

2014年第二届“学数学”数学奥林匹克邀请赛 (春季赛)

2014年4月13日 8:00-12:00

1. 已知实数 α, β, γ 满足 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, 并且

$$\tan \frac{\beta + \gamma - \alpha}{4} + \tan \frac{\gamma + \alpha - \beta}{4} + \tan \frac{\alpha + \beta - \gamma}{4} = 1.$$

证明: $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1$.

2. 如图1, 在 $\triangle ABC$ 中 ($AB \neq AC$), AT 是 $\angle BAC$ 的平分线, M 是边 BC 的中点, H 是垂心, HM 与 AT 相交于点 D . 过点 D , 作 $DE \perp AB$, $DF \perp AC$, 垂足分别为点 E, F .

求证: E, H, F 三点共线.

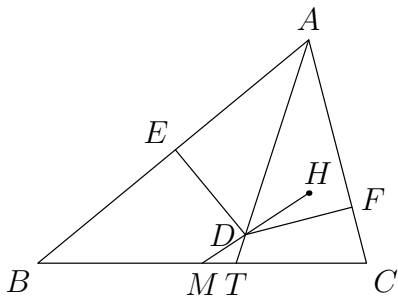


图 1

3. 开始时黑板上写着数 $1, 2, 3, \dots, 2013$, 每步可以擦去黑板上的两个数 a, b , 另写上 $a+b$. 最少要进行多少步操作才能使黑板上任意多个数之和都不等于 2014?

4. 证明: 在 n ($n \geq 3$) 个互不相同的正整数中, 一定能选出两个数, 这两个数的和不整除这 n 个已知数中任一个的 3 倍.

5. 证明: 对于区间 $(0, 1)$ 上的任意无理数 x 及正整数 n , 都存在正整数 p_1, p_2, \dots, p_n , 其中 $p_1 < p_2 < \dots < p_n$, 使得

$$0 < x - \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} < \frac{1}{n!(n! + 1)}.$$

6. 求所有的正整数对 (m, n) , 使得

$$n^n + n = m!.$$

欢迎订阅学数学杂志

《学数学》杂志是高中学生学习数学课程, 参加高考, 准备参加自主招生考试及角逐全国高中数学联赛等各级数学竞赛的得力助手. 她是高中同学研究数学的工具, 学好数学的宝典; 她是高中数学教师教学的伴侣, 竞赛辅导的参考资料.

淘宝网店 <http://xueshuxue.taobao.com>

投稿邮箱 xsx@omaths.com

订阅邮箱 fzp@omaths.com

杂志网址 <http://www.omaths.com>

2014年“学数学”全国高中数学联赛冲刺强化班(限招60人)

授课时间 2014年8月15日报到, 8月16日至8月30日授课.

报到地点 江苏省南京市.

培训师资 单增, 苏淳等《学数学》顾问及编委.

授课形式 按照一试综合, 几何, 代数, 数论, 组合五个专题进行强化训练, 每个专题三天, 前两天专家讲座, 剖析联赛重难点, 第三天上午进行联赛全真模拟, 下午和晚上进行试卷讲评及国内外最新赛题评析.

详情请登录<http://www.omaths.com>查询.



学数学编辑部官方微信平台