2014年第二届“学数学” 数学奥林匹克邀请赛(秋季赛)

参考答案

第二试

http://www.omaths.com

2014年8月30日　　9:40–12:10

一. (本题满分40分)

如图1, $\triangle ABC$的内切圆$\odot I$分别与边BC, CA, AB相切于点D, E, F, DD'为$\odot I$的直径, 过圆心I作直线AD'的垂线l, 直线l分别与DE, DF相交于点M, N. 证明: $IM = IN$. (单 墫 供题)

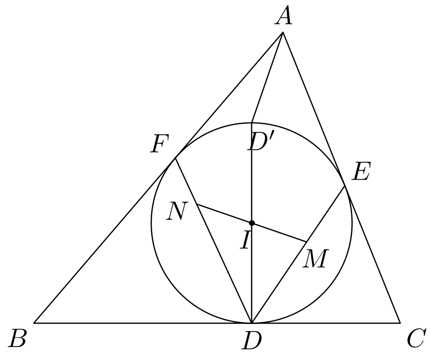

图 1

解答 (法一) 当$AB = AC$时, 由对称性知结论显然成立. 以下不妨设$AB > AC$.

如图2, 延长AD'与$\odot I$交于点P, 设$\odot I$过点D', P的切线相交于点S. 由$AD' \perp MN$, 易知S, N, M三点共线.

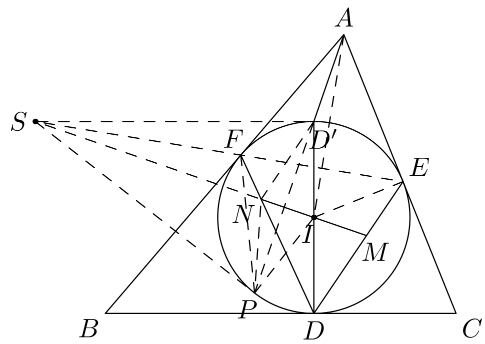

图 2

首先证明: S, F, E三点共线.

联结IA, IP, IE. 由$IS \perp AP$, 得

$$IA^2 - IP^2 = SA^2 - SP^2. \qquad ①$$

在Rt$\triangle IPS$中, $SP^2=IS-IP^2$. 在Rt$\triangle IAE$中, $IA^2=AE^2+IE^2$. 代入式①, 并由$IP=IE$, 可得

$$IS^2-IE^2=AS^2-AE^2,$$

即$IA\perp SE$. 由$IA\perp EF$, 故S, F, E三点共线.

联结PF, PN, PD'. 由F, P, D, D'四点共圆及$D'P\perp IS$, 易知

$$\angle PFN=\angle PFD=\angle PD'D=\angle D'SN=\angle PSN,$$

于是F, S, P, D四点共圆. 从而,

$$\begin{aligned}\angle ND'D&=90^\circ-\angle SD'N=90^\circ-\angle SPN\\&=\angle 90^\circ-\angle EFD=90^\circ-\angle EDC\\&=\angle D'DE,\end{aligned}$$

这表明$D'N\parallel DM$, 故$IM=IN$.

(法二) 如图3, 过点A作BC的平行线, 分别与射线DF, DE相交于点X, Y.

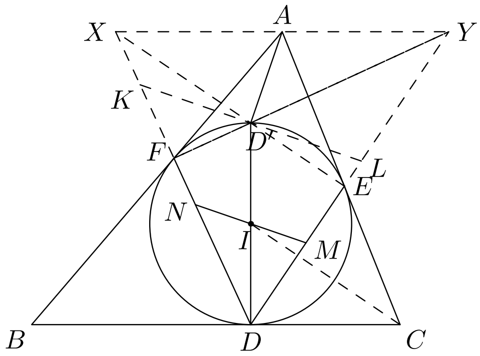

图 3

由$AX\parallel BC$, 知$\angle AXF=\angle BDF=\angle BFD=\angle AFX$, 故$AX=AF=AE$. 于是,

$$\begin{aligned}\angle AEX&=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle XAE)=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle XAF-\angle BAC)\\&=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ABC-\angle BAC)=\frac{1}{2}\angle ACB.\end{aligned}$$

联结IC. 由DD'是$\odot I$的直径, 知$\angle D'ED=90^\circ$, 又易知$IC\perp DE$, 故$D'E\parallel IC$, 则

$$\angle AED'=\angle ACI=\frac{1}{2}\angle ACB.$$

因此, $\angle AEX=\angle AED'$, 故X, D', E三点共线. 同理, Y, D', F三点共线.

又易知$AX=AF=AE=AY$, 故点X, F, E, Y都在以A为圆心的圆上, 过点D'作AD'的垂线, 与直线DF, DE分别相交于点K, L, 根据蝴蝶定理, 知$D'K=D'L$. 又$KL\parallel MN$, 故$IM=IN$.

二. (本题满分40分)

已知$\lambda_i\in\mathbf{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 试求方程

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i+\lambda_i)^2}{x_{i+1}}=4\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

(其中$x_{n+1}=x_1$) 的所有正实数解$x_1,x_2,\cdots,x_n$. (萧振纲　供题)

解答 由柯西不等式和均值不等式, 得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i+\lambda_i)^2}{x_{i+1}}\geqslant\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}=\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}+2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

$$\geqslant 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}}+2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=4\sum_{i=1}^{n}\lambda_i.$$

等号成立当且仅当$\frac{x_1+\lambda_1}{x_2}=\frac{x_2+\lambda_2}{x_3}=\cdots=\frac{x_{n-1}+\lambda_{n-1}}{x_n}=\frac{x_n+\lambda_n}{x_1}$, 且$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$.

由等比定理, 得$x_i+\lambda_i=2x_{i+1}$, 即$2x_{i+1}-x_i=\lambda_i$, 因而$2^ix_{i+1}-2^{i-1}x_i=2^{i-1}\lambda_i$, $i=1,2,\cdots,n$. 求和, 得$(2^n-1)x_1=\sum\limits_{i=1}^{n}2^{i-1}\lambda_i$, 所以

$$x_1=\frac{1}{2^n-1}\sum_{i=1}^{n}2^{i-1}\lambda_i.$$

由循环性, 得$x_k=\frac{1}{2^n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}2^{i-1}\lambda_{k-1+i}$, $k=1,2,\cdots,n$. 其中$\lambda_{n+k}=\lambda_k$.

三. (本题满分50分)

对给定的正整数n, 试求所有的正整数k, 使得2^n可以表示成k个(包括1个) 连续整数的立方和.

(冯跃峰　供题)

解答 本题的结论是: 当n为3的倍数时, $k=1$, $2^{\frac{n+3}{3}}$; 当n不是3的倍数时, k不存在.

设

$$2^n=(i+1)^3+(i+2)^3+\cdots+(i+k)^3. \quad ①$$

若$i\geqslant 0$, 则令$S_t=1^3+2^3+\cdots+t^3$ ($t\in\mathbf{N}$, 并规定$S_0=0$) , 则式①变为$2^n=S_{i+k}-S_i$, 其中$0\leqslant i<i+k$.

若$i<0$, 则令$i=-r$ ($r>0$) , 则式①变为

$$2^n=(-r+1)^3+(-r+2)^3+\cdots+(-r+k)^3.$$

注意到$2^n>0$, 上式右边的正项多于负项, 从而上式可变为

$$\begin{aligned}2^n&=(1-r)^3+(2-r)^3+\cdots+0^3+1^3+\cdots+(r-2)^3+(r-1)^3+r^3+(r+1)^3+\cdots+(-r+k)^3\\&=S_{-r+k}-S_{r-1}=S_{i+k}-S_{-i-1},\end{aligned}$$

其中$0\leqslant -i-1<i+k$.

由此可见, 如果$2n$可以表示成k个(包括1个) 连续整数的立方和, 则一定存在整数i, j ($0\leqslant i<j$) , 使$2^n=S_j-S_i$, 其中$S_t=1^3+2^3+\cdots+t^3=\left(\frac{t(t+1)}{2}\right)^2$ ($t\in\mathbf{N}$, 并规定$S_0=0$) . 于是

$$2^n=S_j-S_i=\left(\frac{j(j+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{i(i+1)}{2}\right)^2,$$

所以

$$
\begin{aligned}
2^{n+2} &= [j(j+1)]^2 - [i(i+1)]^2 = (j^2+j+i^2+i)(j^2+j-i^2+i) \\
&= (j^2+j+i^2+i)(j-i)(j+i+1).
\end{aligned}
$$

因为$(j-i)+(j+i+1)=2j+1$为奇数, 所以$j-i$, $j+i+1$中必有一个为正奇数, 但2^n只有唯一的正奇因子1, 而$j+i+1 \geqslant j+1 > 1$, 所以$j-i=1$, 即$j=i+1$. 所以$2^n = S_{i+1}-S_i = (i+1)^3$.

(1) 当n是3的倍数时, 由式②得$i+1 = 2^{\frac{n}{3}}$, 此时

$$
2^n = (i+1)^3 = (2^{\frac{n}{2}})^3 = (2^{\frac{n}{3}})^3 + (2^{\frac{n}{3}}-1)^3 + \cdots + 0^3 + 1^3 + \cdots + (1-2^{\frac{n}{3}})^3,
$$

所以, $k=1$, $2\times 2^{\frac{n}{3}}$满足条件.

(2) 当n不是3的倍数时，2^n不是立方数, 与式②矛盾, 此时k不存在.

综上所述, 当n为3的倍数时, $k=1$, $2^{\frac{n+3}{3}}$; 当n不是3的倍数时, k不存在.

四. (本题满分50分)

将正n $(n \geqslant 3)$ 边形的每条边和对角线都染为m种颜色之一, 使得每个顶点所连出的$n-1$条线段(边或对角线) 的颜色两两不同, 试求正整数m的最小可能值. (李 伟 供题)

解答 本题的结论是: 当n为奇数时, m的最小可能值为n; 当n为偶数时, m的最小可能值为$n-1$.

将正n边形的n个顶点记为$1, 2, \cdots, n$, 将以a, b为端点的线段记为$\{a, b\}$.

当n为奇数时, 设$n=2k-1$ $(k \geqslant 2)$, 此时共有$\mathrm{C}_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2} = (k-1)(2k-1)$条线段, 而每种颜色至多染$k-1$条线段(否则, 若某种颜色至少染$k$条线段, 而每条线段联结两个顶点, 为确保每个顶点连出的所有线段不同色, 则至少需要$2k$个顶点, 矛盾) , 因此$m \geqslant 2k-1$.

另一方面, 如下的染色方案符合要求(其中, A_i $(1 \leqslant i \leqslant 2k-1)$ 表示染为颜色i的线段的集合) :

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \left\{\{1,n\},\{2,n-2\},\cdots,\left\{\left[\frac{n-1}{2}\right],\left[\frac{n-1}{2}\right]+1\right\}\right\}, \\
A_n &= \left\{\{n,2\},\{n-1,3\},\cdots,\left\{\left[\frac{n+1}{2}\right]+1,\left[\frac{n+1}{2}\right]\right\}\right\}; \\
A_i &= \left\{\{1,n-1\},\{2,n-1-i\},\cdots,\left\{\left[\frac{n-i}{2}\right],\left[\frac{n-i}{2}\right]+1\right\},\left\{n-\left[\frac{i}{2}\right],n+1-\left[\frac{i}{2}\right]\right\},\right. \\
&\qquad \left.\left\{n-\left[\frac{i}{2}\right]-1,n+2-\left[\frac{i}{2}\right]\right\},\cdots,\{n-i+2,n-1\},\{n-i+1,n\}\right\}, \\
A_{n+1-i} &= \left\{\{n,i+1\},\{n-1,i+2\},\cdots,\left\{\left[\frac{n+i}{2}\right]+1,\left[\frac{n+i}{2}\right]\right\},\{i,1\},\right. \\
&\qquad \left.\{i-1,2\},\cdots,\left\{\left[\frac{i}{2}\right]+1,\left[\frac{i}{2}\right]\right\}\right\} (i=2,3,\cdots,k-1); \\
A_k &= \left\{\{1,n\},\{2,n-1\},\cdots,\left\{\left[\frac{n}{2}\right],\left[\frac{n}{2}\right]+1\right\}\right\}.
\end{aligned}
$$

因此, 当n为奇数时, m的最小可能值为n.

当n为偶数时, 设$n=2k$ $(k \geqslant 2)$, 此时共有$\mathrm{C}_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2} = k(2k-1)$条线段, 而每种颜色至多染$k$条线段(否则, 若某种颜色至少染$k+1$条线段, 而每条线段联结两个顶点, 为确保每个顶点连出的所有线段不同色, 则至少需要$2k+2$个顶点, 矛盾) , 因此$m \geqslant 2k-1$.

我们在$n=2k-1$的基础上构造此时满足条件的染色方案(其中, A'_i $(1 \leqslant i \leqslant 2k-1)$ 表示染为颜色i的线段的集合) .

因为A_i $(1 \leqslant i \leqslant 2k-1)$ 中一共出现$2k-2$个不同的顶点, 而当$n=2k-1$时共有$2k-1$个顶点, 所以一定存在某个$p_i \in \{1, 2, \cdots, 2k-1\}$没有出现在$A_i$中, 并且当$i \neq j$时, $p_i \neq p_j$. 从而只要令$A'_i = A_i \cup \{\{p_i, 2k\}\}$即可.

综上所述, 当n为奇数时, m的最小可能值为n; 当n为偶数时, m的最小可能值为$n-1$.