竞赛之窗

2005年全国初中数学竞赛四川赛区初赛

一、选择题(每小题7分,共42分)

1. 若 a、b 为实数,则下列命题中,正确的是( ).

(A) $a > b \Rightarrow a^2 > b^2$

(B) $a \neq b \Rightarrow a^2 \neq b^2$

(C) $|a| > b \Rightarrow a^2 > b^2$

(D) $a > |b| \Rightarrow a^2 > b^2$

2. 已知 $a + b + c = 3$, $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. 则 $a^{2005} + b^{2005} + c^{2005}$ 的值是( ).

(A) 0 (B) 3 (C) 2^{2005} (D) 3×2^{2005}

3. 有一种足球是由若干块黑白相间的牛皮缝制而成的,黑皮为正五边形,白皮为正六边形(如图1). 如果一个缝制好的这种足球黑皮有12块,则白皮有( )块.

图1

(A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 22

4. 在 Rt△ABC 中,斜边 $AB = 5$,两直角边 BC、AC 之长是一元二次方程

$$x^2 - (2m - 1)x + 4(m - 1) = 0$$

的两根. 则 m 的值是( ).

(A) 4 (B) -1

(C) 4 或 -1 (D) -4 或 1

5. 如图2,直线 $x = 1$ 是二次函数

$$y = ax^2 + bx + c$$

的图像的对称轴. 则有( ).

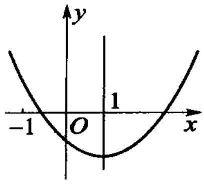

图2

(A) $a + b + c > 0$

(B) $b > a + c$

(C) $c > 2b$ (D) $abc < 0$

6. 在直角坐标系中,横纵坐标都是整数的点称为整点. 设 k 为整数. 当直线 $y = x - 3$ 与 $y = kx + k$ 的交点为整点时,k 的值可以取( )个.

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

二、填空题(每小题7分,共28分)

1. 已知 x 为非零实数,且 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = a$. 则 $\frac{x^2 + 1}{x} =$ ______.

2. 已知 a 为实数,且使关于 x 的一元二次方程 $x^2 + a^2 x + a = 0$ 有实根. 则 x 所能取到的最大值是______.

3. P 是 $\odot O$ 的直径 AB 的延长线上的一点,PC 与 $\odot O$ 相切于点 C,$\angle APC$ 的平分线交 AC 于点 Q. 则 $\angle PQC =$ ______.

4. 对于一个正整数 n,如果能找到正整数 a、b,使得 $n = a + b + ab$,则称 n 为一个"好数". 例如,$3 = 1 + 1 + 1 \times 1$,3 就是一个好数. 那么,在 1～20 这 20 个正整数中,好数有______个.

三、(20分) 设 A、B 是抛物线 $y = 2x^2 + 4x - 2$ 上的点,原点位于线段 AB 的中点处. 试求 A、B 两点的坐标.

四、(25分) 如图3,AB 是 $\odot O$ 的直径,$AB = d$,过点 A 作 $\odot O$ 的切线并在其上取一点 C,使 $AC = AB$,联结 OC 交 $\odot O$ 于点 D,BD 的延长线交 AC 于 E. 求 AE 的长.

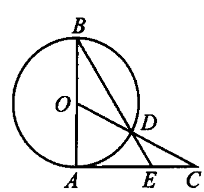

图3

五、(25 分)设 $x=a+b-c$, $y=a+c-b$, $z=b+c-a$,其中 a、b、c 是待定的质数. 如果 $x^2=y$, $\sqrt{z}-\sqrt{y}=2$,试求 abc 的所有可能的值.

参 考 答 案

一、1. D.

当 $a=-1$, $b=-2$ 时,选项(A)、(C)错;

当 $a=-1$, $b=1$ 时,选项(B)错.

2. B.

由 $0=3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2$

$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$,

知 $a=b=c=1$.

故 $a^{2005}+b^{2005}+c^{2005}=3$.

3. C.

由题设知,每块白皮与 3 块黑皮和 3 块白皮相邻,而每块黑皮则只与 5 块白皮相邻,故白皮有 $\frac{12\times5}{3}=20$ 块.

4. A.

由题设有

$(2m-1)^2-2\times4(m-1)=25$.

解得 $m_1=4$, $m_2=-1$(舍去).

5. C.

由题设 $a>0$, $-\frac{b}{2a}=1$,有 $b<0$;

由图 2 知 $f(-1)=a-b+c>0$, $f(1)=a+b+c<0$, $c<0$,故选项(A)、(B)、(D)错.

又 $c>b-a=b+\frac{b}{2}>2b$,故选(C).

6. C.

由 $\begin{cases}y=x-3,\\ y=kx+k,\end{cases}$ 解得 $x=\frac{k+3}{1-k}=-1+\frac{4}{1-k}$.

故 $k=-3,-1,0,2,3,5$.

二、1. a^2-2.

将 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=a$ 两边平方得 $x+x^{-1}+2=a^2$.

故 $\frac{x^2+1}{x}=x+x^{-1}=a^2-2$.

2. $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.

已知 a 为实数,当 $a\neq0$ 时,关于 a 的一元二次方程 $a^2x+a+x^2=0$ 有实根. 于是,$\Delta=1-4x^3\geq0$.

故 $x\leq\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.

当 $a=0$ 时,$x=0$.

3. $45°$.

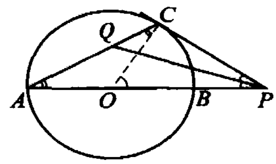

图 4

如图 4,联结 OC. 因 PC 与 $\odot O$ 相切于点 C,则 $OC\perp PC$.

因为 $OA=OC$,所以,

$\angle OAC=\angle OCA=\frac{1}{2}\angle POC$.

又 $\angle APQ=\angle CPQ=\frac{1}{2}\angle APC$,故

$\angle PQC=\angle PAQ+\angle APQ$

$=\frac{1}{2}(\angle POC+\angle APC)=\frac{1}{2}\times90°=45°$.

4. 12.

$n+1=a+b+ab+1=(a+1)(b+1)$ 为合数,所求的 n 即为 2～21 之间的合数减 1 的数. 2～21 之间的合数有 4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20,21 共 12 个,故所求的 n 有 12 个:3,5,7,8,9,11,13,14,15,17,19,20.

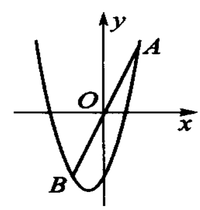

图 5

三、如图 5,设 $A(a,b)$. 因原点是 AB 的中点,故 A 和 B 关于原点对称,即

$B(-a,-b)$.

又 A、B 是抛物线上的点,分别将它们代入抛物线的方程,得

$\begin{cases}b=2a^2+4a-2,\\ -b=2a^2-4a-2.\end{cases}$

解得 $a=1$, $b=4$ 或 $a=-1$, $b=-4$.

故 $A(1,4)$ 或 $A(-1,-4)$, $B(-1,-4)$ 或 $B(1,4)$.

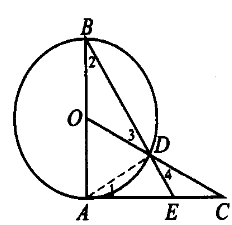

图 6

四、如图 6,联结 AD.则

$\angle1=\angle2$

$=\angle3=\angle4$.

故 $\triangle CDE\backsim\triangle CAD$,有

$\frac{CD}{DE}=\frac{CA}{AD}$. ①

又因 $\triangle ADE\backsim\triangle BDA$,有

2005 年全国高中数学联赛天津赛区初赛

一、选择题(每小题 5 分,共 30 分)

1. 在 $\triangle ABC$ 中,如果 $a^2+b^2=6c^2$,则 $(\cot A+\cot B)\tan C$ 的值等于(　　).

(A) $\frac{1}{5}$　(B) $\frac{2}{5}$　(C) $\frac{1}{7}$　(D) $\frac{2}{7}$

2. 已知 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的不恒为 0 的函数. 如果对于任意的 a、$b\in\mathbf{R}$ 都满足 $f(ab)=af(b)+bf(a)$,则函数 $f(x)$(　　).

(A) 是奇函数　(B) 是偶函数

(C) 既是奇函数又是偶函数

(D) 既不是奇函数也不是偶函数

3. 设由正整数有序数对 (x,y) 组成如下数列:(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(2,2),(3,1),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),…,按 $x+y$ 的值由小到大的顺序排列,当 $x+y$ 的值相等时,按 x 的值由小到大的顺序排列. 则有序数对 (m,n)(m、n 均为正整数) 在该数列中的位置是(　　).

(A) 第 $2m+n-1$ 位

(B) 第 $2m+n-2$ 位

(C) 第 $\frac{(m+n-1)(m+n)}{2}+m$ 位

(D) 第 $\frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2}+m$ 位

4. 如图 1,已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E、F 分别是 AB、AA_1 的中点. 则平面 CEB_1 与平面 D_1FB_1 所成二面角的平面角的正弦值为(　　).

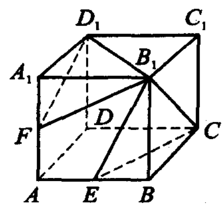

图 1

$$\frac{AE}{DE}=\frac{AB}{DA}.\qquad ②$$

由式①、②及 $AB=AC$,得 $AE=CD$.

又由 $\angle 1=\angle 4$ 知,CD 是 $\triangle ADE$ 外接圆的切线.

故 $CD^2=CE\cdot CA$,即 $AE^2=CE\cdot CA$.

令 $AE=x$,则 $CE=d-x$.

于是,$x^2=d(d-x)$,即 $x^2+dx-d^2=0$.

解方程并取正根得 $AE=x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}d$.

五、由题给三个方程联立解得

$$(a,b,c)=\left(\frac{1}{2}(x+y),\frac{1}{2}(x+z),\frac{1}{2}(y+z)\right).$$

又因 $y=x^2$,于是,有

$$a=\frac{1}{2}(x+x^2),\qquad ①$$

$$b=\frac{1}{2}(x+z),\qquad ②$$

$$c=\frac{1}{2}(x^2+z).\qquad ③$$

由式①解得

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8a}}{2}.\qquad ④$$

因 x 是整数,得 $1+8a=T^2$,其中 T 是正奇数.

于是,$2a=\frac{T-1}{2}\cdot\frac{T+1}{2}$.

又 a 是质数,故有 $\frac{T+1}{2}=a$,$\frac{T-1}{2}=2$.

所以,$T=5$,$a=3$.

将 $a=3$ 代入式④得 $x=2$,$x=-3$.

当 $x=2$ 时,$y=x^2=4$,因而 $\sqrt{z}-2=2$,$z=16$. 将其代入式②、③得 $b=9$,$c=10$,与 b、c 是质数矛盾,应舍去.

当 $x=-3$ 时,$y=9$,因而 $\sqrt{z}-3=2$,$z=25$. 将其代入式②、③得 $b=11$,$c=17$.

故 $abc=3\times11\times17=561$.

(唐贤江　提供)