**初中数学竞赛数论试题水平检测（二）**

**(考试时间：90分钟满分：140分)**

1. **填空题：（60分）**

1.满足的整数对的组数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

2.方程组的正整数解为.

3.已知，并且，则等于.（其中表示不超过的最大整数）

4.连续的*n*个自然数，在每个数写成标准的质因数分解式后，每个质因数都是奇数次幂，这样的*n*个连续自然数称为一个“连*n*奇异组”，如*n*＝3时，22＝21×111，23＝231，24＝23×31，则22,23,24就是一个“连3奇异组”. 那么连*n*奇异组中*n*的最大可能值是.

5.设N=23x+92y为完全平方数，且不超过2392，则满足上述条件的一切正整数对（x，y）共有对。

6.已知正整数a、b之差为120，它们的最小公倍数是其最大公约数的105倍，那么a、b中较大的数是

**二，解答题：（80分）**

7，能否将2010写成*k***个互不相等**的质数的平方和? 如果能, 试求*k*的最大值; 如果不能, 请简述理由.

8.关于*m*和*n*的方程是否存在整数解？如果存在，请写出一组解来；如果不存在，请说明理由.

9.求关于*a*，*b*，*c*，*d*的方程组    http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416378101304525.gif的所有正整数解.

10.求所有正整数*n*，使得存在正整数，满足，且.

11.求证：

（1）一个自然数的平方被7除的余数只能是0,1,4,2.

（2）对任意的正整数，[]不被7整除，其中表示不超过的最大整数。

**答案：**

1.0 2.（1,3,6） 3.6 4.7 5.27 6.225

7.**解：（1）**设为质数，若2010能写成*k*个质数的平方和，则当时,取最小的10个**互不相等**的质数的平方和, 则有

4+9+25+49+121+169+289+361+529+841=2397>2010，因此

**（2）**因为只有一个偶质数2，其余质数都是奇数，而奇数的平方仍是奇数，并且被8除余1.

当*k=*9时，若2010=，其中必有一个偶质数的平方，8个奇质数的平方.左边被8除余2，右边被8除余4，等式不能成立.所以2010不能表示为9个不同质数的平方和，即

当若时，若2010=，这8个加项都是奇质数的平方.左边被8除余2，右边被8除余0，等式不能成立.所以2010不能表示为8个不同质数的平方和，即

当*k=*7时，2010=，左边被8除余2，右边被8除余2，等式可能成立.也就是2010有可能表示为7个不同质数的平方和，

我们试算可知，.

综上可得2010可以写成*k***个互不相等**的质数的平方和，***k*的最大值等于7.**

比如就是将2010写成7**个互不相等**的质数的平方和的一个例子.

**说明：2010表为7个互不相等**的质数的平方和共有如下4种形式：答出一种即可. （没有推理，只给出一种表示法可得2分）







.

事实上，我们还可以证明所以2010只能表示为**7个互不相等**的质数的平方和.

8.不存在

9.解：将*abc*=*d*代入10*ab*+10*bc*+10*ca*=9*d*得

10*ab*+10*bc*+10*ca*=9*abc*.

因为*abc*≠0，所以，http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448689355.gif.

不妨设*a*≤*b*≤*c*，则

http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448836431.gif≥http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448832109.gif≥http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448839626.gif＞0.

于是，                http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448836431.gif＜http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448839044.gif≤http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448838274.gif，

即                          http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448836431.gif＜http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448834542.gif≤http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448838274.gif，

http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448832919.gif＜*a*≤http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448996888.gif.

从而，*a*=2，或3.

若*a*=2，则http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448993130.gif.

因为http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448832109.gif＜http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448995172.gif≤http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448997445.gif，所以，http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448832109.gif＜http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448999827.gif≤http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448997445.gif，http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448992056.gif＜*b*≤5.

 从而，*b*=3，4，5. 相应地，可得*c*=15，http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448995757.gif(舍去)，5.

当*a*=2，*b*=3，*c*=15时，*d*=90；

当*a*=2，*b*=5，*c*=5时，*d*=50.

若*a*=3，则http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448996147.gif.

因为http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448832109.gif＜http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448995172.gif≤http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448997445.gif，所以，http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448832109.gif＜http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448999527.gif≤http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377448997445.gif，http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377449142832.gif＜*b*≤http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377449148667.gif.

从而，*b*=2（舍去），3.

当*b*=3时，*c*=http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/sxxh/czsxjs/czsxjs2012/201204/W020120416377449143574.gif(舍去).

因此，所有正整数解为

(*a*，*b*，*c*，*d*)=(2，3，15，90)，(2，15，3，90)，(3，2，15，90)，

(3，15，2，90)，(15，2，3，90)，(15，3，2，90)，

(2，5，5，50)，(5，2，5，50)，(5，5，2，50).

10.**解：**由于都是正整数，且，所以

≥1，≥2，…，≥2012．

于是≤．

…………（5分）

当时，令，则

.

…………（10分）

当时，其中≤≤，令

，则

．

综上，满足条件的所有正整数*n*为．

11.（1）设m=7k+r分类

(2)令M=n（n+2）（n+4）（n+6）=（n²+6n）(n²+6n+8)

令k=n²+6n，所以M=K（k+8）。可得整数部分为k+3，即（n+3）²—6，此式不能被7整除.