2007 年北京市中学生数学竞赛(初二)

一、选择题(每小题 5 分,共 25 分)

1. 若 a、b、c 是 3 个不同的正整数,并且 $abc = 16$,则 $a^b - b^c + c^a$ 可能的最大值是(　　).

(A) 249　(B) 253　(C) 263　(D) 264

2. 已知三个连续的正整数的倒数和等于 $\frac{191}{504}$. 则这三个数之和等于(　　).

(A) 27　(B) 24　(C) 21　(D) 18

3. 分母是 2 007 的正的最简真分数有(　　)个.

(A) 675　(B) 1 326　(C) 1 329　(D) 1 332

4. 对于实数 x,符号 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数,例如,$[3.14] = 3$,$[-7.59] = -8$. 则关于 x 的方程 $\left[\frac{3x+7}{7}\right] = 4$ 的整数根有(　　)个.

(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 1

5. 如图 1,已知长方形的长为 8,宽为 4,将长方形沿一条对角线折起压平. 则重叠部分(阴影三角形)的面积是(　　).

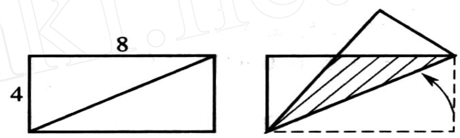

图 1

---

7. $\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\sqrt{2}-1$, $1-2\sqrt{2}$.

令 $x = \sqrt{2}y$,代入原方程得

$6\sqrt{2}y^3 + 4\sqrt{2}y^2 - 17\sqrt{2}y + 18y - 6 + 5\sqrt{2} = 0$.

易知 $y = \frac{1}{3}$ 满足条件. 故 $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$. 于是,

$3x^3 + 2\sqrt{2}x^2 - (17 - 9\sqrt{2})x - (6 - 5\sqrt{2})$

$= \left(x - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)(3x^2 + 3\sqrt{2}x + 9\sqrt{2} - 15)$.

$= 3\left(x - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)(x - \sqrt{2} + 1)(x + 2\sqrt{2} - 1)$.

所以,$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $x_2 = \sqrt{2} - 1$, $x_3 = 1 - 2\sqrt{2}$.

8. $\frac{k-8}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{k(k-16)}$.

设矩形的长、宽分别为 a、b $(a \geq b)$.

则 $\frac{4(a+b)^2}{ab} = k$,即

$4a^2 + (8-k)ab + 4b^2 = 0$.

令 $t = \frac{a}{b}$,则 $4t^2 + (8-k)t + 4 = 0$.

解得 $t = \frac{1}{8}\left[(k-8) + \sqrt{k(k-16)}\right]$.

9. $6\sqrt{223}$.

设正方形边长 $a = \sqrt{2\ 007}$, $\angle D'BC = \alpha$. 则 $\angle BD'E = 2\alpha$, $CD' = a\tan\alpha$,

$BD' = a(1 - \tan\alpha)$.

所以,$\triangle BD'E$ 的周长为

$a(1 - \tan\alpha)(1 + \tan 2\alpha + \sec 2\alpha)$

$= a \cdot \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha + 1}{\cos 2\alpha}$

$= a \cdot \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{2\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$

$= 2a = 6\sqrt{223}$.

10. 20 或 119.

设 $x^2 + (x+1)^2 = v^2$,则 $(2x+1)^2 = 2v^2 - 1$.

令 $u = 2x + 1$,则 $u^2 - 2v^2 = -1$. 其为佩尔方程,其基本解为 $(u_0, v_0) = (1, 1)$.

其全部正整数解可由

$$u_n + v_n\sqrt{2} = (u_0 + v_0\sqrt{2})^{2n+1}$$

得到. 其中,$(u_1, v_1) = (7, 5)$, $(u_2, v_2) = (41, 29)$, $(u_3, v_3) = (239, 169)$, $u_4 > 400$.

故 $x = 20$ 或 119.

(夏兴国　提供)

(A) 10　　(B) 12　　(C) 14　　(D) 16

二、填空题(每小题 7 分,共 35 分)

1. 将正整数从 1 开始依次按如图 2 所示的规律排成一个数阵,其中,2 在第 1 个拐角处,3 在第 2 个拐角处,5 在第 3 个拐角处,7 在第 4 个拐角处,……那么,在第 2 007 个拐角处的数是______.

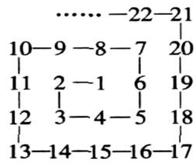

图 2

2. 在一个 3×3 的方格表中填有 1,2,3,4,5,6,7,8,9 九个数,每格只填一个数. 现将每行中放有最大数的格子染成红色,放有最小数的格子染成绿色. 设 M 是红格中的最小数,m 是绿格中的最大数. 则 $M-m$ 可以取到______个不同的值.

3. 如图 3,已知在等腰 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,P、Q 分别是边 AC、AB 上的点,且 $AP=PQ=QB=BC$. 则 $\angle PCQ=$______.

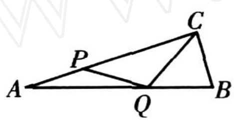

图 3

4. 化简

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\left(1+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{c}\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{d}\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)-\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\left(1+\frac{1}{d}\right)$$

的值为______.

5. 如图 4,在长方形 $ABCD$ 中,E、F、G 分别是边 AB、BC、CD 的中点. 已知长方形 $ABCD$ 的面积是 40 cm^2. 则四边形 $MFNP$ 的面积是______cm^2.

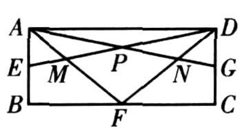

图 4

三、(15 分) 已知 a、b、c 是实数. 若

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}、\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}、\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

之和恰等于 1,求证:这三个分数的值有两个为1,一个为 -1.

四、(10 分) 如图 5,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle ABC=46°$,D 是边 BC 上的一点,$DC=AB$,$\angle DAB=21°$. 试确定 $\angle CAD$ 的度数.

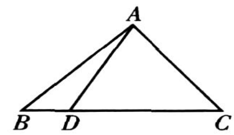

图 5

五、(15 分) 若对于任意 n 个连续正整数中,总存在一个数的数字之和是 8 的倍数. 试确定 n 的最小值. 并说明理由.

参 考 答 案

一、**1.** C.

由题设易知 $\{a,b,c\}=\{1,2,8\}$.

且当 $b=1$,$c=2$,$a=8$ 时,$a^b-b^c+c^a$ 取最大值 $8-1+2^8=263$.

2. B.

设此三个连续正整数为 $n-1$,n,$n+1$. 则

$$\frac{191}{504}=\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=\frac{3n^2-1}{n(n^2-1)},$$

即 $191n^3-1\,512n^2-191n+504=0$.

因式分解得 $(n-8)(191n^2+16n-63)=0$.

当 $n\geqslant1$ 时,$191n^2+16n-63>0$. 故 $n=8$.

3. D.

因 $2\,007=3^2\times223$,所以,比 2 007 小的且与 2 007 互质的正整数有

$$2\,007-\left[\frac{2\,007}{3}\right]-\left[\frac{2\,007}{223}\right]+\left[\frac{2\,007}{3\times223}\right]$$

$=1\,332$(个).

4. B.

由 $\left[\frac{3x+7}{7}\right]=4$,知 $4\leqslant\frac{3x+7}{7}<5$,得 $7\leqslant x<\frac{28}{3}$. 故 $x=7,8,9$.

5. A.

如图 6,过 E 作 $EF\perp BD$ 于 F. 易知点 F 为 BD 中点.

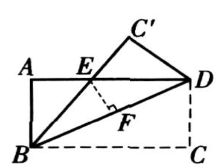

图 6

又 A、B、F、E 四点共圆,故

$$DE\cdot DA=DF\cdot DB,$$

即 $DE\cdot8=2\sqrt{5}\times4\sqrt{5}\Rightarrow DE=5$.

故 $S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}DE\cdot AB=10$.

二、**1.** 1 008 017.

设第 i **个拐角处的数为** a_i. **显然**,

$a_1=2, a_{2i}=a_{2i-1}+i$,

$a_{2i+1}=a_{2i}+(i+1)$.

因 $2\,007=2\times1\,003+1$,**所以**,

$$a_{2\,007}=1+2(1+2+\cdots+1\,003)+1\,004$$
$$=1\,004^2+1=1\,008\,017.$$

2. 8.

显然,$3\le m、M\le7$,**且** $m\ne M$. **故**

$M-m\in\{-4,-3,-2,-1,1,2,3,4\}$.

如图 7,8 **个值均可取到**

7	9	8
6	5	4
3	2	1

***M*=3,*m*=7**

6	9	8
7	5	4
3	2	1

***M*=3,*m*=6**

5	9	8
7	6	4
3	2	1

***M*=3,*m*=5**

5	9	8
7	6	1
4	3	2

***M*=4,*m*=5**

9	8	5
7	4	2
6	3	1

***M*=6,*m*=5**

9	6	5
8	4	2
7	3	1

***M*=7,*m*=5**

9	6	4
8	5	2
7	3	1

***M*=7,*m*=4**

9	6	3
8	4	2
7	5	1

***M*=7,*m*=3**

图 7

3. 30°.

设 $\angle A=2\alpha$,**则**

$\angle ABC=\angle ACB=90^\circ-\alpha$,

$\angle BCQ=\angle BQC=45^\circ+\frac{\alpha}{2}$,

$\angle PCQ=\angle ACB-\angle BCQ=45^\circ-\frac{3\alpha}{2}$.

又由 $(AP\cdot2\cos2\alpha+BQ)2\sin\alpha=BC$,**得**

$2\sin\alpha(2\cos2\alpha+1)=1$

$\Rightarrow2\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)=1$

$\Rightarrow\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\alpha=10^\circ$ **或** 50°(**舍去**).

故 $\angle PCQ=45^\circ-\frac{3\alpha}{2}=30^\circ$.

4. -1.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\left(1+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{c}\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{d}\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)$$
$$=-1+\left(1+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{b}\left(1+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{c}\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{d}\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)$$
$$=-1+\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\left(1+\frac{1}{d}\right).$$

5. 9.

联结 FP **并延长交** AD **于点** Q,**显然**,**点** Q **是** AD **的中点. 则**

$PQ=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{4}AB$, $FP=\frac{3}{4}AB$.

所以,$MN=\frac{3}{5}BC$.

故 $S_{\text{四边形}MFNP}=\frac{1}{2}FP\cdot MN$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}S_{\text{长方形}ABCD}=9$.

三、由题设

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1,$$

即 $$\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-1\right)+\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-1\right)+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+1\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{b^2+c^2-a^2-2bc}{2bc}\right)+\left(\frac{a^2+c^2-b^2-2ac}{2ac}\right)+\left(\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{2ab}\right)=0$$

$$\Rightarrow\frac{(b-c)^2-a^2}{2bc}+\frac{(a-c)^2-b^2}{2ac}+\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}=0$$

$$\Rightarrow\frac{a(b-c+a)(b-c-a)+b(a-c+b)(a-c-b)}{2abc}+\frac{c(a+b+c)(a+b-c)}{2abc}=0$$

$$\Rightarrow\frac{(a+b-c)(ab-ac-a^2+ab-bc-b^2+ac+bc+c^2)}{2abc}=0$$

$$\Rightarrow\frac{(a+b-c)(c^2-(a-b)^2]}{2abc}=0$$

$$\Rightarrow\frac{(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{2abc}=0.$$

所以,$a+b-c=0$ **或** $c+a-b=0$ **或** $b+c-a=0$.

(1) 若 $a+b-c=0$,则

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-(b-c)^2}{2bc}=1;$$

$$\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=\frac{c^2+a^2-(c-a)^2}{2ac}=1;$$

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-(a+b)^2}{2ab}=-1.$$

(2) 若 $c+a-b=0$,同理可得

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=1,\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=-1,$$

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1.$$

(3) 若 $b+c-a=0$,同理可得

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-1,\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=1,$$

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1.$$

综合(1)、(2)、(3)可得,三个分数

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}、\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}、\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

的值有两个为 1,一个为 -1.

四、如图 8,作 $\triangle ABD$ 关于 AD 的轴对称图形 $\triangle AED$,则

$\angle EAD=21°$,

$AE=AB$.

所以,$DE=BD$.

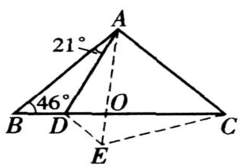

图 8

易知

$\angle ADC=21°+46°=67°$.

故 $\angle ADE=\angle ADB=180°-67°=113°$,

$\angle CDE=113°-67°=46°$.

联结 CE.

因为 $DC=AB$,所以,

$\triangle CDE\cong\triangle ABD\cong\triangle AED$.

设 O 为 AE 与 DC 的交点.

因为 $\angle ODE=\angle OED=46°$,于是,

$OD=OE$.

又 $DC=AE$,则

$AO=CO\Rightarrow\angle OCA=\angle OAC$

$\Rightarrow\angle COE=2\angle ACO$.

易知 $\angle COE=2\times46°=92°$.

因此,$2\angle ACO=\angle COE=92°$.

从而,$\angle ACO=46°=\angle OAC$.

所以,$\angle DAC=\angle DAE+\angle EAC=67°$.

五、先证 $n\leqslant14$ 时,题设的性质不成立.

当 $n=14$ 时,对于

9 999 993,9 999 994,…,10 000 006

这 14 个连续整数,任意一个数的数字之和均不能被 8 整除.

故 $n\leqslant14$ 时,题设的性质不成立.

因此,要使题设的性质成立,应有

$n\geqslant15$.

再证 $n=15$ 时,题设的性质成立.

设 $a_1,a_2,\cdots,a_{15}$ 为任意的连续 15 个正整数,则这 15 个正整数中,个位数字为 0 的整数最多有两个,最少有一个,可分为:

(1) 当 $a_1,a_2,\cdots,a_{15}$ 中个位数字为 0 的整数有两个时,设 $a_i<a_j$,且 a_i、a_j 的个位数字为 0,则满足 $a_i,a_i+1,\cdots,a_i+9,a_j$ 为连续的 11 个整数,其中,$a_i,a_i+1,\cdots,a_i+9$ 无进位.

设 n_i 表示 a_i 各位数字之和,则前 10 个数各位数字之和分别为 $n_i,n_i+1,\cdots,n_i+9$.故这连续的 10 个数中至少有一个被 8 整除.

(2) 当 $a_1,a_2,\cdots,a_{15}$ 中个位数字为 0 的整数只有一个时(记为 a_i):

(i) 若整数 i 满足 $1\leqslant i\leqslant8$,则在 a_i 后面至少有 7 个连续整数.于是,$a_i,a_i+1,\cdots,a_i+7$ 这 8 个连续整数的各位数字和也为 8 个连续整数.所以,必有一个数能被 8 整除.

(ii) 若整数 i 满足 $9\leqslant i\leqslant15$,则在 a_i 前面至少有 8 个连续整数,不妨设为 $a_{i-8},a_{i-7},\cdots,a_{i-1}$,这 8 个连续整数的各位数字和也为 8 个连续整数.所以,必有一个数能被 8 整除.

综上,对于任意 15 个连续整数中,必有一个数,其各位数字之和是 8 的倍数.

而小于 15 个的任意连续整数不成立此性质.

所以,n 的最小值是 15.

(李延林 提供)