $B(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$,则问题转化为求 $|PA|+|PB|$ 的最小值.由平面几何性质有 $|PA|+|PB|=|AB|=2\sqrt{3}$.

**例2**　(1990年全国高中联赛试题) 求 $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2-6x+13}-\sqrt{x^4-x^2+1}$ 的最大值为____.

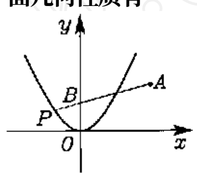

图1　例2图

**解**　原函数变形为

$$f(x)=\sqrt{(x^4-4x^2+4)+(x^2-6x+9)}-\sqrt{(x^4-2x^2+1)+x^2}$$
$$=\sqrt{(x^2-2)^2+(x-3)^2}-\sqrt{(x^2-1)^2+x^2}$$

联想抛物线 $y=x^2$,问题就是求抛物线 $y=x^2$ 上一动点 $P(x,x^2)$ 与两定点 $A(3,2)$ 和 $B(0,1)$ 之间距离之差的最大值.

由几何性质知 $||PA|-|PB||\leq|AB|=\sqrt{10}$,故 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{10}$.

**例3**　(第二届希望杯高二试题) 以实数 $x,y$ 为自变量的二元函数 $u(x,y)=x^2+\frac{81}{x^2}-2xy+\frac{18}{x}\cdot\sqrt{2-y^2}$ 的最小值为____.

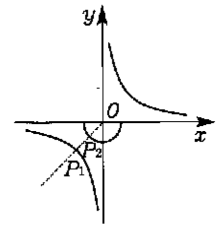

图2　例3图

**解**　原函数可变形为

$$u(x,y)=x^2-2xy+y^2+[(\frac{9}{x})^2+2\cdot\frac{9}{x}\cdot\sqrt{2-y^2}+(2-y^2)]-2=(x-y)^2+(\frac{9}{x}+\sqrt{2-y^2})^2-2.$$

考虑平面上点 $P_1(x,\frac{9}{x})$, $P_2(y,-\sqrt{2-y^2})$,当 $x\in R$, $x\neq0$ 时,$P_1$ 的轨迹是以两条坐标轴为渐近线的双曲线;当 $y\in R$, $|y|\leq\sqrt{2}$ 时,$P_2$ 的轴迹是以原点为圆心,以 $\sqrt{2}$ 为半径的圆的下半部,从几何上易见 $|P_1P_2|$ 的最小值为 $3\sqrt{2}-\sqrt{2}$,由此可知函数的最小值为 $(3\sqrt{2}-\sqrt{2})^2-2=6$.

---

$y)|(x-4)^2+(y-5)^2>(\frac{5}{2})^2\}$,则点集 $A\cap B$ 中整点的个数____.

5　设正方形 $ABCD$ 的边 $AB$ 在直线 $y=2x-17$ 上,另两个顶点 $C,D$ 在抛物线 $y=x^2$ 上,试求此正方形的面积.

6　有一长为4的线段,如果它的一端在直线 $y=x$ 上,另一端在直线 $y=2x$ 上,试求线段中点的轨迹方程.

7　$\triangle ABC$ 的顶点 $C(x_0,y_0)$ 的坐标满足 $x^2+y^2\leq8+2y$, $y\geq3$.边 $AB$ 在 $x$ 轴上,已知点 $Q(0,1)$ 与直线 $AC,BC$ 的距离均为1,求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

**习题答案与提示**

1　(C).　2　3.　3　2551.　4　7.

5　80或1280.

6　设两端 $A(a,a)$, $B(b,2b)$,中点 $P(x,y)$,则由中点公式得 $a=2(2x-y)$, $b=2(y-x)$,于是由 $|AB|=4\Rightarrow25x^2-36xy+13y^2=4$.

7　设 $A(a,0)$,则 $AC$ 的方程为 $-y_0(x-a)+y(x_0-a)=0$,由 $Q$ 到 $AC$ 的距离为1,可得 $(y_0^2-2y_0)a^2+2x_0y_0a-y_0^2=0$,此方程的两根 $a_1,a_2$ 即为 $A,B$ 之横坐标.于是 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot y_0\cdot|AB|=\frac{y_0}{2}\cdot\frac{2\sqrt{x_0^2+y_0^2-2y_0}}{y_0-2}\leq\sqrt{8}\frac{y_0}{y_0-2}=\sqrt{8}(1+\frac{2}{y_0-2})\leq\sqrt{8}(1+\frac{2}{3-2})=6\sqrt{2}$ (因为 $y_0\geq3$,当 $C$ 为 $(\pm\sqrt{5},3)$ 时取等号).

---

**收稿日期**:1999-11-15

**作者简介**:沈伟忠(1963—),男,河南信阳人,广东省中山市中山纪念中学一级教师,学士.