2014年第二届“学数学” 数学奥林匹克邀请赛(秋季赛)

第二试

http://www.omaths.com

2014年8月30日　　9:40–12:10

一. (本题满分40分)

如图1, $\triangle ABC$的内切圆$\odot I$分别与边BC, CA, AB相切于点D, E, F, DD'为$\odot I$的直径, 过圆心I作直线AD'的垂线l, 直线l分别与DE, DF相交于点M, N. 证明: $IM = IN$.

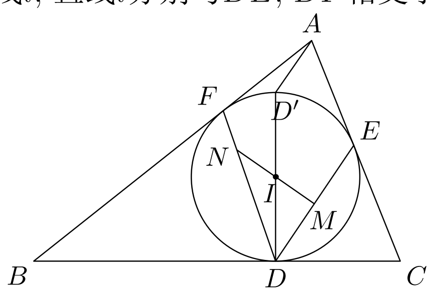

图 1

二. (本题满分40分)

已知$\lambda_i \in \mathbf{R}^+$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 试求方程

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i + \lambda_i)^2}{x_{i+1}} = 4\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

(其中$x_{n+1} = x_1$) 的所有正实数解$x_1, x_2, \cdots, x_n$.

三. (本题满分50分)

对给定的正整数n, 试求所有的正整数k, 使得$2n$可以表示成k个(包括1个) 连续整数的立方和.

四. (本题满分50分)

将正n $(n \geqslant 3)$ 边形的每条边和对角线都染为m种颜色之一, 使得每个顶点所连出的$n-1$条线段(边或对角线) 的颜色两两不同, 试求正整数m的最小可能值.