# 2014年第二届“学数学” 数学奥林匹克邀请赛

# (春季赛)

2014年4月13日　　8:00–12:00

**1.** 已知实数$\alpha$, $\beta$, $\gamma$满足$\alpha+\beta+\gamma=\pi$, 并且

$$\tan\frac{\beta+\gamma-\alpha}{4}+\tan\frac{\gamma+\alpha-\beta}{4}+\tan\frac{\alpha+\beta-\gamma}{4}=1.$$

证明: $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1$.

**2.** 如图1, 在$\triangle ABC$中($AB\neq AC$), $AT$是$\angle BAC$的平分线, $M$是边$BC$的中点, $H$是垂心, $HM$与$AT$相交于点$D$. 过点$D$, 作$DE\perp AB$, $DF\perp AC$, 垂足分别为点$E$, $F$.

求证: $E$, $H$, $F$三点共线.

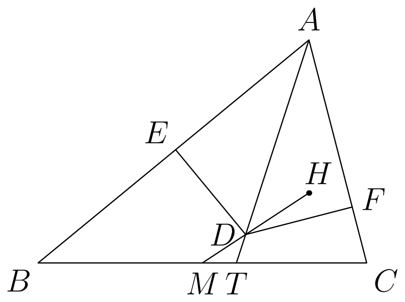


图 1

**3.** 开始时黑板上写着数$1,2,3,\cdots,2013$, 每步可以擦去黑板上的两个数$a$, $b$, 另写上$a+b$. 最少要进行多少步操作才能使黑板上任意多个数之和都不等于2014?

**4.** 证明: 在$n$ ($n\geqslant 3$) 个互不相同的正整数中, 一定能选出两个数, 这两个数的和不整除这$n$个已知数中任一个的3倍.

**5.** 证明: 对于区间$(0,1)$上的任意无理数$x$及正整数$n$, 都存在正整数$p_1,p_2,\cdots,p_n$, 其中$p_1<p_2<\cdots<p_n$, 使得

$$0<x-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}<\frac{1}{n!(n!+1)}.$$

**6.** 求所有的正整数对$(m,n)$, 使得

$$n^n+n=m!.$$