

## 2014年第二届“学数学”数学奥林匹克邀请赛(秋季赛)

## 第一试

<http://www.omaths.com>

2014年8月30日 8:00-9:20

## 一. 填空题(本题满分64分, 每小题8分)

1. 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AB = 1$ , 点 $E$ 是边 $AB$ 的中点,  $CD$ 是边 $AB$ 上的高. 则 $(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}) \cdot (\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CE})$ 的最大值为\_\_\_\_\_.
2. 方程 $\sqrt{2x+2} - 2\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x+10} - 6\sqrt{2x+1} = 2$ 的解集为\_\_\_\_\_.
3. 若函数 $f(x) = \cos nx \cdot \sin \frac{4}{n}x$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) 的周期为 $3\pi$ , 则 $n$ 的取值集合为\_\_\_\_\_.
4. 若方程 $\sqrt{ax^2 + ax + 2} = ax + 2$ 恰有一个实根, 则实数 $a$ 的取值范围是\_\_\_\_\_.
5. 随机地投掷四颗骰子, 则这四颗骰子所示数字中的最小数恰等于3的概率为\_\_\_\_\_.
6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2a_n}$ , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \sqrt{n}) =$ \_\_\_\_\_.
7. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左焦点为点 $F$ , 过椭圆 $C$ 上的一点 $A$ 做椭圆的切线交 $y$ 轴于点 $Q$ . 若 $\angle QFO = 45^\circ$ ,  $\angle QFA = 30^\circ$ , 则椭圆的离心率为\_\_\_\_\_.
8. 两个腰长都是1的等腰直角 $\triangle ABC_1$ 和等腰直角 $\triangle ABC_2$ 所在的半平面构成 $60^\circ$ 的二面角, 则线段 $C_1C_2$ 的长的取值集合为\_\_\_\_\_.



学数学编辑部官方微信平台

二. 解答题(本题满分56分)

9. (16分)

设点 $A(x_0, y_0)$ ,  $B\left(\frac{y_0^2}{p} - x_0, y_0\right)$  ( $p > 0$ ) 是平面上的两个定点, 点 $P$ 是抛物线 $y^2 = 2px$ 上的一个动点, 直线 $PA$ ,  $PB$ 分别与抛物线交于另一点 $C$ ,  $D$ .

求证: 直线 $CD$ 的斜率为定值.

10. (20分)

已知 $m, n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\ln g_m(x) = x + m \ln 3$ ,  $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$ , 其中 $f_1(x) = 3x + 2$ . 证明:

(1) 对任意的 $x \geq 2$ ,  $\sum_{i=1}^{2014} \frac{1}{g_i(x) - f_i(x)} < \frac{1}{2}$ ;

(2) 对于任意的整数 $k \geq 7$ , 必存在一个由 $k$ 唯一确定的 $\delta_k \in \{0, 1, 2, \dots, 2013\}$ , 使得 $f_k(\delta_k)$ 是2014的倍数.

11. (20分)

已知数列 $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ 满足: 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\{a_n\}$ 中不大于 $n$ 的项数恰为 $b_n$ ,  $\{b_n\}$ 中不大于 $n$ 的项数恰为 $a_n$ .

(1) 若 $a_1 = b_1$ , 求 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ ;

(2) 若 $a_1 = b_1 + 2014$ , 求 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ .

## 欢迎订阅学数学杂志

《学数学》杂志是高中学生学习数学课程, 参加高考, 准备参加自主招生考试及角逐全国高中数学联赛等各级数学竞赛的得力助手. 她是高中同学研究数学的工具, 学好数学的宝典; 她是高中数学教师教学的伴侣, 竞赛辅导的参考资料.

淘宝网店 <http://xueshuxue.taobao.com>

投稿邮箱 [xsx@omaths.com](mailto:xsx@omaths.com)

订阅邮箱 [fzp@omaths.com](mailto:fzp@omaths.com)

杂志网址 <http://www.omaths.com>

## 2014年全国中学生数学冬令营考前强化冲刺班

**授课时间** 2014年11月1日报到, 11月2日至11月13日授课.

**报到地点** 江苏省南京市.

**培训师资** 单墉等《学数学》顾问及编委.

**授课形式** 邀请担任过CMO主试委员会委员及IMO中国国家集训队教练的专家进行专题讲座, 培训期间安排一次适应性训练, 并赠送由本刊编委会精心选编的80道练习题.

详情请登录<http://www.omaths.com>查询.