竞赛之窗

2013 年北京市中学生数学竞赛(初二)

中图分类号:G424.79 文献标识码:A 文章编号:1005-6416(2014)01-0023-03

一、选择题(每小题 5 分,共 25 分)

1. $2\,013+2\,012-2\,011-2\,010+2\,009+2\,008-2\,007-2\,006+\cdots+5+4-3-2+1=(\quad)$.

(A)2 013 (B)2 012 (C)1 (D)0

2. 化简$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}-\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=(\quad)$.

(A)$2\sqrt{5}$ (B)2 (C)1 (D)$\sqrt{5}$

3. 有四名候选人 A、B、C、D 参加学生会选举,已知候选人 D 得票比 B 得票多,候选人 A、B 得票之和超过 C、D 得票之和,候选人 A、C 得票之和与 B、D 得票之和相等. 则四人得票数由高到低的排列次序是( ).

(A)A、D、C、B (B)D、B、A、C

(C)D、A、B、C (D)A、D、B、C

4. 若某月里仅有星期一的天数比星期二的天数多,则发生此情形的年份为( ).

(A)2 010 (B)2 012

(C)2 014 (D)2 016

5. 如图 1,矩形 $ABCD$ 的对角线 BD 经过坐标原点 O,矩形的边分别平行于坐标轴,反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 的图像分别与 BC、CD 交于点 M、N. 若点 $A(-2,-2)$,且$\triangle OMN$ 的面积为$\frac{3}{2}$,则 $k=(\quad)$.

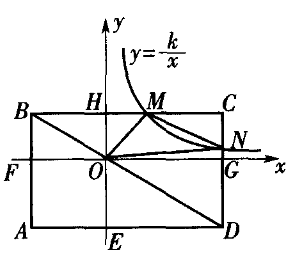

图 1

(A)2.5 (B)2 (C)1.5 (D)1

二、填空题(每小题 7 分,共 35 分)

1. 计算:

$$\frac{2\,013^2+2\,011}{2\,011^2-2\,013}\times\frac{4\,020^2-8\,040}{2\,011\times2\,014-4}=\underline{\qquad}.$$

2. 一串数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$按如下规则构成:$a_1=7,a_k=a_{k-1}^2$的数字和$+1(k=2,3,\cdots)$.

如 $a_2=14,a_3=17$,依此类推.

则 $a_{2\,013}=\underline{\qquad}$.

3. 在$\triangle ABC$ 中,已知$\angle A=2\angle B$,CD 为$\angle C$ 的角平分线,$AC=16$,$AD=8$. 则 $BC=\underline{\qquad}$.

4. 已知素数 p、q,使得 $p^3-q^5=(p+q)^2$. 则 $\frac{8(p^{2\,013}-p^{2\,010}q^5)}{p^{2\,011}-p^{2\,009}q^2}=\underline{\qquad}$.

5. 如图 2,在 Rt$\triangle ABC$ 两直角边 AC、BC 上分别作正方形 $ACDE$、正方形 $CBFG$,联结 DG. 线段 AB、BF、FG、GD、DE、EA 的中点依次为 P、L、K、I、H、Q. 若 $AC=14$,$BC=28$,则六边形 $HIKLPQ$ 的面积$=\underline{\qquad}$.

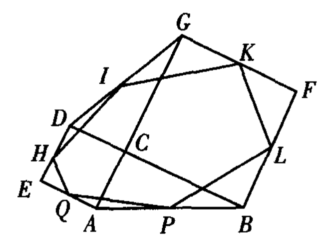

图 2

三、(10 分)(1)已知 a、b 为正整数. 证明:$(a+b)\mid(a^3+b^3)$;

(2)设 $N=1^3+2^3+\cdots+2\,012^3$. 证明:$(2\,012\times2\,013)\mid N$.

四、(15 分) 如图 3,在等腰$\triangle ABC$ 中,已知顶角$\angle A=30°$,在边 AB、AC 上分别取点 Q、P,使得$\angle QPC=45°$,且 $PQ=BC$. 证明:$BC=CQ$.

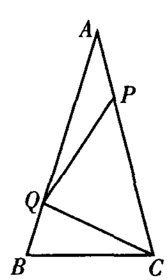

图 3

五、(15 分)市科普日,每名中学生可报名一项学科竞赛. 记者与 33 名报名参赛的选手座谈,对其中每名选手问同样的两个问题:在座有几人与你的校籍相同?有几人与你参赛学科相同?结果发现,在所得到的回答中包含了由 0~10 的所有整数. 证明:这 33 名选手中有至少两人的校籍与参赛学科均相同.

参考答案

一、**1.** A.

易见,算式中符号呈现周期性规律.

从第一个数 2 013 开始每四个数分成一组,共分成503组,每一组的计算结果均为4,剩下数1,即原式 $=4\times503+1=2\ 013$.

【注】本题也可以从第二个数开始每四个数分成一组,每一组的结果为0,共503个0,即原式 $=2\ 013$.

2. C.

设 $a=\sqrt{\frac{3+\sqrt5}{2}}-\sqrt{\frac{3-\sqrt5}{2}}$. 易知,$a>0$.

故 $a^2=\frac{3+\sqrt5}{2}+\frac{3-\sqrt5}{2}-2\sqrt{\frac{3+\sqrt5}{2}}\times\sqrt{\frac{3-\sqrt5}{2}}$

$=3-2\sqrt{\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt5}{2}\right)}$

$=3-2\sqrt{\frac{9-5}{4}}=3-2=1$.

因为 $a>0$,所以,$a=1$.

3. D.

如图4,用圆形图表示.

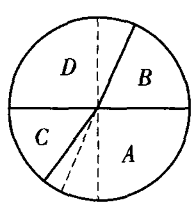

图4

因为候选人 A、C 得票之和与 B、D 得票之和相等,所以,作一直径分圆为两半,上部为 B、D,下部为 A、C.

已知候选人 D 得票比 B 得票多,画得扇形 D 的面积大于扇形 B 的面积;由侯选人 A、B 得票之和超过 C、D 得票之和,画扇形 A 与 B 的面积之和大于半圆的面积.

从而,得票数由高到低的排列次序应选 D.

4. D.

由题意,知该月星期三、星期四、星期五、星期六、星期日的天数均不比星期二的天数多. 一个月可以有30天,31天,28天和29天.

下面分四种情形讨论.

(1)一个月有30天. 若此月的29日是星期一,则30日是星期二,此时,该月星期一天数与星期二的天数相同;若此月的30日是星期一,则29日是星期日,此时,该月星期日、星期一的天数均比星期二的天数多,与题意矛盾.

(2)一个月有31天. 同上导出矛盾.

(3)一个月有28天. 则星期一与星期二的天数相等. 与题意矛盾.

(4)一个月有29天. 若此月的1日是星期一,则29日也是星期一,共有5个星期一、4个星期二. 从而,符合题意的情形只能在仅有29天的月份里发生.

故符合题意的年份只能在闰年的2月份发生.

由于闰年年份数被4整除,而2010、2014是平年,故排除选项 A、C.

注意到,2月里"仅有星期一的天数比星期二的天数多",此时,2月1日是星期一,该年的1月1日就是星期五. 而容易计算2012年1月1日是星期日,矛盾,故排除选项 B.

事实上,由于2013年5月12日是星期日,可推算出2016年1月1日是星期五.

5. B.

由矩形的对角线平分矩形的面积知

$S_{矩形CHOG}=S_{矩形OFAE}=|-2|\times|-2|=4$.

设 $OH=a$,$OG=b$. 则

$ab=4$,$HM=\frac{k}{a}$,$GN=\frac{k}{b}$.

于是,点 $M\left(\frac{k}{a},a\right)$,$N\left(b,\frac{k}{b}\right)$.

而 $S_{矩形CHOG}-S_{\triangle OGN}-S_{\triangle OHM}-S_{\triangle MCN}$

$=S_{\triangle OMN}=\frac{3}{2}$,

即 $4-\frac12b\cdot\frac{k}{b}-\frac12a\cdot\frac{k}{a}-\frac12\left(b-\frac{k}{a}\right)\left(a-\frac{k}{b}\right)=\frac32$.

又 $k>0$,解得 $k=2$.

二、**1.** 4.

设 $a=2\ 011$. 则

原式 $=\frac{(a+2)^2+a}{a^2-a-2}\cdot\frac{(2a-2)^2-4(a-1)}{a(a+3)-4}$

$=\frac{(a+1)(a+4)}{(a-2)(a+1)}\cdot\frac{4(a-1)(a-2)}{(a+4)(a-1)}=4$.

2. 8.

由题意知

$a_1=7,a_2=14,a_3=17,a_4=0$,

$a_5=5,a_6=8,a_7=11,a_8=5$.

于是，$a_8=a_5$，即从 a_5 开始，这串数以 3 为周期循环.

所以，$a_{2013}=a_{6+3\times669}=8$.

3. 24.

由 $\angle A=2\angle B$，知 $BC>AC$.

如图 5，在边 BC 上取点 E，使得 $EC=AC$，联结 DE.

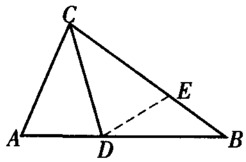

图 5

则 $\triangle CED\cong\triangle CAD$

$\Rightarrow ED=AD$，

$\angle CED=\angle CAD$.

故 $\angle BDE=\angle CED-\angle DBE$

$=\angle A-\angle B=\angle B=\angle DBE$.

从而，$BE=DE$.

因此，$BC=BE+CE=AD+AC=8+16=24$.

4. 140.

如果 p 与 q 被 3 除的余数相同，因为 p 与 q 均为素数：

若被 3 除余 0，只能 $p=q=3$，此时，

$p^3-q^5<(p+q)^2$；

若 p 与 q 被 3 除同余 1 或同余 2，则 p^3-q^5 被 3 除余 0，而 $(p+q)^2$ 被 3 除余 2 或余 1，不满足

$p^3-q^5=(p+q)^2$.

如果 p 与 q 均不被 3 整除，且 p 与 q 一个被 3 除余 1，另一个被 3 除余 2，则 p^3-q^5 不被 3 整除. 而 $(p+q)^2$ 被 3 整除，故 $p^3-q^5=(p+q)^2$ 不成立. 从而，p 与 q 中有且只有一个被 3 整除.

若 $p=3$，由

$3^3-q^5=(3+q)^2>0\Rightarrow 3^3>q^5\Rightarrow q^5<27$，

这样的素数 q 不存在.

因此，只能 $q=3$，且 $p^3-243=(p+3)^2$，即

$p(p^2-p-6)=252=2^2\times3^2\times7$.

所以，p 是 2、3、7 中的数.

经检验，只有 $p=7$ 满足等式.

因此，$p=7$，$q=3$.

$$故\frac{8(p^{2013}-p^{2010}q^5)}{p^{2011}-p^{2009}q^2}=\frac{8p^{2010}(p^3-q^5)}{p^{2009}(p^2-q^2)}$$

$$=\frac{8p(p+q)^2}{(p-q)(p+q)}=\frac{8p(p+q)}{p-q}$$

$$=\frac{8\times7(7+3)}{4}=140.$$

5. 1 004.5.

如图 6，联结 DF、FA、AD、EG、GB、BE.

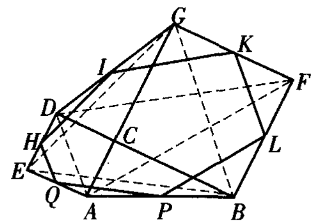

图 6

则 $S_{六边形ABFGDE}=1\,372$，

$S_{\triangle BLP}=S_{\triangle FKL}=S_{\triangle GKI}=\frac{1}{8}\times28^2=98$，

$S_{\triangle DIH}=S_{\triangle EHQ}=S_{\triangle AQP}=\frac{1}{8}\times14^2=24.5$.

故 $S_{六边形HIKLPQ}$

$=S_{六边形ABFGDE}-S_{\triangle BLP}-S_{\triangle FKL}-S_{\triangle GKI}-S_{\triangle DIH}-S_{\triangle EHQ}-S_{\triangle AQP}$

$=1\,372-3\times98-3\times24.5=1\,004.5$.

三、(1) 由 $a^3+b^3=a^3+a^2b-a^2b-ab^2+ab^2+b^3$

$=(a^3+a^2b)-(a^2b+ab^2)+(ab^2+b^3)$

$=a^2(a+b)-ab(a+b)+b^2(a+b)$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$\Rightarrow(a+b)\mid(a^3+b^3)$.

(2) 先将 N 按 $[i^3,(2\,013-i)^3]$ 分组.

$N=(1^3+2\,012^3)+(2^3+2\,011^3)+\cdots+(1\,005^3+1\,008^3)+(1\,006^3+1\,007^3)$

每一组均能被 2 013 整除，故 $2\,013\mid N$.

再将 N 按 $[i^3,(2\,012-i)^3]$ 分组.

$N=(1^3+2\,011^3)+(2^3+2\,010^3)+\cdots+(1\,005^3+1\,007^3)+1\,006^3+2\,012^3$

$=(1^3+2\,011^3)+(2^3+2\,010^3)+\cdots+(1\,005^3+1\,007^3)+2\,012\times(2\times503^2)+2\,012^3$

每一组均能被 2 012 整除，故 $2\,012\mid N$.

因为 $(2\,012,2\,013)=1$，所以，

$(2\,012\times2\,013)\mid N$.

四、如图 7，平移线段 QP 到 BO，联结 PO. 则四边形 $QPOB$ 为平行四边形.

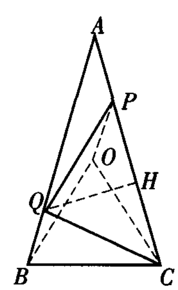

图 7

于是，$BO=PQ=BC$.

由 $\angle QBO=\angle AQP$

$=45°-30°=15°$，

知 $\angle OBC=\frac{180°-30°}{2}-15°$

$=60°$，

即 $\triangle OBC$ 为等边三角形.

因此，$PQ=BC=CO$.

又四边形 $QPOB$ 为平行四边形，则

2013年全国高中数学联赛湖北赛区预赛

中图分类号：G424.79 文献标识码：A 文章编号：1005-6416(2014)01-0026-04

一、填空题(每小题9分,共90分)

1. 设集合

$A=\{1,3,5,7,9\}, B=\{2,4,6,18\}$.

若 $C=\{a+b \mid a\in A, b\in B\}$,则集合 C 的所有元素之和为______.

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=0, a_1=1$,且

$a_{2n}=a_n, a_{2n+1}=a_n+1\ (n\in \mathbf{Z}_+)$.

则 $a_{2013}=$______.

3. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}2^x, & x\leqslant 0;\\ |\log_2 x|, & x>0.\end{cases}$$

则方程 $f(x)=\frac{1}{2}$ 的解集为______.

4. 函数

$$y=\frac{1}{|\sin x|}+\frac{1}{|\cos x|}+\frac{1}{|\tan x|}+\frac{1}{|\cot x|}$$

的最小值为______.

5. 设 $0<x<y<\frac{\pi}{2}$. 则

$P=\cos 2x-\cos 2y-4\cos x+4\cos y$

的取值范围是______.

6. 设 F 为椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点,过椭圆 C 外一点 P 作椭圆 C 的切线,切点为 M. 若 $\angle PFM=90°$,则点 P 的轨迹方程为______.

7. 从集合 $A=\{1,2,\cdots,30\}$ 中取出五个不同的数,使这五个数构成等差数列. 则得到不同的等差数列的个数为______.

8. 已知四面体 $P-ABC$ 的体积为1,G、K 分别是 $\triangle ABC$、$\triangle PBC$ 的重心,过 G 作直线分别与 AB、AC 交于点 M、N. 则四棱锥 $K-MNCB$ 体积的最大值为______.

9. 已知互不相等的三个实数 a、b、c 成等比数列,且 $\log_c a$、$\log_b c$、$\log_a b$ 构成公差为 d 的等差数列. 则 $d=$______.

10. 已知 a、b、c、$d\in[-1,+\infty)$,且

$a+b+c+d=0$.

则 $ab+bc+cd$ 的最大值为______.

二、解答题(每小题20分,共60分)

11. 求函数 $y=x^2+x\sqrt{x^2-1}$ 的值域.

12. 已知数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}\ (n\in\mathbf{Z}_+)$ 满足

$a_1=1, b_1=3$,

$$a_{n+1}=2+\frac{27a_n}{9a_n^2+4b_n^2}, b_{n+1}=\frac{27b_n}{9a_n^2+4b_n^2}.$$

(1)证明:对一切的 $n\in\mathbf{Z}_+$,有

$$\frac{(a_n-1)^2}{4}+\frac{b_n^2}{9}=1.$$

$\angle OPC=\angle A, \angle PCO=\angle QBO=\angle AQP$

$\Rightarrow \triangle AQP \cong \triangle PCO \Rightarrow AQ=CP$.

作 $QH\perp CP$ 于点 H,则 $QH=HP$.

因为 $\angle A=30°$,$QH\perp CP$,所以,

$CP=AQ=2QH=2HP$,

即 H 为边 PC 的中点.

于是,QH 为线段 PC 的垂直平分线.

因此,$CQ=PQ=BC$.

五、将这33名选手分别按校籍与参赛学科分组(有的组仅由一名选手组成,例如,来自某校的只有1人). 每个人均属于两个组,一个是按校籍分的组,一个是按学科分的组. 由题意,知这33名选手按上述两种分法一共分有11个组.

事实上,依题意知存在分别由 $1,2,\cdots,11$ 名选手所组成的组,所以,总的组数不少于11.

另一方面,由于

$1+2+\cdots+11=66=2\times 33$,

而且已经把每名选手均算了两遍,于是,组数不可能多于11. 因此,这33名选手按上述两种分组法恰分成11个组.

接下来考虑由11名选手所组成的组 A(不妨设该组选手的校籍相同),因为所剩的组数,特别是按学科所分的组数不超过10个,所以,组 A 中至少有两名选手属于同一个按学科所分的组. 于是,这两名选手的校籍和参赛学科均相同.

(李延林 提供)