2010 年全国高中数学联赛模拟卷(1)第一试

（考试时间:80 分钟　满分:120 分）

学校__________姓名__________编号__________得分__________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 设实数 x,y,z,w 满足 $x+2y+3z=6$, $\sqrt{x-1}+\sqrt{2y-1}+\sqrt{3z-1}\geqslant 2+2\,010^{\sqrt{w-1}}$,则 $(x+y-3z)^{w}=$ __________.

2. 设 $a_n>0$, $a_1=2$,且当 $n\geqslant 2$ 时,有

$$a_n+a_{n-1}=\frac{n}{a_n-a_{n-1}}+2,$$

则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=$ __________.

3. 四面体 $ABCD$ 中,$\triangle ADB$ 为等腰直角三角形,$\angle ADB=90^\circ$, $AD=1$,且 $\angle BDC=\angle ADC=60^\circ$,则异面直线 AB 与 CD 的距离为__________.

4. 已知 $\sin^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)-\cos^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{4}$,且 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$. 则 $\tan x$ 的值为__________.

5. 椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 上任意两点连线的垂直平分线如果和 x 轴相交于点 $P(x_0,0)$,则 x_0 的取值范围是__________.

6. 设 $[x]$ 表示为不超过 x 的最大整数,则方程 $\left[\frac{5+6x}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}$ 的实数解为__________.

7. 已知 α,β 是方程 $ax^2+bx+c=0$ (a,b,c 是实数)的两根,且 α 是虚数,$\frac{\alpha^2}{\beta}$ 是实数,则 $\sum\limits_{k=0}^{2\,009}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k$ 的值是__________.

8. 将 6 个身高互不相同的人排成一行,对于每个人,要求他要么比相邻的人均高,要么比相邻的人均矮,则不同的排法有__________种.

二、解答题(本大题共 3 小题,第 9 题 16 分,第 10、11 题 20 分,共 56 分)

9. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$, $a>2$. 求证:最多有 2 个整数 x,使 $|f(x)|\leqslant 1$.

10. 已知双曲线 $C:y^2-x^2=1$,取定 x 轴上点 P_0,按如下方式作点列 P_n:设 l_k 是过 P_k 且斜率为 1 的直线,则 P_{k+1} 是 l_k 与 C 的交点在 x 轴上的投影,若 $P_k=0$,则序列结束.

试求使得 $P_0=P_{2\,009}$ 的 P_0 的个数.

11. 已知 a、b、$c \in \mathbf{R}^{+}$, $abc=1$. 求证:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{3}{a+b+c} \geqslant 4.$$

2010 年全国高中数学联赛模拟卷(1)加试

（考试时间:150 分钟　满分:180 分）

学校____________姓名____________编号____________得分____________

一、(本题满分 40 分)

已知锐角$\triangle ABC$,以 AC 为直径的圆分别与 AB、BC 相交于点 K 和 L,CK、AL 分别与$\triangle ABC$ 的外接圆交于另一点 F 和 D,E 为劣弧 AC 上一点,且满足 $AF^2+BD^2+CE^2=AE^2+CD^2+BF^2$. 记 $BE\cap AC=N$,求证:$\angle KNB=\angle BNL$.

二、(本题满分40分)

10×10 方格表的每个方格中均写有一个属于$\{1,2,3,\cdots,9,10\}$的数. 任意两个相邻或共顶点方格中的数互素. 求证:必有一数在表中出现不少于17次.

三、(**本题满分 50 分**)

已知常数 $c\in(0,2)$,数列$\{a_n\}$定义如下:$a_1=1, a_2=c, a_{k+2}=ca_{k+1}-a_k(k\in\mathbf{N}^*)$.

求证:当正整数 $n<\dfrac{\pi}{2\arccos\frac{c}{2}}$时,恒有 $a_n\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2n-1)^{\frac{3}{4}}$.

四、(本题满分 50 分)

求所有的正整数 n,使得存在正整数数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足:对任意 $2\leqslant k\leqslant n-1$,均有

$$a_{k+1}=\frac{a_k^2+1}{a_{k-1}+1}-1.$$

2010 年全国高中数学联赛模拟卷(2)第一试

（考试时间:80 分钟　满分:120 分）

学校______________姓名__________编号_________得分_________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 在$\triangle ABC$中,a,b,c分别是角A,B,C的对边,且知$a+c=2b$,则$\angle B$的取值范围是________________.

2. 定义在 R 上的函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x-1|}, & x\neq 1,\\ 1, & x=1\end{cases}$若方程$f^2(x)+bf(x)+c=0$有三个不同的解$x_1,x_2,x_3$,则$x_1^2+x_2^2+x_3^2=$________________.

3. 过椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上一点$P$作椭圆$C$的右准线的垂线$PH$($H$为垂足),延长$PH$到$Q$,使得$|HQ|=\lambda|PH|(\lambda\geqslant 1)$.已知点$P$在椭圆$C$上运动时,点$Q$的轨迹为一二次曲线,则其离心率的取值范围是________________.

4. 同时抛掷三枚骰子,出现正面朝上的点数之和不大于 7 的概率为________________.

5. 已知球面上四点A、B、C、D满足AB,AC,AD两两互相垂直,且$AB+AC+AD=12$,则球面面积的最小值为________________.

6. 集合$S=\{1,2,3,4,5,6,7\}$的五元子集共有 21 个,每个子集中的数从小到大排好后,取出中间的数,则这些数之和是________________.

7. 求值:$\dfrac{\sum\limits_{n=1}^{99}\left(\sqrt{10+\sqrt{n}}\right)}{\sum\limits_{n=1}^{99}\left(\sqrt{10-\sqrt{n}}\right)}=$________________.

8. 设$a,b,c,d,e\in\mathbf{R}$,且$a^2+b^2+c^2+d^2-e^2+36=0$,则函数$f=4a+3b+2c+d-6|e|$的最大值是________________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 设 $A=\{1,2,\cdots,10\}$,f 是 A 到 A 上的一一映射,记

$$f_1(x)=f(x),f_{n+1}(x)=f(f_n(x)).$$

映射 f 又满足条件:

(1)对一切 $x\in A$, $f(x)\neq x$;

(2)对一切 $x\in A$, $f_{21}(x)=x$.

试问:满足上述条件的映射 f 有多少个?

10. 已知过点 $A(0,1)$ 的直线 l 与抛物线 $C:y^2=4x$ 交于两个不同的点 M 和 N，抛物线 C 在点 M,N 处的切线的交点为 P，求点 P 的轨迹.

11. 已知关于 x 的方程

$$\lg(4x^2-(8a-1)x+5a^2)+x^2+(1-2a)x+2a^2=\lg(x^2-2(a+1)x-a^2)$$

恰有一个实数根,求实参数 a 的所有可能值.

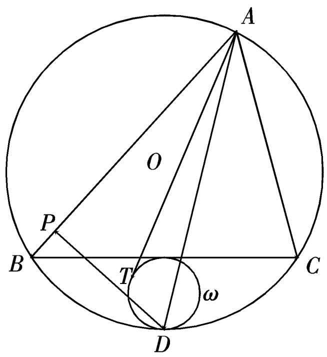
2010 年全国高中数学联赛模拟卷(2)加试

（考试时间:150 分钟　满分:180 分）

学校______________姓名__________编号________得分________

一、(本题满分 40 分)

如图,已知$\triangle ABC$的外心为O,D为劣弧$\overset{\frown}{BC}$的中点,圆ω与圆O相切于点D,且与BC相切,过A作ω的切线,切点为T,在AB上取一点P,使得$AP=AT$.求证:$DP\perp AB$.



第一题图

二、(本题满分40分)

设 $x_i \geqslant 0, i=1,2,\cdots,n$，约定 $x_{n+1}=x_1$，证明：

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{(x_k+1)^2}+\frac{x_{k+1}^2}{(x_{k+1}+1)^2}} \geqslant \frac{n}{\sqrt{2}}.$$

三、(**本题满分 50 分**)

证明:对任意的 $n\in\mathbf{N}$,$n\geqslant 2$,都存在 n 个互不相等的自然数组成的集合 M,使得对任意的 $a\in M$ 和 $b\in M$,$|a-b|$ 整除 $a+b$.

四、(本题满分 50 分)

将正九边形的 5 个顶点涂上红色,问最少存在多少对全等三角形,它们的顶点都是红点?

2010年全国高中数学联赛模拟卷(3)第一试

（考试时间:80分钟 满分:120分）

学校______________ 姓名__________ 编号________ 得分________

一、填空题(本大题共8小题,每小题8分,共64分)

1. 已知 $a>b>c$,$a+b+c=0$,设 x_1,x_2 是 $ax^2+bx+c=0$ 的两实根,则 $|x_2^2-x_1^2|$ 的取值范围是__________.

2. 已知正四棱锥中 $S-ABCD$ 的侧面与底面所成角为 $\frac{\pi}{3}$,则它的外接球半径 R 与内切球半径 r 的比为__________.

3. 已知正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2+a_i}=\frac{1}{2}$,则 $\prod_{i=1}^{n}a_i$ 的最小值为__________.

4. 十二个互不相同的正整数之和为2010,则这些正整数的最大公约数的最大值是__________.

5. 在平面直角坐标系中,若方程 $m(x^2+y^2+2y+1)=(x-2y+3)^2$ 表示椭圆,则 m 的取值范围是__________.

6. 已知 O 为坐标原点,向量 $\overrightarrow{OZ_1}$,$\overrightarrow{OZ_2}$ 分别对应的复数 z_1,z_2,且

$$z_1=\frac{3}{a+5}+(10-a^2)i,z_2=\frac{2}{1-a}+(2a-5)i(a\in\mathbf{R}),$$

若 $\overline{z_1}+z_2$ 是实数. 则以 $\overrightarrow{OZ_1}$,$\overrightarrow{OZ_2}$ 为邻边的平行四边形的面积是__________.

7. 已知 $\sin x+\sin y=\log_7 2$,$\cos x+\cos y=\log_7 4$,则 $\cos 2(x+y)$ 的值是__________.

8. 设集合 $I=\{1,2,3,\cdots,2\,010\}$,选择 I 的两个非空子集 A 和 B,使 B 中最小的数大于 A 中最大的数. 则不同的选择方法种数为__________.

二、解答题(本大题共 3 小题,第 9 题 16 分,第 10、11 题 20 分,共 56 分)

9. 已知整数 $a\neq0$,实数 x 满足 $[x]=a$,且 $x+\frac{99}{x}=a+\frac{99}{a}$,试求所有不等于 a 的 x.

10. 已知圆的方程 $x^2+y^2=4$. 在坐标平面上求两点 $A(s,t)$,$B(m,n)$,同时满足下列两条件:
(1)圆上任意一点到 A 点的距离与到 B 点的距离之比为定值 k;
(2)$s>m,t>n$,且 m,n 均为自然数.

11. 设有无穷数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$. 对任何自然数 m 和 n,满足不等式

$$\left| a_{m+n} - a_m - a_n \right| < \frac{1}{m+n}.$$

证明:这个数列是等差数列.

2010 年全国高中数学联赛模拟卷(3)加试

（考试时间:150 分钟　满分:180 分）

学校______________　姓名__________　编号________　得分________

一、(本题满分 40 分)

设$\triangle ABC$的外接圆为Γ,圆心为O的圆与线段BC相切于点P,与不含点A的弧$\overset{\frown}{BC}$切于点Q.若$\angle BAO = \angle CAO$,证明:$\angle PAO = \angle QAO$.

二、(**本题满分 40 分**)

已知数列$\{a_n\}$满足:$a_1=2,a_2=1,a_{n+2}=\dfrac{n(n+1)a_{n+1}+n^2a_n+5}{n+2}-2\ (n\in\mathbf{N})$. 求使得 a_n 为整数的所有 n.

三、(**本题满分 50 分**)

对正整数 x,y,设 $f(x,y)=\frac{x^2+y^2+2}{xy}$. 证明:

(1) $f(x,y)$ 只能取有限多个不同的整数值;

(2) 有无穷多对 (x,y),使 $f(x,y)$ 取整数值.

四、(本题满分 50 分)

已知集合 $S_n=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ 和 $S_m=\{0,1,2,3,\cdots,m-1\}$，$P(S_n)$ 表示以 S_n 的全体子集(包括空集 $\varnothing$)为元素的集合，映射 $f:P(S_n)\to S_m$ 具有下列性质：对于 $P(S_n)$ 中的任意两个元素 X_1 和 X_2，都有

$$f(X_1\cup X_2)+f(X_1\cap X_2)=f(X_1)+f(X_2).$$

试求：(1) 当 $f(\varnothing)=0$ 时，所有这样的映射 f 的个数；

(2) 当 $f(\varnothing)=1$ 时，所有这样的映射 f 的个数.

2010 年全国高中数学联赛模拟卷(4)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校________________姓名____________编号__________得分__________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 已知 $2^{\frac{1}{x}} > x^a$ 对任意 $x \in (0,1)$ 成立,则实数 a 的取值范围是____________.

2. 平面直角坐标系内有 $\triangle ABC$,顶点坐标为 $A(3,0)$,$B(0,2)$,$C(0,-1)$,两平行直线 $x=t$,$x=\frac{t}{2}(0<t\leqslant 3)$ 之间与 $\triangle ABC$ 公共部分的面积记为 $S(t)$,则当 t 变化时,$S(t)$ 的最大值是____________.

3. 设 $n(n<150)$ 是正整数,且 n^3+23 能被 24 整除,则这样的 n 有____________个.

4. 在等腰梯形 $ABCD$ 中,$AB /\!/ CD$,且 $AB>CD$. 设以 A、B 为焦点且过点 D 的双曲线的离心率为 e_1,以 C、D 为焦点且过点 A 的椭圆的离心率为 e_2,则 $e_1e_2=$____________.

5. 数列 $\{a_n\}$ 定义如下:$a_1=1$,

$$3(a_1+a_2+\cdots+a_n)=(n+2)a_n,(n=2,3,\cdots).$$

则 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=$____________.

6. 圆锥的轴截面 SAB 是边长为 2 的等边三角形,O 为底面中心,M 为 SO 的中点,动点 P 在圆锥底面内(包括圆周). 若 $AM \perp MP$,则 P 点形成的轨迹的长度为____________.

7. 平面直角坐标系中,A、B 为两个与原点 O 不重合的点,AB 中点为 M,若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{x}$,$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{y}$,点 B 关于 $\overrightarrow{OA}$ 所在直线的对称点为 B_1,则 $\overrightarrow{OB_1}$ 为____________.(用 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 表示).

8. 平面上有 11 个点,每两点连成一条直线,共得 48 条直线,则这 11 个点可构成不同的三角形的个数是____________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 已知数列$\{a_n\}$满足

$$a_1=a_2=7, a_{n-1}a_{n+1}=a_n^2+2\,009(n\geqslant 2).$$

试求$\left[\frac{a_{2\,010}^2+a_{2\,009}^2}{a_{2\,010}a_{2\,009}}\right]$的值(其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数.

10. 已知关于 x 的方程 $x^3-4x^2+5x+a=0(a\in\mathbf{R})$ 有三个实数根.

(1)求 a 的取值范围;

(2)设方程三根为 x_1,x_2,x_3,求 $T=\max\{x_1,x_2,x_3\}$ 的最大值.

11. 设 AB 是过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$右焦点 F 的一条焦点弦,P 是椭圆上异于 A、B 的任一点,直线 PA,PB 分别交椭圆的右准线 l 于 M、N 两点.

求证:M、N 两点的纵坐标之积为定值,并求该定值.

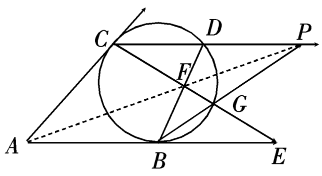
2010 年全国高中数学联赛模拟卷(4)加试

（考试时间:150 分钟　满分:180 分）

学校____________姓名__________编号________得分________

一、(本题满分 40 分)

如图,⊙O 切 AB、AC 于点 B、C,过 C 的割线 $CD /\!/ AB$ 交⊙于点 D,E 是 AB 延长线上一点,直线 CE 分别交 BD 和⊙O 于点 F、G. 延长 BG 与 CD 的延长线相交于点 P,求证:A、F、P 三点共直线.



第一题图

二、(本题满分 40 分)

证明:任给 15 个互不相同的两位数中,总可以找到 4 个互不相同的数 a,b,c,d,使得

$$a+b=c+d.$$

三、(**本题满分 50 分**)

实系数多项式 $P(x)=rx^3+qx^2+px+1\ (r>0)$ 满足 $P(x)=0$ 恰有一个实根,数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_0=1, a_1=-p, a_2=p^2-q, a_{n+3}=-pa_{n+2}-qa_{n+1}-ra_n.$$

证明:$\{a_n\}$ 中包含无穷多个负实数.

四、(本题满分 50 分)

设 n 为正整数,$n\geqslant 2$,$a,b\in\{1,2,\cdots,n\}$,且 $n\mid(ab-1)$.

(1)证明:$|a-b|\leqslant[n-2\sqrt{n-1}]$;

(2)求所有的正整数 n,使得存在使得(1)中等号成立的 a,b.

2010 年全国高中数学联赛模拟卷(5)第一试

(考试时间:80 分钟 满分:120 分)

学校____________姓名__________编号__________得分__________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 已知 $f_1=f(x)=1-|x|$,$f_n(x)=1-|f_{n-1}(x)|$ $n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$,则 $f_{2\,009}(2\,010)$ 的值为________.

2. 已知 F_1,F_2 是双曲线 $x^2-y^2=1$ 的两个焦点,M 是该双曲线右支上的点,O 为坐标原点. 若 $\dfrac{|MF_1|+|MF_2|}{|MO|}=\sqrt{6}$,则点 M 的坐标为________.

3. 若关于 x 的复系数方程 $(4+3\mathrm{i})x^2+mx+4-3\mathrm{i}=0$ 有实根,则复数 m 的模的最小值为________.

4. 函数 $y=\arccos\left(\dfrac{\sqrt{12+4x-x^2}-2}{4}\right)$ 的定义域是________,值域是________.

5. P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点,满足 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{AB}$. 若 $S_{\triangle ABC}=6$,则 $\triangle PAB$ 的面积等于________.

6. 已知一圆锥及其内切球的表面积之比为 λ,则 λ 的取值范围为________.

7. 已知由 $1,2,\cdots,1\,000$ 这 $1\,000$ 个正整数构成的集合 A,先从集合 A 中随机取一个数 a,取出后把 a 放回集合 A;然后再从集合 A 中随机取一个数 b,求 $\dfrac{a}{b}>\dfrac{1}{3}$ 的概率为________.

8. 将编号为 1 到 2 010 的 2 010 个小球按照编号,从小到大顺时针排列在一个圆周上,然后从 1 号开始顺时针一个隔一个取小球,直至所有的小球全部取完. 则最后取到的小球的编号为________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 设$x,y>0$,且$x+y=6$,求证:$\sqrt[3]{\dfrac{x}{1+y}}+\sqrt[3]{\dfrac{y}{1+x}}\leqslant 2$.

10. 已知 F_1、F_2 为椭圆 C 的两焦点，P 为 C 上任一点，焦点 $\triangle F_1PF_2$ 的外接圆和内切圆的半径分别为 R，r. 若 $|PF_1|\cdot|PF_2|=6Rr$ 总是成立的，问：这样的椭圆是否存在？若存在，求该椭圆的离心率，若不存在，请说明理由.

11. $f(x)$为定义在实数集$\mathbf{R}$上的实值函数且满足:对任何实数x_1,x_2,当$|x_1-x_2|\leqslant 1$时有

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant 1,\text{及}f(0)=1.$$

证明:$-|x|\leqslant f(x)\leqslant |x|+2$.

2010 年全国高中数学联赛模拟卷(5)加试

(考试时间:150 分钟 满分:180 分)

学校____________________姓名_____________编号___________得分___________

一、(本题满分 40 分)

已知 H 为锐角 $\triangle ABC$ 的垂心,且满足

$$AH^2+BH^2+CH^2=7,AH\cdot BH\cdot CH=3.$$

(1)求 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 R;

(2)求 $\triangle ABC$ 的面积 S 的最大值.

二、(本题满分40分)

求所有的正整数对(x,y),满足

$$3^m - 7^n = 2.$$

三、(本题满分 50 分)

三个学校的合唱团举行对抗赛,对于任意两个不在同一合唱团的学生,在另一个合唱团中恰有 n 人都认识他们,也恰有 n 人都不认识他们.

问:三个合唱团的总人数能否在区间(2 000,2 010)中?请说明理由.

四、(本题满分 50 分)

函数 $f:\mathbf{N}\times\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ 满足以下三个条件:

(a) $f(0,0)=1, f(0,1)=1$;

(b) 对任意 $k\neq 0,1, f(0,k)=0$;

(c) 对 $n\geqslant 1$ 和任意的 $k, f(n,k)=f(n-1,k)+f(n-1,k-2n)$.

求和 $\sum\limits_{k=0}^{C_{2\,009}^{2}} f(2\,008,k)$.

2010 年全国高中数学联赛模拟卷(6)第一试

（考试时间:80 分钟 满分:120 分）

学校____________________姓名______________编号____________得分____________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 已知函数$f(x)=\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)\cos x+b\sin x+6$($a,b$ 为常数且 $a>1$),

若$f(\lg(\log_8 1\ 000))=8$,则$f(\lg(\lg 2))=$________________.

2. 不等式 $3x+4\sqrt{xy}\leqslant 4a(x+y)$对于一切正数 x,y 恒成立,则实数 a 的最小值为________.

3. 一个班级有 $n(n<30)$个学生,已知任选一个女生是优等生的概率为$\frac{3}{13}$,任选一个男生是优等生的概率为$\frac{4}{11}$,则任选一个学生是优等生的概率为________________.

4. 在$\triangle ABC$ 中,$\cos\frac{C}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$H$ 为 BC 边上一点,且$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=0$,则过点 C,以 A、H 为两焦点的双曲线的离心率为________________.

5. 已知方程 $x^3-7x^2+1=0$ 的最大实根为 t,则$[t^{2009}]$被 7 除的余数为______________.

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

6. 设$(x^2+2x-2)^6=a_0+a_1(x+2)+a_2(x+2)^2+\cdots+a_{12}(x+2)^{12}$,其中 $a_i(i=0,1,\cdots,12)$为实常数,则 $a_0+a_1+2a_2+\cdots+12a_{12}=$________________.

7. 已知四棱锥 $S-ABCD$ 的顶点 S 在底面的射影恰好是底面四边形两对角线的交点 O,若 $SO=t$,$V_{S-ADO}=m^2$,$V_{S-OBC}=n^2$,则 V_{S-ABCD}的最小值为______________.

8. 一个五位数$\overline{abcde}$满足 $a<b$,$b>c>d$,$d<e$ 且 $a>d$,$b>e$(如 37 201,45 412 等),则称$\overline{abcde}$为“好数”,则“好数”共有______________个.

二、解答题(本大题共 3 小题,第 9 题 16 分,第 10、11 题 20 分,共 56 分)

9. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}mx^2-2x+1+\ln(x+1)\ (m\geqslant 1)$.

(1)若曲线 $C:y=f(x)$ 在点 $P(0,1)$ 处的切线 l 与 C 有且只有一个公共点,求 m 的值;

(2)求证:函数 $f(x)$ 存在单调递减区间 $[a,b]$,并求出单调递减区间的长度 $t=b-a$ 的取值范围.

10. (1)已知 $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$,求证:$x_1^2+x_2^2+x_3^2 \geqslant \sqrt{2}\,(x_1x_2+x_2x_3)$,并说明等号成立的条件;

(2)已知实数 a 使得对于任意实数 x_1、x_2、x_3、x_4,不等式

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \geqslant a(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4)$$

都成立,求 a 的最大值.

11. 已知直线 $y=x$ 与椭圆 $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{11}=1$ 交于 A,B 两点,过椭圆 C 的右焦点 F、倾斜角为 α 的直线 l 交弦 AB 于点 P,交椭圆 C 于点 M,N.

(1)用 α 表示四边形 $MANB$ 的面积;

(2)求四边形 $MANB$ 的面积取到最大值时直线 l 的方程.

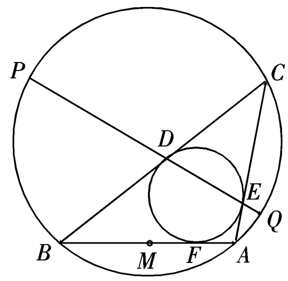
2010 年全国高中数学联赛模拟卷(6)加试

（考试时间:150 分钟　满分:180 分）

学校__________姓名__________编号__________得分__________

一、(本题满分 40 分)

如图,已知$\triangle ABC$的内切圆分别切三边BC、CA、AB于点D、E、F,直线DE交$\triangle ABC$的外接圆ω于点P、Q,M为线段AB的中点,求证:P,Q,F,M四点共圆.



加试第一题图

二、(本题满分40分)

求证:存在唯一的正整数数列 $a_1,a_2,\cdots$,使得 $a_1=1,a_2>1$,且对任意 $n=1,2,\cdots$,满足

$$a_{n+1}(a_{n+1}-1)=\frac{a_na_{n+2}}{\sqrt[3]{a_na_{n+2}-1}+1}-1.$$

三、(**本题满分 50 分**)

一次足球邀请赛共安排了 n 支球队参加,每支球队预定的比赛场数分别是 $m_1,m_2,\cdots,m_n$,如果任两支球队之间至多安排了一场比赛,则称 $(m_1,m_2,\cdots,m_n)$ 是一个有效安排.

证明:如果 $(m_1,m_2,\cdots,m_n)$ 是一个有效安排,且 $m_1\geqslant m_2\geqslant\cdots\geqslant m_n$,则可取掉一支球队,并重新调整各队之间的对局情况,使得 $(m_2-1,m_3-1,\cdots,m_{m_1+1}-1,m_{m_1+2},\cdots,m_n)$ 也是一个有效安排.

四、(本题满分 50 分)

求所有的素数 p,使得$\dfrac{2^{p^3+11}-1}{p}$为整数.

2010年全国高中数学联赛模拟卷(7)第一试

（考试时间:80分钟 满分:120分）

学校____________姓名__________编号________得分________

一、填空题(本大题共8小题,每小题8分,共64分)

1. 正八边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 的边长为1,任取两点 A_i、A_j,则 $\overrightarrow{A_iA_j}\cdot\overrightarrow{A_1A_2}$ 的最大值为__________.

2. 不等式 $\log_6(1+\sqrt{x})>\log_{25}x$ 的整数解集是__________.

3. 设点 O 为坐标原点,设过椭圆的一个焦点 $F(1,0)$ 的直线 l 交椭圆于 A,B 两点,若直线 l 绕点 F 任意转动,恒有 $|OA|^2+|OB|^2<|AB|^2$,则该椭圆离心率的取值范围为__________.

4. 设 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$,从数列 $\{a_n\}$ 中,去掉所有能被3整除的数后,剩下的项自小到大排成数列 $\{b_n\}$,则 $b_{200}=$__________.

5. 四棱锥 P—$ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是凸四边形,AC,BD 相交于 O,若 $\triangle AOB$ 的面积为36,$\triangle COD$ 的面积为64,四棱锥的高为9,则这样的四棱锥的体积最小值是__________.

6. 设 $f(x)$ 为定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数,且满足

$$f\left(1-\frac{1}{x^2-2\,008}\right)+f\left(1+\frac{1}{x^2-2\,009}\right)\lg(x^2-2\,008)=f\left(1+\frac{1}{x^2-2\,009}\right)\lg(x^2-2\,009)+2\,010,$$

则 $f(10)=$__________.

7. 点集 $A=\{(x,y)\mid\sin(3x+5y)>0,且\ x^2+y^2\leqslant\pi^2\}$ 所构成的平面图形的面积是__________.

8. 使得方程组 $\begin{cases}ax+by=1,\\x^2+y^2=50\end{cases}$ 至少有一解,且所有的解都是整数解的有序实数对 (a,b) 的个数有__________个.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 已知方程 $x^2-ax+b=0$ 的两个不等实根 x_1、x_2 满足

$$\frac{1}{3}x_1^3+\frac{1}{3}x_2^3-x_1^2-x_2^2+2x_1+2x_2+\frac{1}{3}x_1^3x_2^3=672(a+b)\neq 0.$$

求 $a^2+b^2-ab-3a$ 的值.

10. 在双曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 中，F_1，F_2 分别为双曲线 C 的左右两个焦点，P 为双曲线上一点，且 P 在第一象限内，$\triangle PF_1F_2$ 的重心为 G，内心为 I.

(1)已知 A 为双曲线 C 的左顶点，直线 l 过右焦点 F_2 与双曲线 C 交于 M，N 两点，若 AM，AN 的斜率 k_1，k_2 满足 $k_1+k_2=-\dfrac{1}{2}$，求直线 l 的方程；

(2)是否存在一点 P，使得 $IG /\!/ F_1F_2$.

11. 设$\{a_n\}$为一整数数列,其中 a_2 为奇数. 对任意自然数 n,均有

$$n(a_{n+1}-a_n+3)=a_{n+1}+a_n+3.$$

另外,$a_{2\,009}$可被 2 010 整除. 求最小的整数 $n\geqslant 2$,使得 a_n 可被 2 010 整除.

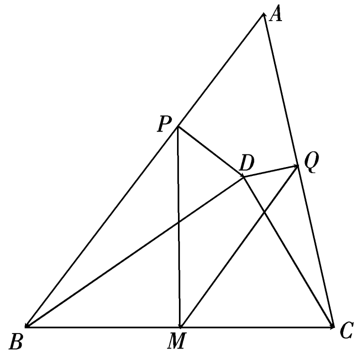
2010 年全国高中数学联赛模拟卷(7)加试

（考试时间:150 分钟　满分:180 分）

学校＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿编号＿＿＿＿＿得分＿＿＿＿＿

一、(本题满分 40 分)

如图,在锐角三角形$\triangle ABC$中,M为BC边中点,分别在边AB,AC上取点P,Q,使得$MP=MQ$,过P作AB的垂线l_1,过Q作AC的垂线l_2,若$l_1\cap l_2=D$,求证:$\angle PBD=\angle QCD$.



第一题图

二、(本题满分40分)

给定整数 $n\geqslant 2$,已知正整数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足

$$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n,\text{且 } x_1+x_2+\cdots+x_n=x_1x_2\cdots x_n.$$

求 $x_1+x_2+\cdots+x_n$ 的最大可能值.

三、(**本题满分 50 分**)

两名选手在一个棋盘上做游戏,该棋盘有 $m+1$ 条水平线,m 条垂直线,共 $m(m+1)$ 个交点. 在其中一个交点处放一粒石子,两名选手交替将这粒石子沿着边移到相邻的交点处,但不允许他们再走任何一方之前已经走过的边. 如果一名选手不能再移动石子,则失败. 证明:对于走先手的那名选手,若最初将石子放在了最下面的水平线上,则他有一种必胜的策略.

四、(本题满分 50 分)

设正整数 $k(k\geqslant 2)$,n_1、n_2、n_3 是正整数,a_1、a_2、a_3 是大于或等于 1 且小于或等于 $k-1$ 的整数,$b_i=a_i\sum\limits_{j=0}^{n_i}k^j\ (i=1,2,3)$. 若 $b_1b_2=b_3$,求所有可能的三元数组 (n_1,n_2,n_3).

2010 年全国高中数学联赛模拟卷(8)第一试

（考试时间:80 分钟　满分:120 分）

学校________________姓名____________编号__________得分__________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 已知$\triangle ABC$的三内角的正切值均为整数,且成等差数列,则该三角形的最小内角为________________.

2. 曲线$y=||x|-1|$与直线$y=2$所围成的图形面积为____________.

3. 设$f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$,又记$f_1(x)=f(x)$,

$$f_{k+1}(x)=f(f_k(x)),k=1,2,\cdots,$$

则$f_{2010}(x)=$____________.

4. 已知P为等轴双曲线$x^2-y^2=a^2(a>0)$上的点,F_1,F_2分别是它的左焦点和右焦点,则$\dfrac{|PF_1|+|PF_2|}{|PO|}$的取值范围为____________.

5. 九个连续正整数自小到大排成一个数列 ,若$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$为一平方数,$a_2+a_4+a_6+a_8$为一立方数,则这九个正整数之和的最小值是__________.

6. 已知正整数$x_1,x_2,\cdots,x_9$满足$x_1<x_2<\cdots<x_9$,且$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_9^2\leqslant 675$,则$x_7-x_4$的最大值为____________.

7. 已知半球O的半径为R,它的内接长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的一个面$ABCD$在半球O的底面上,则该长方体的所有棱长之和的最大值为____________.

8. 将一个三位数的三个数字顺序颠倒,将所得到的数与原数相加,若和中没有一个数字是偶数,则称这个数为“奇和数”. 那么,所有的三位数中,“奇和数”有__________个.

二、解答题(本大题共 3 小题,第 9 题 16 分,第 10、11 题 20 分,共 56 分)

9. 已知$\triangle ABC$的三边a,b,c满足$b^2+c^2=5a^2$,试求$\dfrac{\sin A}{\sin B\sin C}$的最小值.

10. 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的焦点在$x$轴上，过椭圆的右焦点$F(c,0)$作两相互垂直的弦$AC$和$BD$. 若四边形$ABCD$的面积的取值范围是$\left[8,\frac{25}{2}\right]$，求椭圆的方程.

11. 给定数列$\{a_n\}$和函数$f(x)$满足:

(1)$a_1=\frac{1}{5}$,且当$n\geqslant 2$时,$\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{2na_{n-1}+1}{1-2a_n}$;

(2)$f(x)$的定义域为$(-1,1)$,且对任意$x,y\in(-1,1)$都有$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$;

(3)当$x\in(-1,0)$时,有$f(x)>0$.

证明:$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)>f\left(\frac{1}{2}\right)$.

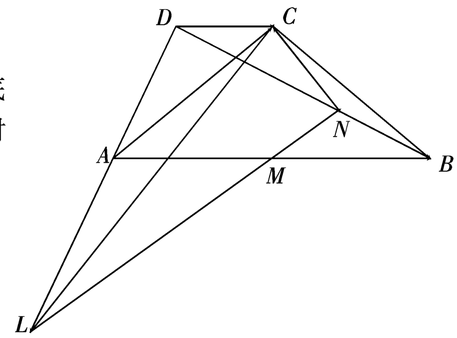
2010 年全国高中数学联赛模拟卷(8)加试

（考试时间:150 分钟　满分:180 分）

学校＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿编号＿＿＿＿＿得分＿＿＿＿＿

一、(本题满分 40 分)

在梯形 $ABCD$ 中,已知对角线 AC 与腰 BC 相等,M 是底边 AB 的中点,L 是 DA 延长线上一点,连接 LM 并延长交对角线 BD 于点 N,求证:$\angle ACL = \angle BCN$.



第一题图

二、(本题满分 40 分)

设正实数 a_i、b_i($i=1,2,\cdots,n,n\geqslant 2$)满足 $a_i<b_i$,且

$$b_1+b_2+\cdots+b_n<1+a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

证明:存在实数 c,使得对于所有的 i($i=1,2,\cdots,n$)和 k($k\in\mathbf{Z}$),均有

$$(a_i+c+k)(b_i+c+k)>0.$$

三、(**本题满分 50 分**)

在某城市足球联赛中,要求每一队必须同其余各队进行一场比赛,每胜一场得 3 分,平一场得 1 分,负一场得 0 分. 已知有一队得分最高,比其余任何一队得分都高,但该队获胜的场次最少,比任何一队都少,问至少有几支队参加比赛?

四、(本题满分 50 分)

求所有素数 p,使得存在一个奇数 n 和一个整系数多项式 $Q(x)$,且使得多项式

$$1+pn^2+\prod_{i=1}^{2p-2}Q(x^i)$$

至少有一个整数根.

2010 年全国高中数学联赛模拟卷(9)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校____________姓名____________编号____________得分____________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 在直角坐标平面中,不等式组$\begin{cases}\cos\theta\leqslant x\leqslant 2\cos\theta,\\ \sin\theta\leqslant y\leqslant 2\sin\theta\end{cases}$(其中 θ 为参数)所确定的平面区域的面积为____________.

2. 方程 $3x+2+\dfrac{2}{x}=5\sqrt{x+1}$ 的正实数解的个数为____________.

3. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱 PA,PB,PC 两两垂直,侧面 PAB,PBC,PCA 与底面所成的二面角的大小分别为 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$. 则 $\tan\theta_1\cdot\tan\theta_2\cdot\tan\theta_3$ 的最小值为____________.

4. 递推数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=x_2=1, x_{n+2}=ax_{n+1}+bx_n(n\in\mathbf{N})$,若 $T=2\,010$ 是使 $x_{T+1}=x_{T+2}=1$ 的最小正整数,则 $\sum\limits_{i=1}^{2\,010}x_i=$____________.

5. 设 a,b,c 都是正实数,且 $a+b+c=1$,则 $a^2+b^2+c^2+\lambda\sqrt{abc}\leqslant 1$ 恒成立的实数 λ 的最大值是____________.

6. 设 $f(z)=2z\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$,这里 z 是复数,用 A 表示原点,B 表示 $f(1+\sqrt{3}i)$,C 表示 $-4i$,则 $\angle ABC=$____________.

7. 在 $\triangle ABC$,已知 $AB=3, CB=4, AC=5$,点 I 为 $\triangle ABC$ 的内心,过点 I 作直线 l,分别交 AB,CB 于点 E,F,则 $\triangle BEF$ 的面积的最小值为____________.

8. 同时抛掷两枚骰子,如果至少有一枚出现了 3 点或 4 点,则称这次抛掷为“好点”. 连续抛掷 270 次,那么出现“好点”的数学期望为____________.

二、解答题(本大题共 3 小题,第 9 题 16 分,第 10、11 题 20 分,共 56 分)

9. 已知双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$,直线 l 是圆 $O:x^2+y^2=2$ 上动点 $P(x_0,y_0)(x_0y_0\neq0)$处的切线,l 与双曲线交于不同的两点 A,B. 证明:$\angle AOB$ 的大小为定值.

10. 已知$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足:对任意正整数 n,均有

$$a_{n+1}=2b_n-a_n, b_{n+1}=2a_n-b_n.$$

求证:若$\{a_n\}$为正项数列,则 $a_1=b_1$.

11. 已知函数$f(x)=5\sqrt{2}(|\sin x|+|\cos x|)-3\sin 2x-7$,求所有的正整数 n,使得$f(x)=0$在区间$(0,n\pi)$内恰有 2 010 个根.

2010 年全国高中数学联赛模拟卷(9)加试

（考试时间:150 分钟　满分:180 分）

学校____________________姓名______________编号____________得分____________

一、(本题满分 40 分)

$\triangle ABC$ 中,$AB \neq AC$,D 为 CB 延长线上一点,且有 $BA = BD$,I_C 为$\triangle ABC$ 的$\angle A$ 内的旁切圆圆心,T 为 CI_C 与$\triangle ABC$ 外接圆的另一交点,若$\angle TDI_C = \dfrac{\angle ABC + \angle ACB}{4}$,求$\angle A$.

二、(本题满分 40 分)

一简单图有 30 个顶点,105 条棱和 4822 个无序棱对(每对的二棱不相邻). 试求任意两顶点度数之差的最大可能值 .

三、(**本题满分 50 分**)

设 $f(x)=x(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1})+1$,其中 $n\geq 2,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$为互不相同的正整数.

证明:$f(x)$可分解为两个次数小于 n 的整系数多项式之积的充分必要条件是:$n=2,a_1=2$ 或 $n=4,a_1,a_2,a_3$ 是 1,2,3 的任意排列.

四、(本题满分 50 分)

记 k 是一个正整数,证明:存在一个整数数列 $a_0, a_1, \cdots$,满足条件

$$a_n=\frac{a_{n-1}+n^k}{n}(n \geqslant 1),$$

则 $k-2$ 能被 3 整除.

2010 年全国高中数学联赛模拟卷(10)第一试

（考试时间:80 分钟　满分:120 分）

学校______________________姓名______________编号____________得分____________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 若$\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\geqslant\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}$,$x\in[0,2\pi]$,则实数 x 的取值范围是________________.

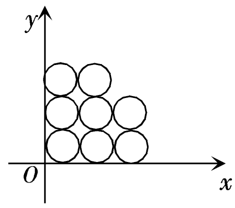
2. 正三棱柱 ABC—$A_1B_1C_1$ 的各条棱长均为 3,长为 2 的线段 MN 的一个端点 M 在 AA_1 上运动,另一个端点 N 在底面 ABC 上运动,则 MN 的中点 P 的轨迹(曲面)与正三棱柱共顶点 A 的三个面所围成的几何体的体积为__________________.

3. 若$f(x)=(2x^5+2x^4-53x^3-57x+54)^{2009}$,则$f\left(\frac{\sqrt{111}-1}{2}\right)=$________________.

4. 已知定点 $N(1,0)$ 和平面区域$\begin{cases}y^2\leqslant 4x,\\3x^2+4y^2\leqslant 12\end{cases}$的边界上两动点 A,B 满足 $AB/\!/x$ 轴,则$\triangle ANB$ 的周长的取值范围是____________.

5. 方程 $x+\left[\frac{x}{3}\right]=\left[\frac{2x}{3}\right]+\left[\frac{3x}{5}\right]$的正实数解为______________.

6. 数列$\{a_n\}$满足 $a_n=\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}-1$,则 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2\,010}$ $=$____________.



第 7 题图

7. 8 个直径为 1 的圆片紧密排列在第一象限中(如图),设这 8 个圆域的并集为 R,斜率为 3 的直线 L 平分 R 的面积. 则 L 的方程是____________.

8. 若对任意非零实数 $x_i(i=1,2,3)$,$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 恒大于零,则 t 的取值范围是______________________.

二、解答题(本大题共 3 小题,第 9 题 16 分,第 10、11 题 20 分,共 56 分)

9. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0, a_{n+1}=\dfrac{\sqrt{4a_n^2+5}-1}{2}\,(n\in\mathbf{N}^*)$,求证:

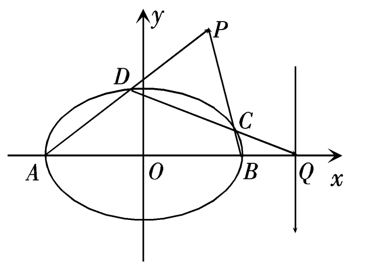
$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}<\frac{\sqrt{5}+3}{2}.$$

10. 设 a 为大于 0 的实数,多项式 $f(x)=ax^2-4bx+4c$ 有两个属于区间 $[2,3]$ 的实数根.

(1)证明:存在一个以 a,b,c 为边长的三角形;

(2)证明:$\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+a}>\frac{c}{b+c}$.

11. 如图,已知 A、B 分别为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点,$Q$ 为椭圆的右准线与 x 轴的交点,过 Q 的直线与椭圆交于点 C,D(C 在 Q,D 之间),直线 AD,BC 相交于点 P,求点 P 的轨迹方程.



第 11 题图

2010 年全国高中数学联赛模拟卷(10)加试

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校____________姓名__________编号__________得分__________

一、(本题满分 40 分)

已知点 M 为$\triangle ABC$ 的边 AB 上一点,且$\triangle AMC$ 与$\triangle BMC$ 的内切圆半径相同,且它们的内心分别为 I_1,I_2,记它们在 AB 上的切点分别为 P,Q,已知 $S_{\triangle ABC}=6S_{PQI_1I_2}$.

(1)求证:$10CM+5AB=7(AC+BC)$;

(2)求$\dfrac{AC+BC}{AB}$的值.

二、(**本题满分 40 分**)

求证:若 a,b,c 为非负实数,则

$$\sum a\sqrt{(a+b)(a+c)} \geqslant \frac{2}{3}(a+b+c)^2.$$

三、(**本题满分 50 分**)

平面上有 n 个点,当中没有三点共线. 每两个点均由一条红色、黄色或绿色的线连起,而且任何三点所成的三角形的三条边均有刚好两种颜色. 证明 $n<13$.

四、(本题满分 50 分)

对于给定的有限项的正整数数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,进行如下操作:如果 $j<k$,并且 a_j 不整除 a_k,那么将 a_j, a_k 分别换成 (a_j, a_k) 和 $[a_j, a_k]$.

证明:这个过程是有限的,并且最终的结果是唯一的.