2014年第二届“学数学” 数学奥林匹克邀请赛(秋季赛)

参考答案

第一试

http://www.omaths.com

2014年8月30日　　8:00–9:20

一. 填空题(本题满分64分, 每小题8分)

1. 在Rt $\triangle ABC$中, $\angle C=90^\circ$, $AB=1$, 点E是边AB的中点, CD是边AB上的高. 则$\left(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CE}\right)$的最大值为________. (李维维　供题)

解答 $\dfrac{2}{27}$.

设$CA=b$, $CB=a$, 则$a^2+b^2=AB^2=1$, $CD=2\dfrac{S_{\triangle ABC}}{AB}=ab$, 于是

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CE}\right) &= \left|\overrightarrow{CD}\right|^2\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CD}\right|^2\cdot\left|\overrightarrow{CA}\right| \\
&= \frac{1}{2}a^2b^4=2(1-b^2)\cdot\frac{b^2}{2}\cdot\frac{b^2}{2} \\
&\leqslant \left(\frac{(1-b)^2+\frac{b^2}{2}+\frac{b^2}{2}}{3}\right)^3=\frac{2}{27}.
\end{aligned}$$

其中等号当且仅当$b^2=\dfrac{2}{3}$即$a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $b=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$时成立. 因此, $\left(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CE}\right)$的最大值为$\dfrac{2}{27}$.

2. 方程$\sqrt{2x+2-2\sqrt{2x+1}}+\sqrt{2x+10-6\sqrt{2x+1}}=2$的解集为________. (程汉波　供题)

解答 $[0,4]$.

(法一) 易知

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2x+2-2\sqrt{2x+1}}+\sqrt{2x+10-6\sqrt{2x+1}} \\
=&\sqrt{(\sqrt{2x+1})^2-2\sqrt{2x+1}+1^2}+\sqrt{(\sqrt{2x+1})^2-6\sqrt{2x+1}+3^2} \\
=&|\sqrt{2x+1}-1|+|\sqrt{2x+1}-3| \\
\geqslant&\ 2,
\end{aligned}$$

其中等号当且仅当$1\leqslant\sqrt{2x+1}\leqslant 3$, 即$x\in[0,4]$时成立.

(法二) 根据题意, 可设

$$\sqrt{2x+2-2\sqrt{2x+1}}=1-d, \qquad ①$$

$$\sqrt{2x+10-6\sqrt{2x+1}}=1+d, \qquad ②$$

由

$$\begin{cases}1-d\geqslant 0,\\ 1+d\geqslant 0,\end{cases}$$

得$-1 \leqslant d \leqslant 1$. 由②^2 − ①^2, 得

$$\sqrt{2x+1}=2-d,$$

代入式①, ②, 得

$$\begin{cases}\sqrt{1+(2-d)^2+2(2-d)}=1-d,\\ \sqrt{9+(2-d)^2+6(2-d)}=1+d\end{cases}$$

在$-1 \leqslant d \leqslant 1$上恒成立.

所以, 原方程成立只需满足$\sqrt{2x+1}=2-d \in [1,3]$, 即$x \in [0,4]$.

3. 若函数$f(x)=\cos nx \cdot \sin \dfrac{4}{n}x$ $(n \in \mathbf{Z})$ 的周期为3π, 则n的取值集合为________. (李维维 供题)

解答 $\{\pm 2, \pm 6\}$.

由$f(3\pi)=f(0)=0$, 得$\sin \dfrac{12\pi}{n}=0$, 所以$n \mid 12$.

由$f(x+3\pi)=\cos(nx+3n\pi)\sin\left(\dfrac{4}{n}x+\dfrac{12\pi}{n}\right)$, 易知$3n$与$\dfrac{12}{n}$都是整数且必有一个为偶数. 若有一个为奇数, 则$f(x+3\pi)=\cos(n\pi+x)\sin\dfrac{4}{n}x$ 或$\cos nx \cdot \sin\left(\dfrac{4}{n}x+\pi\right)$, 即$f(x+3\pi)=f(x)$, 不符合题意. 因此$3n$与$\dfrac{12}{n}$同为偶数, 此时$f(x+3\pi)=f(x)$恒成立. 故$n=\pm 2, \pm 6$满足题意.

4. 若方程$\sqrt{ax^2+ax+2}=ax+2$恰有一个实根, 则实数a的取值范围是________. (武炳杰 供题)

解答 $\{-8\} \cup [1,+\infty)$.

若$ax+2<0$, 则方程无实根.

若$ax+2>0$, 则原方程等价于

$$(a^2-a)x^2+3ax+2=0,$$

上式仅有1个实数解, 有以下三种情况.

(1) $a^2-a=0$, 此时检验知此时$a=1$符合要求.

(2) $a^2-a \neq 0$, 方程有两个相等的实数根, 即$\Delta=(3a)^2-4\times 2\times(a^2-a)=0$, 解得$a=-8$, 经检验知符合要求.

(3) $a^2-a \neq 0$, 方程有两个不等的实数根x_1, x_2 $(x_1<x_2)$, 且$ax_1+2<0 \leqslant ax^2+2$, 即$-\dfrac{1}{a}$介于两根之间, 且不能与某个根相等(否则$(a^2-a)\left(-\dfrac{2}{a}\right)^2+3a\left(-\dfrac{2}{a}\right)+2=0$, 化简得$-\dfrac{1}{a}=0$, 矛盾), 这等价于$(a^2-a)\left(-\dfrac{2}{a}\right)^2+3a\left(-\dfrac{2}{a}\right)+2<0$, 解得$a>1$.

综上所述, $a=-8$或$a \geqslant 1$.

5. 随机地投掷四颗骰子, 则这四颗骰子所示数字中的最小数恰等于3的概率为________. (赵 斌 供题)

解答 $\dfrac{175}{1296}$.

将"四颗骰子所示数字中的最小数恰等于3" 记为事件A_3, "四颗骰子所示数字中的最小数不小于i" 记为事件B_i $(i=1,2,3,4,5,6)$, 则$A_3=B_3 \backslash B_4$. 又

$$P(B_i)=\frac{|B_i|}{|\Omega|}=\frac{(7-i)^4}{6^4},\ i=1,2,3,4,5,6,$$

故

$$P(A_3)=P(B_3)-P(B_4)=\left(\frac{4}{6}\right)^4-\left(\frac{3}{6}\right)^4=\frac{175}{1296}.$$

6. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{2a_n}$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-\sqrt{n})=$________. (武炳杰　供题)

解答 0.

由$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{2a_n}$, 得

$$a_{n+1}^2=a_n^2+\frac{1}{4a_n^2}+1.$$

由数学归纳法可证$n\leqslant a_n^2<n+\sqrt[3]{n}$, 从而

$$0\leqslant a_n-\sqrt{n}<\sqrt{n+\sqrt[3]{n}}-\sqrt{n}=\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+\sqrt[3]{n}}+\sqrt{n}}<\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt[6]{n}},$$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[6]{n}}=0$, 故$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-\sqrt{n})=0$.

7. 设椭圆C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左焦点为点F, 过椭圆C上的一点A做椭圆的切线交y轴于点Q. 若$\angle QFO=45^\circ$, $\angle QFA=30^\circ$, 则椭圆的离心率为________. (李鸿昌　供题)

解答 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

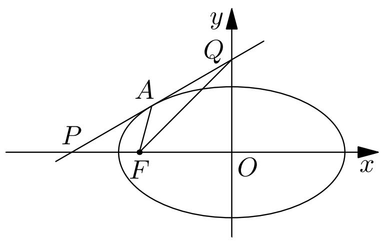

图 1

如图1, 设$A(x_0,y_0)$, 则过点A的切线方程为$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$, 设切线与$x$轴相交于点$P$, 则$P\left(\dfrac{a^2}{x_0},0\right)$, $C\left(0,\dfrac{b^2}{y_0}\right)$, 所以

$$\overrightarrow{FQ}\cdot\overrightarrow{FO}=\left(c,\frac{b^2}{y_0}\right)\cdot(c,0)=c^2,$$

$$\overrightarrow{FQ}\cdot\overrightarrow{FA}=\left(c,\frac{b^2}{y_0}\right)\cdot(x_0+c,y_0)=cx_0+a^2.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\cos\angle QFO}{\cos\angle QFA}&=\frac{\overrightarrow{FQ}\cdot\overrightarrow{FA}}{\overrightarrow{FQ}\cdot\overrightarrow{FO}}\cdot\frac{\left|\overrightarrow{FQ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{FO}\right|}{\left|\overrightarrow{FQ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{FA}\right|}\\&=\frac{c^2}{cx_0+a^2}\cdot\frac{ex_0+a}{c}\\&=\frac{c}{a}\cdot\frac{ex_0+a}{ex_0+a}=e,\end{aligned}$$

所以椭圆的离心率

$$e=\frac{\cos\angle QFO}{\cos\angle QFA}=\frac{\cos 45^\circ}{\cos 30^\circ}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

8. 两个腰长都是1的等腰直角$\triangle ABC_1$和等腰直角$\triangle ABC_2$所在的半平面构成60°的二面角, 则线段C_1C_2的长的取值集合为________. (安振平　供题)

解答 $\left\{1,\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right\}$.

两个三角形的平面拼接方式有三种, 如图2所示.

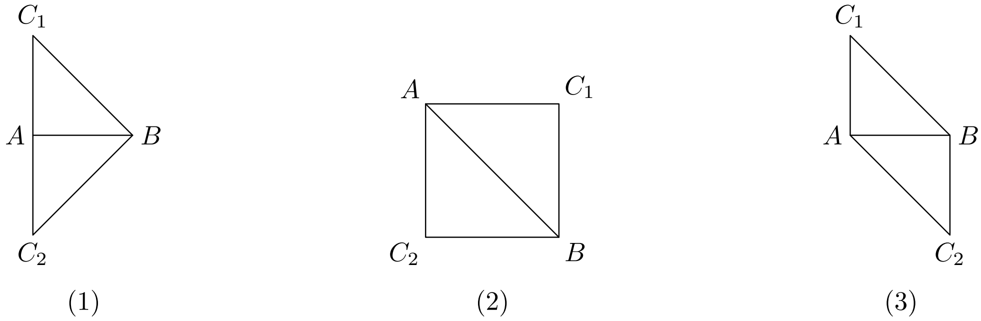

图 2

当平面图(1) 沿AB折叠形成$60°$的二面角时, 如图3所示, $\triangle AC_1C_2$是边长为1的正三角形, 所以$C_1C_2 = 1$.

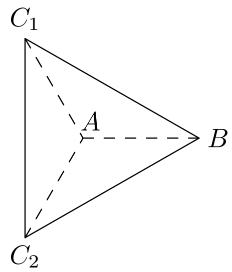

图 3

当平面图(2) 沿AB折叠形成$60°$的二面角时, 如图5所示, 取AB的中点O, 正三角形$\triangle OC_1C_2$的边长为单位正方形对角线的一半, 所以$C_1C_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

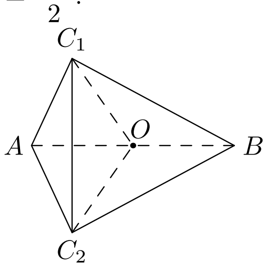

图 4

当平面图(3) 沿AB折叠形成$60°$的二面角时, 如图5所示, 在平面ABC_2内取点D, 使得$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC_2}$, 联结$C_1D$, C_2D, 正三角形$\triangle AC_1D$的边长为1, 则$C_1D = 1$. 易知$C_2D = 1$, 在$\triangle C_1C_2D$中, $\angle C_1DC_2 = 90°$, 所以$C_1C_2 = \sqrt{2}$.

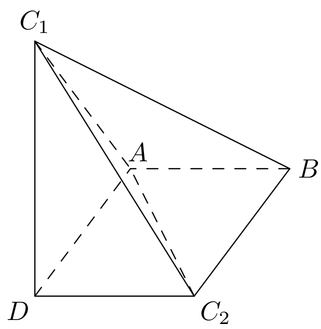

图 5

综上所述, CC_1的长的取值集合为$\left\{1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right\}$.

二. 解答题(本题满分56分)

9. (16分)

设点$A(x_0, y_0)$, $B\left(\dfrac{y_0^2}{p} - x_0, y_0\right)$ $(p > 0)$ 是平面上的两个定点, 点P是抛物线$y^2 = 2px$上的一个动点, 直线PA, PB分别与抛物线交于另一点C, D.

求证: 直线CD的斜率为定值. (萧振纲　供题)

解答 设$P(2pt^2, 2pt)$, $C(2pt_1^2, 2pt_1)$, $D(2pt_2^2, 2pt_2)$, 则

$$\frac{2pt - 2pt_1}{2pt^2 - 2pt_1^2} = \frac{2pt - y_0}{2pt^2 - x_0},$$

即

$$\frac{1}{t + t_1} = \frac{2pt - y_0}{2pt^2 - x_0},$$

所以

$$t_1 = \frac{2pt^2 - x_0}{2pt - y_0} - t = \frac{y_0 t - x_0}{2pt - y_0}.$$

同理

$$t_2 = \frac{y_0 t - \left(\dfrac{y_0^2}{p} - x_0\right)}{2pt - y_0} = \frac{p(x_0 + y_0 t) - y_0^2}{2p^2 t - p y_0}.$$

直线CD的方程为

$$2p(t_2 - t_1)x - 2p(t_2^2 - t_1^2)y + 4p^2(t_1 t_2^2 - t_1^2 t_2) = 0,$$

即

$$x - (t_1 + t_2)y + 2pt_1 t_2 = 0.$$

而

$$\frac{1}{t_1 + t_2} = \frac{y_0 t - x_0}{2pt - y_0} + \frac{p(x_0 + y_0 t) - y_0^2}{2p^2 t - p y_0} = \frac{p(y_0 t - x_0) + p(x_0 + y_0 t) - y_0^2}{p(2pt - y_0)} = \frac{y_0}{p}$$

是一个与点P无关的常数, 因此直线CD的斜率

$$k_{CD} = \frac{1}{t_1 + t_2} = \frac{p}{y_0}$$

为定值.

10. (20分)

已知m, $n \in \mathbf{N}^*$, $\ln g_m(x) = x + m\ln 3$, $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$, 其中$f_1(x) = 3x + 2$. 证明:

(1) 对任意的$x \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{2014} \frac{1}{g_i(x) - f_i(x)} < \frac{1}{2}$;

(2) 对于任意的整数$k \geqslant 7$, 必存在一个由k唯一确定的$\delta_k \in \{0, 1, 2, \cdots, 2013\}$, 使得$f_k(\delta_k)$是2014的倍数. (张嘉良　供题)

解答 (1) 易知

$$g_m(x) = 3^m \cdot \mathrm{e}^x,\ f_n(x) = 3^n(x + 1) - 1.$$

令$h(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$, $h'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. 当$x > 0$时, $h'(x) > 0$, 即$h(x)$在$(0, +\infty)$上是增函数. 从而, 当$x \geqslant 2$时, $h(x) \geqslant h(2) = \mathrm{e}^2 - 3 > 1$, 即$\mathrm{e}^x - x - 1 > 1$.

从而

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2014}\frac{1}{g_i(x)-f_i(x)}&=\sum_{i=1}^{2014}\frac{1}{3^i(\mathrm{e}^x-x-1)+1}\\&<\sum_{i=1}^{2014}\frac{1}{3^i+1}<\sum_{i=1}^{2014}\frac{1}{3^i}\\&<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{3^i}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(2) $2014\mid f_k(\delta_k)\Leftrightarrow 2014\mid 3^k(\delta_k+1)-1$.

易知$\gcd(3^k,2014)=1$, 由裴蜀(Bezout) 定理, 知存在整数u, v, 使得$3^ku+2014v=1$. 从而, 取$\delta_k=u-1$即可满足条件.

下面说明唯一性.

假设存在$\delta_k'\in\{0,1,2,\cdots,2013\}$ ($\delta_k'\neq\delta_k$) , 使得$2014\mid 3^k(\delta_k'+1)-1$. 于是,

$$f_k(\delta_k')-f_k(\delta_k)=3^k(\delta_k'-\delta_k)\equiv 0\pmod{2014}.$$

又$\gcd(3^k,2014)=1$, 故$2014\mid\delta_k'-\delta_k$, 即$\delta_k'\equiv\delta_k\pmod{2014}$, 结合$\delta_k$, $\delta_k'\in\{0,1,2,\cdots,2013\}$知$\delta_k'=\delta_k$, 矛盾. 因此这样的$\delta_k$是唯一的.

11. (20分)

已知数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$满足: 对任意$n\in\mathbf{N}^*$, $\{a_n\}$中不大于n的项数恰为b_n, $\{b_n\}$中不大于n的项数恰为a_n.

(1) 若$a_1=b_1$, 求$\{a_n\}$与$\{b_n\}$;

(2) 若$a_1=b_1+2014$, 求$\{a_n\}$与$\{b_n\}$. (刘凯峰 供题)

解答 首先, 容易得到一个简单事实: $\{a_n\}$, $\{b_n\}$均为单调递增数列.

(1) 下面用数学归纳法证明: $a_n=b_n=n$, $n=1,2,\cdots$.

当$n=1$时, 若$a_1=b_1=0$, 则$\{a_n\}$中不大于1的项至少有一项(即a_1) , 从而$b_1\geqslant 1$, 这与$b_1=0$矛盾. 若$a_1=b_1\geqslant 2$, 但由$a_1\geqslant 2$及简单事实$\{a_n\}$为单调递增数列, $\{a_n\}$中没有不大于1的项, 从而$b_1=0$, 这与$b_1=2$矛盾. 所以$a_1=b_1=1$.

假设当$n=k$时, $a_k=b_k=k$. 下面证明: $a_{k+1}=b_{k+1}=k+1$.

若$a_{k+1}\geqslant k+2$, 而$\{a_n\}$为单调递增数列, 故$\{a_n\}$中不大于$k+1$的项只有k项, 即$b_{k+1}=k$, 但此时$\{b_n\}$中不大于k的项至少有$k+1$项$(b_1,b_2,\cdots,b_k,b_{k+1})$, 于是$a_k\geqslant k+1$, 这与假设$a_k=k$矛盾. 所以$a_{k+1}\leqslant k+1$.

若$a_{k+1}=k$, 则$\{a_n\}$中不大于k的项至少有$k+1$项$(a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{k+1})$, 于是$b_k\geqslant k+1$, 这与假设$b_k=k$矛盾.

所以, $a_{k+1}=k+1$, 同理可证$b_{k+1}=k+1$. 即当$n=k+1$时, $a_{k+1}=b_{k+1}=k+1$.

综上所述, 对任意正整数n, $a_n=b_n=n$成立.

(2) 由已知得$a_1=b_1+2014\geqslant 2014$, 又$\{a_n\}$为单调递增数列, 所以对任意正整数$1\leqslant k\leqslant 2013$, $\{a_n\}$中没有不大于k的项, 所以$b_k=0$ $(1\leqslant k\leqslant 2013)$. 特别地, $b_1=0$, 从而$a_1=2014$. 类似(1) 用数学归纳法可证明

$$a_n=2013+n,\ n=1,2,\cdots.$$

$$b_n=\begin{cases}0, & 1\leqslant n\leqslant 2013,\\ n-2013, & n\geqslant 2014.\end{cases}$$