全国高中数学联赛模拟题(1)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校________________姓名__________编号_________得分_________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 设$\{a_n\}$为等差数列,$\{b_n\}$为等比数列,且数列$\{a_n+b_n\}$的前四项依次为 0,0,1,0,则 $a_{2013}=$____________.

2. 已知正四面体 $ABCD$ 在水平面上的正投影为四边形时面积的最大值为 4,则它在水平面上的正投影为三角形时面积的最大值为____________.

3. 若多项式 $1-x+x^2-\cdots+x^{16}-x^{17}$可以表示为 $a_0+a_1y+\cdots+a_{16}y^{16}+a_{17}y^{17}$,这里 $y=x+1$,则 $a_2=$____________.

4. 抛物线 $y^2=4x$ 和动线段 $x-2y+1=0(x\in[a,a+1])$存在公共点,则 a 的取值范围是____________.

5. 方程$\sqrt{x}\sin x^2=2$ 在区间$[0,20]$内实根的个数为____________.

6. 已知$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,$\angle CAB=30^\circ$,O 为外心且$\overrightarrow{CO}=\lambda_1\overrightarrow{CA}+\lambda_2\overrightarrow{CB}$,则 $\lambda_1+2\lambda_2=$____________.

7. 正 8 边形中作出所有对角线,它们在 8 边形内(不在边界上)有____________个不同的交点.

8. 已知正整数 n,使得从 $1000n$ 起的 1000 个连续整数中没有完全平方数,则 n 的最小值为____________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 设抛物线 $y=x^2-2x+2$ 交直线 $y=mx(m>0)$ 于 P_1,P_2 两点,点 Q 在 P_1P_2 上,且点 Q 满足 $\frac{1}{|OP_1|}+\frac{1}{|OP_2|}=\frac{2}{|OQ|}$. 试求点 Q 的轨迹方程.

10. 已知正实数 a,b,c,d 满足 $2(a+b+c+d)\geqslant abcd$. 求证:

$$a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant abcd.$$

11. 已知数列 $a_n=\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}$, n 为正整数. 试求 $\frac{a_n}{n^2}$ 的最大和最小确界,并问这两个确界是否能够达到.

全国高中数学联赛模拟题(1)加试

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校__________________姓名____________编号__________得分__________

一、(本题满分 40 分)

设点 H 为$\triangle ABC$ 的垂心,且点 P 是$\triangle ABC$ 外接圆上异于顶点 A,B,C 的任意点,令点 E,F 分别是 P 在 BC,AB 边上的垂足. 求证:直线 EF 平分线段 PH.

二、(本题满分 40 分)

将 111 枚硬币放在 $n\times n$ 方格纸的方格中(每格可放 1 枚,多枚,也可不放). 已知任何两个相邻方格(有一公共边)中的硬币数之差都是 1. 求能这样摆放的最大 n 值.

三、(本题满分 50 分)

求实参数 t 的取值范围,使得对能任意能构成三角形的正数 a,b,c,均有 a^2+bct,b^2+cat,c^2+abt 能构成三角形.

四、(本题满分 50 分)

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 已知 $0,a_1,a_1+a_2,\cdots,a_1+a_2+\cdots+a_n$ 除以 $n+1$ 的余数两两不同,求正整数 n 的所有可能值.

全国高中数学联赛模拟题(2)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校____________________姓名_____________编号___________得分___________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 在$\triangle ABC$中,$AB=2$,$AC=4$.若M为BC边的中点,O为$\triangle ABC$的外心,则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AO}$的值是________________.

2. 设$(1+x)^{16}=\sum\limits_{i=0}^{16}a_ix^i$, 则$\sum\limits_{i=1}^{8}ia_i=$____________________.

3. 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{3}=1$的左焦点为$F$,直线$x=m$与椭圆相交于点$A$、$B$,当$m=1$时,$\triangle FAB$的周长取到最大值,则椭圆$C$的离心率为____________________.

4. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=a$,$a_{n+1}=1+\dfrac{1}{a_n}$,若对任意$n\geqslant4$,均有$\dfrac{3}{2}<a_n<2$,则a的取值范围为_______________.

5. 方程$\cos^2x+\cos^22x+\cos^24x+\cos^28x=\sqrt{\dfrac{\sin 16x}{\sin x}}$的解集是____________________.

6. 过半径为 5 的球面上一点P作三条两两互相垂直的弦PA、PB、PC,且满足$PA=2PB$,则$PA+PB+PC$的最大值为____________________.

7. $\left\{\dfrac{65!}{67}\right\}=$____________________.($\{x\}$表示$x$的小数部分)

8. 将2×100方格表的每个小方格染上红、蓝两色之一,红、蓝两色都有.有_______________种不同的染色方案,使得同一种颜色的所有小方格都是“连通”的(两个小方格是“连通”的,当且仅当它们有一条公共边).

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 数列$\{x_n\}$满足:(i) x_1 为一正实数;及

$$\text{(ii) } x_{n+1}=\sqrt{5}x_n+2\sqrt{x_n^2+1},n=1,2,3,\cdots$$

证明:在$x_1,x_2,\cdots,x_{2013}$中,最少可以找到671个无理数.

10. 设抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点为F,经过点F的直线交抛物线于A、B两点,点M在抛物线的准线上,O为坐标原点. 求证:

(1) MA、MF、MB的斜率成等差数列;

(2) 当$MA\perp MB$时,$\angle MFO=|\angle AMF-\angle BMF|$.

11. 已知方程$x^3-ax^2+bx-c=0$有三个正实根(不必同),求$\dfrac{1+a+b+c}{3+2a+b}-\dfrac{c}{b}$的最小值.

全国高中数学联赛模拟题(2)加试

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校____________________姓名______________编号____________得分____________

一、(本题满分 40 分)

已知$\triangle DEF$是不等边锐角三角形ABC的垂足三角形,$D\in AB$,$E\in AC$,$F\in BC$,I_1、I_2分别是$\triangle ADE$和$\triangle CEF$内心,O_1、O_2分别是$\triangle ABI_1$和$\triangle BCI_2$的外心.

求证:$O_1O_2 /\!/ I_1I_2$.

二、(本题满分 40 分)

给定素数p,求满足以下条件的所有正整数n:

$$\text{对任意整数 } x\text{,若 } p \mid x^n-1\text{,则 } p^2 \mid x^n-1.$$

三、(本题满分 50 分)

试确定在 12×12 棋盘中所能放置的“王”的数目的最大值,使得其中每一个“王”都恰可攻击另外一个“王”(“王”可以攻击和它所在方格有公共顶点的方格中的棋子).

四、(本题满分 50 分)

已知实数 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n(n\geqslant2)$,求证:

$$\frac{n(n-1)}{2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1}ix_{i+1}\right).$$

全国高中数学联赛模拟题(3)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校__________姓名________编号________得分________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. $2013^{\ln\ln 2013}-(\ln 2013)^{\ln 2013}=$__________.

2. 已知直线 $y=\frac{1}{2}x$ 与双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ 交于 A、B 两点,P 为双曲线上不同于 A、B 的点,当直线 PA、PB 斜率 k_{PA}、k_{PB}存在时,$k_{PA}k_{PB}=$__________.

3. 数列$\{a_n\}$满足:$a_1=1,a_{n+1}=\frac{(n+1)a_n^2}{2na_n+n^2}$,则 $a_{2013}=$__________.

4. 设直角三角形的两条直角边长分别为 a,b,斜边长为$\frac{1}{3}ab-(a+b)$,若 a,b,c 均为正整数,则满足条件的直角三角形共有__________个.

5. 设函数$f(x)=4x^3+bx+1(b\in\mathbf{R})$对于任意 $x\in[-1,1]$,都有$f(x)\geqslant 0$ 成立,则实数 b 的取值范围为__________.

6. 已知锐角$\triangle ABC$ 的外心为 O,$\angle A=45°$,若$\frac{\cos B}{\sin C}\overrightarrow{AB}+\frac{\cos C}{\sin B}\overrightarrow{AC}=2m\overrightarrow{AO}$,则 $m=$__________.

7. 设正四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 1,E,F,G,H 分别是线段 AB,CD,PB,PC 的中点,则多面体 $BEG-CFH$ 的体积为__________.

8. 袋内有 8 个白球和 2 个红球,每次从中随机取出一个球,然后放回 1 个白球,则第 4 次恰好取完所有红球的概率为__________.

二、解答题(本大题共 3 小题,第 9 题 16 分,第 10、11 题 20 分,共 56 分)

9. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{2013}\in[-2,2]$,且 $a_1+a_2+\cdots+a_{2013}=0$. 试求 $f=a_1^3+a_2^3+\cdots+a_{2013}^3$ 的最大值.

10. 给定圆 $C:x^2+(y-1)^2=1$ 和抛物线 $C_1:x^2=4y$. 过抛物线 C_1 上一点 $P(x_0,y_0)(y_0>2)$ 作圆 C 的两条切线,分别交 x 轴于 M、N 两点,试求 $\triangle PMN$ 面积的最小值及此时对应的 y_0 的值.

11. 设 n 为正整数,求证:

$$1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}>\frac{\mathrm{e}^n}{2}.$$

全国高中数学联赛模拟题(3)加试

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校____________________姓名______________编号____________得分____________

一、(本题满分 40 分)

设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心,H_1、H_2 分别是 H 到角 B 的内外角平分线的垂足. 求证:直线 H_1H_2 平分 AC 边.

二、(本题满分 40 分)

数列 $\{x_n\}$ 满足:$x_1=a, x_{n+1}=2a-\dfrac{a^2+1}{x_n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

证明:若数列 $\{x_n\}$ 为纯周期数列,则它的最小正周期一定为奇数.

三、(本题满分 50 分)

求所有整数对(m,n),满足

$$\begin{cases}2m\equiv -1 \pmod{n},\\ n^2\equiv -2 \pmod{m}.\end{cases}$$

四、(本题满分 50 分)

有 65 对情侣出去玩,每一位男生都有一辆机车,并且都要负责载一位女生. 假设他们能够安排出一种载法,使得对于任两辆机车,下面两命题恰有一成立:

(1)这两辆机车上的男生互相彼此认识;

(2)这两辆机车上的女生的男朋友互相彼此认识.

证明:一定可以找到一对情侣,把他们剔除后,剩下的 64 对情侣仍能够安排出一个满足上述条件的载法.

全国高中数学联赛模拟题(4)第一试

（考试时间:80 分钟　满分:120 分）

学校________________姓名____________编号__________得分__________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 将 1,2,…,260 按以下两种方式填入 13×20 的方格表中:

(1)第一行从左到右依次填入 1,2,…,13;第二行从左到右依次填入 14,15,…,26;…;最后一行从左到右依次填入 248,249,…,260.

(2)最右列从上往下依次填入 1,2,…,20;右边第二列从上往下依次填入 21,22,…,40;…;最左列从上往下依次填入 241,242,…,260.

在两种填法中被填在方格表的同一格中的数为____________.

2. 已知函数 $f(x)=x^2-2x+3$,若当 $1<x<2$ 时,不等式 $|f(x)-a|<2$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是____________.

3. 在正四面体 $ABCD$ 中,M、N 分别为 AB、AD 的三等分点,其中 $AM=\frac{1}{3}AB$,$AN=\frac{2}{3}AD$,O 为 $\triangle BCD$ 的中心,则 AO 与 MN 所成角的正弦值为____________.

4. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $2\sin B\sin C=1+\cos A$,$2\sin A\sin C=\cos B$,则 $\cos(A-B)=$________.

5. 任作椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一条切线与椭圆两条对称轴分别交于点 A、B,若线段 AB 长度的最小值为 $3b$,则椭圆的离心率为____________.

6. 设 EF 是边长为 $2\sqrt{6}$ 的正三角形 ABC 的外接圆的一条动弦,其长度为 $2\sqrt{2}$,点 P 为 $\triangle ABC$ 三边上的动点,则 $\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{PF}$ 的最大值为____________.

7. 已知非空集合 $X\subseteq M=\{1,2,\cdots,2013\}$,用 $f(X)$ 表示集合 X 中最大数和最小数的和,则所有这样的 $f(X)$ 的和为____________.

8. 满足等式 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{25}^2=2+x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{24}x_{25}$ 的非负整数解 $(x_1,x_2,\cdots,x_{25})$ 有____________组.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 已知 a,b 为互不相等的正实数,求证:

$$\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}.$$

10. 已知椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F,上顶点为 M. 问:是否存在直线 l 交椭圆于 P,Q 两点,且使得 F 是 $\triangle MPQ$ 的内心? 若存在,求直线 l 的方程,若不存在,请说明理由.

11. 设 r 为正整数,定义数列 $\{a_n\}$ 如下:

$$a_1=1,a_{n+1}=\frac{na_n+2(n+1)^{2r}}{n+2},(n=1,2,\cdots).$$

证明:对任意正整数 n,a_n 均为整数.

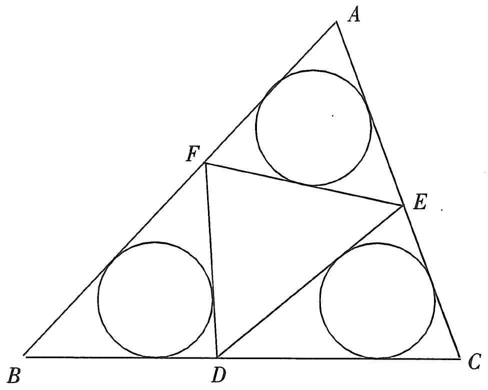
全国高中数学联赛模拟题(4)加试

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校____________姓名__________编号________得分________

一、(本题满分 40 分)

设 D、E、F 分别为$\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上的点,且$\triangle AEF$、$\triangle BFD$、$\triangle CDE$ 的内切圆有相同的半径 r_1,又$\triangle DEF$ 与$\triangle ABC$ 的内切圆半径分别为 r_0 和 r,求证:$r=r_0+r_1$.



第一题图

二、(本题满分 40 分)

平面上任给 n 个不同的矩形. 求证:它们的 $4n$ 个直角中互不重合的直角个数不少于 $4\sqrt{n}$ 个.

三、(本题满分 50 分)

已知自然数 $n\geqslant 3, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为非负实数,记 $A=\sum_{i=1}^{n} x_i, B=\sum_{i=1}^{n} x_i^2, C=\sum_{i=1}^{n} x_i^3$. 求证:

$$(n+1)A^2B+(n-2)B^2\geqslant A^4+(2n-2)AC.$$

四、(本题满分 50 分)

设 p 为奇素数,整数 $a_1, a_2, a_3, \cdots a_{p-1}$ 均与 p 互素. 若对 $k=1,2,\cdots,p-2$,均有

$$a_1^k+a_2^k+a_3^k+\cdots+a_{p-1}^k\equiv 0(\bmod p).$$

证明:$a_1, a_2, a_3, \cdots a_{p-1}$ 除以 p 的余数互不相同.

全国高中数学联赛模拟题(5)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校____________________姓名____________编号___________得分___________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 设等差数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n>7)$ 的公差不为 0,且 a_3,a_4,a_7,a_n 构成等比数列,则它的项数 $n=$________________.

2. 指数函数 $y=a^x$ 和对数函数 $y=\log_a x$(其中 $a>0,a\neq1$)的图象分别为 C_1 和 C_2,点 M 在曲线 C_1 上,线段 OM(O 为坐标原点)交曲线 C_1 于另一点 N,若曲线 C_2 上存在一点 P,满足点 P 的横坐标与点 M 的纵坐标相等,点 P 的纵坐标是点 N 横坐标的两倍,则点 P 的坐标为____________.

3. 设倒圆锥形容器的轴截面为一个等腰直角三角形,在此容器内注入水,并放入半径为 r 的一个实心球,此时球与容器壁及水面恰好都相切,则取出球后水面高为____________.

4. 已知函数 $f(x)=m(\sin x+\cos x)^4+\frac{1}{2}\cos 4x$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时有最大值 $\frac{7}{2}$,则实数 $m=$________________.

5. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1、F_2,过点 $A(0,a)$ 作椭圆的切线 l 交 x 轴负半轴于点 B,P 是点 F_1 关于直线 l 的对称点,若 $\triangle PF_1F_2$ 是等腰三角形,则椭圆 C 的离心率为____________________.

6. 已知实数 x,y 满足 $x^2+3xy+4y^2\leqslant\frac{7}{2}$,则 $x+y$ 的最大值为______________.

7. 已知 a,b,c 为正整数,且 $c>b>a>1$,$\left(a-\frac{1}{c}\right)\left(b-\frac{1}{a}\right)\left(c-\frac{1}{b}\right)$ 为整数,则 $a+b+c=$__________________.

8. 从集合 $\{-10,-9,\cdots,-1,0,1,\cdots,9,10\}$ 中任选 4 个不同的元素,考虑这 4 个元素的两数和、三数和、四数和,这 11 个和中恰有两个和为 0 的概率为______________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 求 a 的取值范围,使得对一切实数 x,y,均有 $2ax^2+2ay^2+4axy-2xy-y^2-2x+1\geqslant 0$.

10. 已知过点 $Q(0,2)$ 的直线 l 与双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的右支交于 A,B 两点(B 在 A,Q 之间),已知点 $H(7,0)$,记 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{BQ}$,求 λ 的取值范围,使得 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BH}>0$.

11. 已知实数列 $\{a_n\}$ 满足:$a_{n+1}=2^n-3a_n,n=0,1,2,\cdots$. 求 a_0 的取值范围,使得对任意正整数 n,均有 $a_{n+1}>a_n$.

全国高中数学联赛模拟题(5)加试

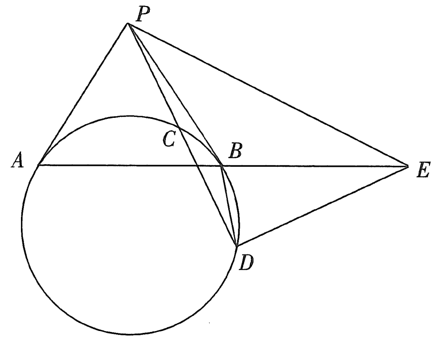
(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校__________姓名__________编号__________得分__________

一、(本题满分 40 分)

如图,P 为圆 ω 外一点,PA、PB 为圆 ω 的两条切线,PCD 为圆 ω 的一条割线,其中 C 在线段 PD 上,直线 $DE\perp PD$ 交直线 AB 于点 E.

求证:$\angle BPE=2\angle PDB$.



第一题图

二、(本题满分 40 分)

求所有的正整数 a 和 b,使得

$$a\mid b^2,\ b\mid a^2 \text{且}\ a+1\mid b^2+1.$$

三、(本题满分 50 分)

已知实系数方程 $x^4-mx^3+nx^2-ux+v=0$ 有四个非负实数根(不必不同),求证:

$$m^4+32v\geqslant 3m^2n.$$

四、(本题满分 50 分)

圆周上取 $n(>1)$个点,以所取的两不同点为端点的圆弧称作"区间"(两点可构成两个区间).设 F 是一族区间,满足:对每个区间 $A\in F$,至多有一个 $B\in F$ 使得 $A\subset B$ 且 $B\neq A$(称 A 是 B 的真子区间).称 F 中的一个区间为极大,若它不是 F 中任一别的区间的真子区间.设 F 有 m 个极大元,a 个非极大元.

(1)求证:$m+\dfrac{a}{2}\leqslant n$;

(2)给定 $n\geqslant 3$,求$|F|$的最大值.

全国高中数学联赛模拟题(6)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校________________姓名__________编号_________得分_________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 已知 $k\in\mathbf{N}^*$,且 $k\geqslant 3$,若一元二次方程 $(k-1)x^2-px+2k=0$ 的两个根都是正整数,则 $12(p+k)^2+51(p+k)$ 的值等于____________.

2. 若 $x\in(-\pi,0)$,则函数 $y=\dfrac{\sin x\cos x}{1+\sin x+\cos x}$ 的值域是____________.

3. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=2$,$AA_1=AD=1$,点 E、F、G 分别为棱 AA_1、C_1D_1、BC 的中点,那么四面体 B_1EFG 的体积为____________.

4. 已知 z_1,z_2 在复平面上对应点分别为 P、Q,且 $|z_2|=4$,$4z_1^2-2z_1z_2+z_2^2=0$,则 P、Q 与原点 O 所成 $\triangle OPQ$ 的面积等于____________.

5. 已知 $\triangle ABC$ 中,$AB=2$,$AC=1$,$\angle BAC=120^\circ$,O 是 $\triangle ABC$ 的外心,且 $\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$,则 $\lambda+\mu=$____________.

6. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,则 $\left[\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2013}\right]$ 被 11 除的余数是____________.

7. 已知 A、B 是椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上的两个动点,O 为坐标原点,且 $OA\perp OB$,则 $S_{\triangle AOB}$ 的最小值为____________.

8. 对于 $n\geqslant 2$,$a_1,a_2,\cdots a_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列,且满足有且只有一个 $i\in\{1,2,\cdots n-1\}$,使得 $a_i>a_{i+1}$,则这种排列的个数为____________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2, a_n=2^{2n}a_{n-1}+n\cdot 2^{n^2}(n\geqslant 2)$,求通项$a_n$.

10. 已知椭圆Γ的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$离心率$e=\frac{1}{2}$, F_1是椭圆Γ的左焦点,直线L过点$M(-2a,0)$交椭圆Γ于A、B两点,且$\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_1|}=\frac{1}{12}$. 当$\triangle ABF_1$的面积最大时,求直线$l$的方程.

11. 已知正实数x,y,z满足$x^2+y^2+z^2=3$,求$u=\frac{2-x}{4x-x^2}+\frac{2-y}{4y-y^2}+\frac{2-z}{4z-z^2}$的最小值.

全国高中数学联赛模拟题(6)加试

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校____________姓名__________编号________得分________

一、(本题满分 40 分)

已知圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 交于点 E,对边 DA、CB 延长线交于点 F,G 点使得 $ECGD$ 为平行四边形,H 为 E 关于直线 AD 的对称点,求证:D,H,F,G 四点共圆.

二、(本题满分 40 分)

设 $S=\{1,2,\cdots,2012\}$. 求满足下列条件的函数 $f:S\to S$ 的个数:

(1)f 为一一映射;

(2)对任意正整数 $a(1\leqslant a\leqslant 2012)$,均有 $f(a)+f^{-1}(a)=2013$,其中 f^{-1} 为 f 的反函数.

三、(本题满分 50 分)

设 a,b,c 是锐角$\triangle ABC$ 的三边长,R 是外接圆半径. 求证:

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{a^3+b^3+c^3}\geqslant\sqrt{3}R.$$

四、(本题满分 50 分)

p 是大于 3 的质数. 证明:存在 $a\in\{1,2,\cdots,p-2\}$,使得 $a^{p-1}-1$ 与$(a+1)^{p-1}-1$ 都不是 p^2 的倍数.

全国高中数学联赛模拟题(7)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校________________姓名__________编号_________得分_________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 已知 $2^{\frac{1}{x}}>x^{a}$ 对任意 $x\in(0,1)$ 成立,则实数 a 的取值范围是____________.

2. 在等腰梯形 $ABCD$ 中,$AB//CD$,且 $AB>CD$. 设以 A、B 为焦点且过点 D 的双曲线的离心率为 e_1,以 C、D 为焦点且过点 A 的椭圆的离心率为 e_2,则 $e_1e_2=$____________.

3. 已知正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2+a_i}=\dfrac{1}{2}$,则 $\prod\limits_{i=1}^{n}a_i$ 的最小值为____________.

4. 已知 $\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)-\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{1}{4}$,且 $x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$. 则 $\tan x$ 的值为____________.

5. 如果复数 $|z|=2$,且 $z^3=a+b\mathrm{i}$,其中 a,b 为实数,则 $a+b$ 的最大值为____________.

6. 四棱锥 P—$ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是凸四边形,AC,BD 相交于 O,若 $\triangle AOB$ 的面积为 36,$\triangle COD$ 的面积为 64,四棱锥的高为 9,则这样的四棱锥的体积最小值是____________.

7. 平面直角坐标系中,A、B 为两个与原点 O 不重合的点,AB 中点为 M,若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{x}$,$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{y}$,点 B 关于 $\overrightarrow{OA}$ 所在直线的对称点为 B_1,则$\overrightarrow{OB_1}$为____________.(用 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 表示).

8. 求值:$\dfrac{\sum\limits_{n=1}^{99}\left(\sqrt{10+\sqrt{n}}\right)}{\sum\limits_{n=1}^{99}\left(\sqrt{10-\sqrt{n}}\right)}=$____________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 设 $A=\{1,2,\cdots,10\}$,f 是 A 到 A 上的一一映射,记

$$f_1(x)=f(x),f_{n+1}(x)=f(f_n(x)).$$

映射 f 又满足条件:

(1)对一切 $x\in A$, $f(x)\neq x$;

(2)对一切 $x\in A$, $f_{21}(x)=x$.

试问:满足上述条件的映射 f 有多少个?

10. 已知过点 $A(0,1)$ 的直线 l 与抛物线 $C:y^2=4x$ 交于两个不同的点 M 和 N,抛物线 C 在点 M,N 处的切线的交点为 P,求点 P 的轨迹.

11. 设有无穷数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$. 对任何自然数 m 和 n,满足不等式

$$|a_{m+n}-a_m-a_n|<\frac{1}{m+n}.$$

证明:这个数列是等差数列.

全国高中数学联赛模拟题(7)加试

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校____________________姓名_____________编号___________得分___________

一、(本题满分 40 分)

在$\triangle ABC$中,$AB=BC$,点D在三角形内,使得$\angle ADC=2\angle ABC$. 证明:顶点B到$\angle ADC$外角平分线的距离等于$AD+DC$的一半.

二、(本题满分 40 分)

p为奇质数,证明:$\dfrac{p^{2p}+1}{p^2+1}$的任一正约数模$4p$余 1.

三、(本题满分 50 分)

$m\times n$ 表($m,n\geqslant 4$)中由格线段组成的一条不自交闭合路线经过所有$(m-1)(n-1)$个内部格点但不过任何边界格点. 设 A 是该路线直穿而过的格点个数,B 是恰有一对对边属于该路线的方格个数,C 是四边都不属于该路线的方格个数. 求证:$A=B-C+m+n-1$.

四、(本题满分 50 分)

求实数 k 的最大值,使得对于任意正实数 x,y,z,均有

$$x^3+y^3+z^3-3xyz\geqslant k\left|(x-y)(y-z)(z-x)\right|. \quad ①$$

全国高中数学联赛模拟题(8)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校________________姓名____________编号__________得分__________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 已知正项等比数列$\{a_n\}$满足$a_7=a_6+2a_5$. 若存在两项a_m,a_n使得$\sqrt{a_m a_n}=4a_1$,则$\frac{1}{m}+\frac{4}{n}$的最小值为____________.

2. 从 1,2,…,2000 中随机抽取一个整数,抽到的数能被 6 整除,但不能被 4 或 9 整除的概率为____________.

3. 已知I是$\triangle ABC$的内心,$AC=2$,$BC=3$,$AB=4$. 若$\overrightarrow{AI}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,则$x+y=$__________.

4. 设$f(x)=ax-3x^3$,已知对一切$x\in[0,1]$,恒有$|f(x)|\leqslant 1$,则实数a的取值范围为________________.

5. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$的两个焦点分别为$A(-1,0)$,$B(1,0)$,过点$B$的直线$l$与该双曲线的右支交于$M,N$两点,且$\triangle AMN$是以$N$为直角顶点的等腰直角三角形,则该双曲线的实轴长为____________.

6. 设复数$z_1=-3-\sqrt{3}\mathrm{i}$,$z_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$,$z=\sqrt{3}\sin\theta+\mathrm{i}(\sqrt{3}\cos\theta+2)$. 则$|z-z_1|+|z-z_2|$的最小值是__________.

7. 已知直线$l\perp$平面α,垂足为O,三角形ABC的三边分别为$BC=1$,$AC=2$,$AB=\sqrt{5}$. 若$\triangle ABC$满足$A\in l$,$C\in\alpha$,则B、O两点距离的最大值为____________.

8. 集合$A=\{2,4,\cdots,2014\}$,B是集合A的任意非空子集,a_i、a_j是集合B中的任意两个元素,以a_i、a_j为边长的等腰三角形有且只有一个. 则集合B中元素个数的最大值为____________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$,$a_{2n}=a_n$,$a_{4n-1}=0$,$a_{4n+1}=1$,求证:不存在正整数T,使得对任意正整数n,都有$a_{n+T}=a_n$.

10. 设直线$l:y=\sqrt{3}x+b$与抛物线$E:y^2=2px(p>0)$交于A,B两点,过A,B的圆与抛物线E交于另外两个不同的点C,D,求直线AB与CD的夹角大小.

11. 已知$0<x_i<1(i=0,1,\cdots,10)$. 证明:存在$i,j\in\{0,1,\cdots,10\}$,使得

$$0<x_ix_j(x_j-x_i)<\frac{1}{30}.$$

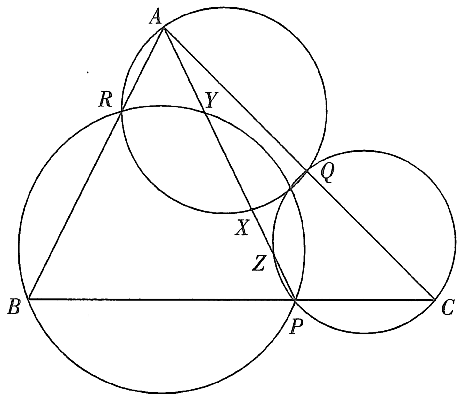
全国高中数学联赛模拟题(8)加试

（考试时间:150 分钟　满分:180 分）

学校＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿编号＿＿＿＿＿得分＿＿＿＿＿

一、(本题满分 40 分)

已知 P,Q,R 分别为三角形 ABC 三边 BC,CA,AB 上的点. $\omega_A,\omega_B,\omega_C$ 分别为三角形 AQR,BRP,CPQ 的外接圆. 线段 AP 与圆 $\omega_A,\omega_B,\omega_C$ 的另一个交点分别为 X, Y,Z. 求证:$\frac{YX}{XZ}=\frac{BP}{PC}$.



第一题图

二、(本题满分 40 分)

对于正整数 n,定义集合 $S_n=\{C_n^n,C_{2n}^n,C_{3n}^n,\cdots,C_{n^2}^n\}$. 求证:存在无穷多个合数 n,使得 S_n 不是 $(\bmod\ n)$ 的完全剩余系.

三、(本题满分 50 分)

已知正整数 $n\geqslant 2$,正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$满足 $a_ia_{i+n}=1(1\leqslant i\leqslant n)$. 求证:存在$\{1,2,\cdots,2n\}$的两个不同元素 j,k 使得 $|a_j-a_k|<\frac{1}{n-1}$.

四、(本题满分 50 分)

圆周上有 2^{500}个点,将这些点任意编号为 $1\sim 2^{500}$. 求证:从这些点中必可连出 100 条两两不相交的弦,使得每条弦两端点处的两数之和彼此相等.

全国高中数学联赛模拟题(9)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校________________姓名__________编号_________得分_________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 在锐角三角形 ABC 中,边 $BC=2$,$B=2A$,则边 AC 的取值范围是________________.

2. 设向量$\overrightarrow{OA}$绕点 O 逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$得向量$\overrightarrow{OB}$,且 $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(7,9)$,则向量$\overrightarrow{OB}=$________.

3. 一个两条边长分别为 1 和 2 的矩形在平面 α 内的射影为菱形,则矩形与平面 α 所成锐二面角 θ 的最小值为________________.

4. 已知实数 x,y 满足 $x^3-6x^2-4=0$,$y^3-3y^2-9y-9=0$. 则 $x-y=$________________.

5. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称,且当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$f(x)=2\sqrt{1-x^2}$. 若直线 $y=x+a$ 与曲线 $y=f(x)$ 恰有三个交点,则实数 a 的取值范围为______________.

6. 设正数 a,b,c 满足 $3a^3+2b^3+6c^3=6$,则 $2a+3b+c$ 的最大值为________________.

7. 某食品厂制作了四种不同的精美卡片,在该厂生产的每袋食品中都随机装入一张卡片,规定:如果收集齐了四种不同的卡片即可获得奖品. 若小明一次性购买该种食品 6 袋,则小明获奖的概率为______________.

8. 已知曲线 C 上任意一点到点 $A(1,0)$ 与直线 $x=4$ 的距离之和等于 5,对于给定的点 $B(b,0)$,在曲线上恰有三对不同的点关于点 B 对称,则 b 的取值范围为__________________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 设 $x_1=3, x_n+x_{n-1}=2+\dfrac{n(3n+1)}{x_n+x_{n-1}}$,求数列$\{x_n\}$的通项公式.

10. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个正实数($n\geqslant 2$),且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$,将$\dfrac{x_1}{1+x_1}, \dfrac{x_2}{1+x_1+x_2}, \cdots, \dfrac{x_n}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n}$中最大的数记为 S.

(1)令 $y_k=1+x_1+x_2+\cdots+x_k(k=1,2,\cdots,n)$,求证:$y_1+y_2+\cdots y_n\geqslant\dfrac{1}{S}$;

(2)对于给定的正整数 n,求 S 的最小值,并求出 n 取最小值时,$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的值.

11. 设抛物线 $C_1: y^2=4mx(m>0)$的准线与 x 轴交于点 F_1,焦点为 F_2,以 F_1 和 F_2 为焦点,离心率 $e=\dfrac{1}{2}$的椭圆 C_2 在 x 轴上方的交点为 P,延长 PF_2 交抛物线于点 Q,M 是抛物线 C_1 上一动点,且点 M 在 P 与 Q 之间运动,当$\triangle PF_1F_2$ 的边长恰好是三个连续的自然数时,求$\triangle MPQ$ 面积的最大值.

全国高中数学联赛模拟题(9)加试

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校____________________姓名_____________编号____________得分____________

一、(本题满分 40 分)

已知 O 为不等边锐角三角形 ABC 的外心,射线 AO 交 BC 于 D,P 为 A 关于点 D 的对称点,若 $\angle APB=\angle APC$,求 $\tan B\tan C$ 的值.

二、(本题满分 40 分)

对有限数列的一步操作是同时在每两个相邻项之间插入等于它们之和的一个新项. 从(1,1)开始,第一个数列(1,2,1),第二个数列(1,3,2,3,1),等等.

试求第 n 个数列各项的立方和.

三、(本题满分50分)

设 m,n 为正整数,集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 中恰有 m 个素数. 求证:S 的任一 $m+1$ 元子集中必有一个数是另外 m 个数的乘积的因数.

四、(本题满分50分)

给定整数 $n\geqslant 2$,实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1.$$

对于任意集合 $A\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$,定义 $S_A=\sum\limits_{i\in A}x_i$(若 A 为空集,则定义 $S_A=0$).

证明:对于任意正实数 λ,满足 $S_A\geqslant\lambda$ 的集合 A 的个数不超过$\dfrac{2^{n-3}}{\lambda^2}$,并确定使得等号成立的所有 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 λ.

全国高中数学联赛模拟题(10)第一试

（考试时间:80 分钟　满分:120 分）

学校____________________姓名_____________编号____________得分____________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. $f(x,y)=\sqrt{9x^2+4}+\sqrt{9x^2-12xy+4y^2+1}+\sqrt{4y^2-16y+20}$取最小值时,对应的$(x,y)=$____________.

2. 设$S=\{(x,y)\mid -2\leqslant y\leqslant |x|,-2\leqslant x\leqslant 2\}$,则当$(x,y)\in S$,且使得二次方程$t^2+(|x|-1)t+|y|-2=0$的一个根大于 1,一个根小于 1 的概率为____________.

3. 已知正三棱锥$P-ABC$底面正三角形的边长为$2\sqrt{3}$,内切球半径为$\sqrt{2}-1$,则三棱锥体积为____________.

4. 若实数a,b,c满足$a+b+c=a^2+b^2+c^2$, 则$a+b+c$的最大值为____________.

5. 已知$\dfrac{\cos x\cos\frac{y}{2}}{\cos\left(x-\frac{y}{2}\right)}+\dfrac{\cos y\cos\frac{x}{2}}{\cos\left(y-\frac{x}{2}\right)}=1$,则$\cos x+\cos y=$____________.

6. 数列$\{a_n\}$共有 11 项,满足$a_1=0,a_{11}=4$,且$|a_{k+1}-a_k|=1,k=1,2,\cdots,10$. 满足这些条件的不同数列的个数为____________.

7. 设两个椭圆$\dfrac{x^2}{t^2+2t-2}+\dfrac{y^2}{t^2+t+2}=1$和$\dfrac{x^2}{2t^2-3t-5}+\dfrac{y^2}{t^2+t-7}=1$有公共的焦点,则$t=$____________.

8. 设p,q是两个不同的素数,则$p^{q-1}+q^{p-1}$被pq除的余数为____________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 若函数$f(x)=|e^x-a|+\frac{a^2}{2}$,当$x\in[0,\ln 3]$时,函数$f(x)$的最大值与最小值之差为$\frac{3}{2}$,试求$a$的值.

10. 已知点$E(m,n)$为抛物线$y^2=2px(p>0)$内一定点,过E作斜率分别为k_1,k_2的两条直线交抛物线于A,B,C,D,且M,N分别是线段AB,CD的中点.

(1)当$n=0$且$k_1\cdot k_2=-1$时,求$\triangle EMN$的面积的最小值;

(2)若$k_1+k_2=\lambda(\lambda\neq 0,\lambda$为常数),证明:直线$MN$过定点.

11. 数列$\{a_n\}$定义如下:$a_1=1$,对每个$n\in\mathbf{N}$,$a_{4n+1},a_{4n+2},a_{4n+3}$构成等差数列,其公差为2,而$a_{4n+3},a_{4n+4},a_{4n+5}$构成等差数列,其公差为$\frac{1}{2}$.

证明:数列$\{a_n\}$为有界数列,并求其最小上界.

全国高中数学联赛模拟题(10)加试

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校____________________姓名____________编号___________得分___________

一、(本题满分 40 分)

已知 $ABCD$ 为圆 O 内接四边形,E、F、G、H 分别为 AB、AD、BC、CD 的中点,S 为平面上一点. 证明:$\angle OFS=\angle OGS$ 的充要条件为 $\angle OES=\angle OHS$.

二、(本题满分 40 分)

对任意正整数 n,记 $a_1,a_2,\cdots,a_m(m\geqslant 1)$ 为 n 的所有正因子. 如果存在 m 个整数 $b_1,b_2,\cdots,b_m$,使得 $n=\sum\limits_{i=1}^{m}(-1)^{b_i}a_i$,我们则称 n 为一个“好数”.

证明:存在一个恰有 2013 个不同质因子的好数.

三、(本题满分 50 分)

求所有函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，,使得对一切 $x,y\in\mathbf{R}$ 均有

$$f(x+y)+f(x)f(y)=f(xy)+(y+1)f(x)+(x+1)f(y).$$

四、(本题满分 50 分)

在所有的格点 (x,y)，其中 $1\leqslant x\leqslant 101$ 及 $1\leqslant y\leqslant 101$ 当中选出一些格点，限制条件是选出的格点之中没有任何 4 点构成一个底边与 x 轴或 y 轴平行的等腰梯形(长方形也算做一个等腰梯形)，请问最多可以选出多少个格点?

全国高中数学联赛模拟题(11)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校____________________姓名_____________编号____________得分____________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 设实数 a,b 满足 $a^3-3ab^2=39, b^3-3a^2b=26$. 则 a^2+b^2 的值为________________.

2. 若函数 $f(x)=\ln(e^x+1)$ 可以表成一个奇函数 $g(x)$ 和一个偶函数 $h(x)$ 的和,则函数 $h(x)$ 的最小值为____________________.

3. 已知 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC=5, BC=6$, $\triangle ABC$ 的垂心 H 满足 $\overrightarrow{AH}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{BC}$,则 $m+n=$____________________.

4. 实数 a,b 满足 $a^2+b^2=1$,则 $ab+\max(a,b)$ 的最大值为____________________.

5. 已知 C_0 是单位圆 $x^2+y^2=1$,依如下方法得到平面上的一族圆 $C_0, C_1, C_2, \cdots$:对每个 $n=0, 1, 2, \cdots$,圆 C_{n+1} 位于上半平面中,且与双曲线 $x^2-y^2=1$ 的两支以及圆 C_n 均相切,则圆 C_n 的半径 $r_n=$______________________________.

6. 四棱锥 $P-ABCD$ 满足

$$\angle APD=\angle APB=\angle PBC=\angle PDC=90^\circ, AP=PD=PB=BC=DC=1,$$

则棱锥的高为_____________.

7. 正 12 边形的各边各对角线中随机选取三条不同的线段,它们的长度为一个三角形的三边长的概率为______________________.

8. 在集合 $\{1,2,3,\cdots,100\}$ 中,$10^{2013}-1$ 的约数有______________________个.

二、解答题(本大题共 3 小题,第 9 题 16 分,第 10、11 题 20 分,共 56 分)

9. 解三角方程:$2^{\sin^4 x-\cos^2 x}-2^{\cos^4 x-\sin^2 x}=\cos 2x$.

10. 数列$\{a_n\}$的各项均为正实数,且对任意 $n\in\mathbf{N}_+$,满足 $a_{n+1}=a_n+ca_n^2$($c>0$ 为常数).

(1)求证:对任意正实数 M,存在 $N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,$a_n>M$;

(2)设 $b_n=\dfrac{1}{1+ca_n}$,S_n 是$\{b_n\}$的前 n 项和,求证:对任意 $d>0$,存在 $N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,有

$$0<\left|S_n-\frac{1}{ca_1}\right|<d.$$

11. 已知 O 为坐标原点,F 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点,过点 F 的直线 l 交椭圆于 A、B 两点,椭圆上两点 P、Q 满足:$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\mathbf{0}$,且 P,A,Q,B 四点共圆. 求椭圆 C 的离心率.

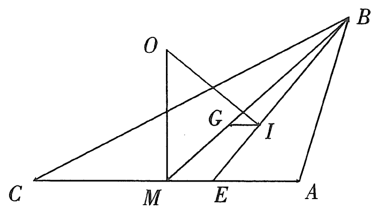
全国高中数学联赛模拟题(11)加试

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校____________________姓名____________编号___________得分___________

一、(本题满分 40 分)

已知 I,O,G 分别为$\triangle ABC$ 的内心,外心,重心,M 为边 AC 的中点,E 为$\angle CBA$ 的平分线与 AC 的交点. 若 $GI/\!/AC$,求证:O,M,E,I 四点共圆.



第一题图

二、(本题满分 40 分)

已知 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为正实数,且对任意 $k=0,1,\cdots,n-1$,均满足 $a_{k+1}-a_k\geqslant 1$. 求证:

$$1+\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_2-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n-a_0}\right)\leqslant\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right).$$

三、(本题满分 50 分)

在 $m\times n$ 的方格中,每一格染红白两色之一,已知对任意的 i,j,在第 i 行与第 j 列的 $m+n-1$ 个方格中,与方格(i,j)(第 i 行及第 j 列交叉的方格)同色的方格数目,小于另一种颜色的方格数,求证:mn 是 4 的倍数.

四、(本题满分 50 分)

若一个大于 1 的整数 N 可写成偶数个素数的乘积(不要求这些素数互不相同),则称 N 为"好数". 考虑多项式 $P(x)=(x+a)(x+b)$,其中 a,b 为正整数.

(1)求一组$(a,b)(a\neq b)$使得 $P(1)$,$P(2)$,$P(3)$均为"好数";

(2)若对任意正整数 n,$P(n)$均为"好数",求证:$a=b$.

全国高中数学联赛模拟题(12)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校____________姓名__________编号__________得分__________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 如果关于 x 的不等式 $ax^2-|x+1|+2a<0$ 的解集为空集,则 a 的取值范围是____________.

2. 已知 F_1、F_2分别是椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b}(0<b<3)$的左、右焦点. 若在椭圆的右准线上存在一点 P,使得线段 PF_1 的垂直平分线过点 F_2,则 b 的取值范围是__________.

3. 已知函数$f(x)=\begin{cases}3x-1 & x\leqslant 1,\\ \frac{2x+3}{x-1} & x>1.\end{cases}$若函数 $y=g(x)$ 的图象与函数 $y=f^{-1}(x+1)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,则 $g(11)$ 的值是__________.

4. 已知复数列$\{a_n\}$的通项为:$a_n=(1+\mathrm{i})\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)\cdots\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n}}\right)$,则$|a_n-a_{n+1}|=$__________.

5. 设 n 为自然数,$f(n)$为 n^2+1 的各位数字之和,定义$f_1(n)=f(n)$,$f_{k+1}(n)=f(f_k(n))$,则 $f_{2012}(2013)=$__________.

6. 已知四面体的 6 条棱长分别为 2、2、2、2、a、a,且这样的四面体恰有两个,则 a 的取值范围是__________.

7. 已知 $A=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 2\}$,$B=\{(x,y)\mid (x-6)^2+y^2\leqslant 4\}$,则 $C=\{(x,y)\mid x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},(x_1,y_1)\in A,(x_2,y_2)\in B\}$ 所表示区域的面积是__________.

8. 在若干立方体的每一个面上各写一个十进制数码,使得可用它们拼出任一 30 位数,最少需要__________个立方体.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 已知F_1、F_2分别是双曲线$x^2-\frac{y^2}{3}=1$的左、右焦点,过F_1斜率为k的直线l_1交双曲线的左、右两支分别于A、C两点,过F_2且与l_1垂直的直线l_2交双曲线的左、右两支分别于D、B两点.

(1)求k的取值范围;

(2)求四边形$ABCD$面积的最小值.

10. 对实数x,y,z,求$\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos 2z+\sin z\cdot\cos 4x$的最大值.

11. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_0=\frac{1}{2}$,$a_n=\frac{a_{n-1}^2+1}{a_{n-1}+1}$,$n\in\mathbf{N}_+$,求证:$\frac{2^n}{2^n+1}<a_n<1$.

全国高中数学联赛模拟题(12)加试

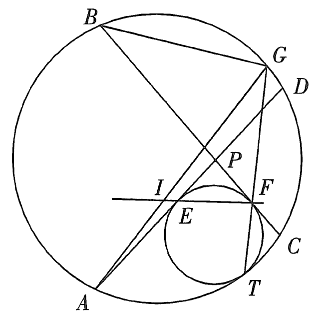
(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校______________姓名____________编号__________得分__________

一、(本题满分 40 分)

圆 O 的弦 AD 和 BC 交于圆内一点 P,圆 K 在 AP,PC 和圆 O 所夹区域内,且切 AD 于 E,切 BC 于 F,切圆 O 于 T. TF 交圆 O 与另一点 G,AG 交 EF 于 I. 求证:

(1)A、E、T、I 四点共圆;　　(2)$GB=GI$.



第一题图

二、(本题满分 40 分)

设正整数 $n\geqslant 3$. 试求出所有非常值实系数多项式 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$,使得对于每一个 $x\in\mathbf{R}$,均有

$$f_k(x)f_{k+1}(x)=f_{k+1}(f_{k+2}(x))(1\leqslant k\leqslant n),$$

其中,规定 $f_{n+1}(x)=f_1(x)$,$f_{n+2}(x)=f_2(x)$.

三、(本题满分 50 分)

我们对放置于点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 及点 O 处的卡片进行操作($n \geqslant 3$). 所谓一次操作是指

(1)若某个点 A_i 处的卡片数目不少于 3,则可从中取出 3 张,在点 A_{i-1}, A_{i+1} 及 O 处各放一张(这里 $A_0 = A_n, A_{n+1} = A_1$);或者

(2)若点 O 处的卡片数目不少于 n,则可从中取出 n 张,在点 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 处各放一张.

证明:只要放置于这 $n+1$ 个点处的卡片总数不少于 n^2+3n+1,则总能通过若干次操作,使每个点处的卡片数目均不小于 $n+1$.

四、(本题满分 50 分)

对给定的正整数 n,试求不能表示成 $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{a_i} \times 2^{b_i}$ 形式的最小正整数 d_n,其中,a_i、b_i($i=1, 2, \cdots, n$)均为非负整数.

全国高中数学联赛模拟题(13)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿编号＿＿＿＿＿得分＿＿＿＿＿

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 已知 $\min\{\log_3(3x+5),\sqrt{x^2-x-2}\}<2$,则实数 x 的取值范围是＿＿＿＿＿＿＿＿.

2. 一个正六面体的各个面和一个正八面体的各个面都是边长为 a 的正三角形,这样的两个多面体的内切球的半径之比是＿＿＿＿＿＿.

3. 设 a,b,c 都是正实数,且 $a+b+c=1$,则 $a^2+b^2+c^2+\lambda\sqrt{abc}\leqslant 1$ 恒成立的实数 λ 的最大值是＿＿＿＿＿＿.

4. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $\angle B$ 的平分线交 AC 于 K.若 $BC=2,CK=1,BK=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,则 $\triangle ABC$ 的面积为＿＿＿＿＿＿＿＿.

5. 对于自然数 n,将其各位数字之和记为 a_n,如 $a_{2\,009}=2+0+0+9=11$,$a_{2\,010}=2+0+1+0=3$,则 $a_1+a_2+\cdots+a_{2\,010}=$＿＿＿＿＿＿＿＿.

6. 两个三位数 m,n 恰有一个数位的数字不同,且 n 是 m 的倍数,则这样的三位整数对 (m,n) 共有＿＿＿＿＿＿＿＿＿组.

7. 设抛物线 $y^2=x$ 的一弦 PQ 被直线 $l:y=k(x-1)+1(k\in\mathbf{Z})$ 垂直平分,则弦 PQ 的长等于＿＿＿＿＿＿.

8. 同时抛掷两枚骰子,如果至少有一枚出现了 3 点或 4 点,则称这次抛掷为“好点”. 连续抛掷 270 次,那么出现“好点”的数学期望为＿＿＿＿＿＿＿.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 求所有的角 α,使得集合 $\{\sin\alpha,\sin2\alpha,\sin3\alpha\}=\{\cos\alpha,\cos2\alpha,\cos3\alpha\}$.

10. 已知多项式 $P(x)$、$Q(x)$ 和 $R(x)$ 满足

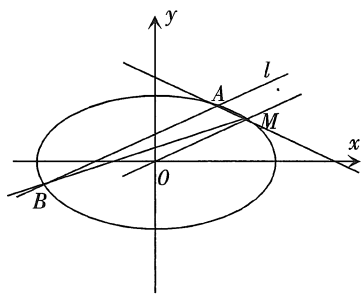
$$2xP(x^3)+Q(-x-x^2)=(1+x+x^2)R(x).$$

求证:$x-1$ 是 $P(x)-Q(x)$ 的一个因式.

11. 已知椭圆 C 过点 $M(2,1)$,两个焦点分别为 $(-\sqrt{6},0)$,$(\sqrt{6},0)$. O 为坐标原点,平行于 OM 的直线 l 交椭圆 C 于不同的两点 A,B.

(1)求 $\triangle OAB$ 面积的最大值;

(2)证明:直线 MA,MB 与 x 轴围成一个等腰三角形.



第11题图

全国高中数学联赛模拟题(13)加试

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校____________________姓名_____________编号___________得分___________

一、(本题满分 40 分)

给定凸六边形 $ABCDEF$,其中 $AB /\!/ DE$,$BC /\!/ EF$,$CD /\!/ FA$. 直线 AB 与 DE,直线 BC 与 EF,直线 CD 与 FA 的距离相等.

求证:$AD+BE+CF$ 不超过六边形 $ABCDEF$ 的周长.

二、(本题满分 40 分)

已知 m,n 为正整数,$p\geqslant 5$ 为素数,解不定方程

$$m(4m^2+m+12)=3(p^n-1).$$

三、(本题满分 50 分)

设 n,k 为给定的大于 1 的整数,非负实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n;c_1,c_2,\cdots,c_n$ 满足:

(1) $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$,且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$;

(2) 对 $m=1,2,\cdots,n$,有 $c_1+c_2+\cdots+c_m\leqslant m^k$.

求 $c_1a_1^k+c_2a_2^k+\cdots+c_na_n^k$ 的最大值.

四、(本题满分 50 分)

在 10×10 的正方形单元格中填入整数 $1,2,\cdots,100$,使得每两个相邻格(有公共边的方格称为相邻)中的数之和都不小于 S,试求 S 的最大值.

全国高中数学联赛模拟题(14)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校______________姓名__________编号__________得分__________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 已知函数$f(x)=\dfrac{m-2\sin x}{\cos x}$在区间$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递减,则实数 m 的取值范围是______________.

2. 若非空集合 $A=\{x|2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$,$B=\{x|3\leqslant x\leqslant 22\}$,则能使 $A\subseteq(A\cap B)$ 成立的所有 a 的集合是__________.

3. 正三棱锥 $V-ABC$ 的侧棱长为 3,底面边长为 2,过底边 AB 的截面交侧棱 VC 于点 D. 则截面$\triangle ABD$ 面积的最小值是__________.

4. 设任意实数 $x_0>x_1>x_2>x_3>0$,要使 $\log_{\frac{x_0}{x_1}}2\ 011+\log_{\frac{x_1}{x_2}}2\ 011+\log_{\frac{x_2}{x_3}}2\ 011\geqslant k\log_{\frac{x_0}{x_3}}2\ 011$ 恒成立,则 k 的最大值是______________.

5. 从一个有 n 条棱的凸多面体 P,切去以其每个顶点为顶点的各一个棱锥,得到一个新的凸多面体 Q. 这些被切去的棱锥的底面所在的平面在 P 上或内部互不相交,则凸多面体 Q 的棱数是__________________.

6. 已知直线 $y=k(x+2)(k>0)$与抛物线 $C:y^2=8x$ 相交于 A、B 两点,F 为 C 的焦点,若 $FA=2FB$,则 $k=$________________.

7. 将 4 个相同的红球和 4 个相同的蓝球排成一行,从左至右依次对应序号 1,2,…,8. 若同色球之间不加区分,则 4 个红球对应序号之和小于 4 个蓝球序号之和的排列共有______________个.

8. 两个两位数,它们的差是 52,它们平方后得到的数的末两位数字相同,则这两个数是______________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 设函数$f(x)=x^2+ax+b$(a、b为实常数),数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$定义为

$$a_1=\frac{1}{2},2a_{n+1}=f(a_n)+15,b_n=\frac{1}{2+a_n}(n=1,2,\cdots).$$

已知不等式$|f(x)|\leqslant|2x^2+4x-30|$对任意实数$x$均成立.

(1)求实数a、b的值;

(2)若将数列$\{b_n\}$的前n项的和与乘积分别记为S_n、T_n,证明:对任意正整数n,$2^{n+1}T_n+S_n$为定值;

(3)证明:对任意正整数n,都有$2\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]\leqslant S_n<2$.

10. 已知$a,b,c\in\mathbf{R}^+$求证:

$$\frac{1}{3abc}+\frac{2}{a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2}\geqslant\frac{1}{a^2b+b^2c+c^2a}+\frac{1}{ab^2+bc^2+ca^2}.$$

11. 已知抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F,准线与x轴的交点为K,过K作直线l交抛物线于A、B两点,其中A在线段KB上,记直线AF与抛物线的另一交点为D,试求$\triangle KBD$的内切圆半径r的取值范围.

全国高中数学联赛模拟题(14)加试

（考试时间:150 分钟 满分:180 分）

学校____________________姓名_____________编号____________得分____________

一、(本题满分 40 分)

锐角$\triangle ABC$中,O、H、G分别为三角形的外心、垂心和重心. $OD\perp BC$于D,$HE\perp CA$于E,F为AB的中点. 若$\triangle ODC$、$\triangle HEA$和$\triangle GFB$的面积相等,求$\angle C$的所有可能取值.

二、(本题满分 40 分)

已知实数$a,b,c\in[-1,1]$,且满足

$$1+2abc\geqslant a^2+b^2+c^2.$$

求证:对任意正整数n,均有

$$1+2(abc)^n\geqslant a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}.$$

三、(本题满分 50 分)

求所有大于 1 的正奇数 n,使得存在 $1,2,\cdots,n$ 的一个置换 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,满足:对任意正整数 k $(1\leqslant k\leqslant n)$,$n$ 整除 $a_k^2-a_{k+1}-1$ 和 $a_k^2-a_{k+1}+1$ 中的一个(规定 $a_{n+1}=a_1$).

四、(本题满分 50 分)

无穷大的方格纸原来是白色的,现有 n 个小方格被染成黑色. 在时刻 $t=1,2,\cdots$时,都为方格纸上的方格重新染色,规则如下:对每一个方格 K,都将其染成在前一时刻 K 本身及其上邻和右邻这三个方格中多数所具有的颜色.

(1)证明:经过有限时刻,纸上将不再剩有黑色方格;

(2)证明:黑色方格的全部消失不迟于时刻 $t=n$.

全国高中数学联赛模拟题(15)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校____________________ 姓名_____________ 编号___________ 得分___________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 若点(x,y)是区域$|x|+|y|\leqslant 1$内的动点,则$z=ax+y(a>0)$的最大值是____________.

2. 计算$\cot 20^\circ\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ\tan 70^\circ-4\cos^2 20^\circ=$__________________.

3. 已知$ABCD-A_1B_1C_1D_1$为长方体,E、F分别为棱AA_1、CC_1的中点,则在空间中与直线A_1D_1,EF,CD都相交的直线有________________条.

4. 如图所示的三角形数阵,满足:(1)第 1 行的数为 1;(2)第$n(n\geqslant 2)$行首尾两数均为$2n-1$,其余的数都等于它肩上的两个数相加,则第$n+1$行中的第 2 个数是____________(用n表示).

5. 设$[x]$表示不超过x的最大整数,则当$0\leqslant x\leqslant 10$时,$f(x)=[x]+[2x]+[3x]+[4x]$表示的所有不同整数的个数是______________.

1
3　3
5　6　5
7　11　11　7
9　18　22　18　9
…　…　…

第 4 题图

6. 已知函数$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,满足$f(0)\neq 0$,且对任意$x,y\in\mathbf{R}$,均有

$$f((x-y)^2)=f^2(x)-2xf(y)+y^2.$$

则$f(x)=$__________________.

7. 已知复数z满足$|z^2|+|z^2-1|=7$,若复数z在复平面上对应点为一条圆锥曲线,则其离心率为______________.

8. 已知a,b,c为正实数,且$a+b+c=12$,$ab+bc+ca=45$,则$\max\{a,b,c\}$的最小值为________________________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 已知实数 x,y,z 满足

$$\begin{cases} x+1=z+y, \\ xy+z^2+14-7z=0 \end{cases}$$

试求 x^2+y^2 的最值.

10. 已知圆 O 的方程为 $x^2+y^2=4$,圆 M 的方程为 $(x-5\cos\theta)^2+(y-5\sin\theta)^2=1(\theta\in\mathbf{R})$,过圆 M 上任意一点 P 作圆 O 的两条切线 PE、PF,切点分别为 E、F,试求 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$ 的最小值.

11. 若正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant 2)$ 满足

$$t=a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2.$$

求证:$\sum\limits_{i\neq j}\dfrac{a_i}{a_j}\geqslant\dfrac{(n-1)^2t}{t-1}$.

全国高中数学联赛模拟题(15)加试

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校____________________姓名_____________编号___________得分___________

一、(本题满分 40 分)

已知锐角$\triangle ABC$不是等腰三角形,O和I分别为其外心和内心. $\triangle ABC$的内切圆I分别与三边BC、CA、AB相切于点D、E、F. 若直线AI与OD交于点P,BI与OE交于点Q,CI与OF交于点R,且M为$\triangle PQR$的外心. 求证:I、M、O三点共线.

二、(本题满分 40 分)

对自然数n,用$f(n)$表示闭区间$[n^2,2n^2]$中完全平方数的个数,求证:$f(n)$单调不减且取满所有自然数.

三、(本题满分 50 分)

$n \geqslant 3$ 次多项式 $P(x)$ 有 n 个不同实根 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$，并且 $x_2 - x_1 < x_3 - x_2 < \cdots < x_n - x_{n-1}$. 证明：函数 $y = |P(x)|$ 在区间 $[x_1, x_n]$ 中的最大值在位于区间 $[x_{n-1}, x_n]$ 中的点上达到.

四、(本题满分 50 分)

某国国内某些城市间有双向直飞航线连接，使得从该国任何一个城市都可飞到该国任何别的城市(包含中转后到达). 现知，如果将其中任何一个由奇数条航线所形成的环状闭路上的每一条航线都关闭停用，那么就不能从任何城市飞往其他任何城市. 证明：可以让该国各个城市分别属于 4 个省份，使得每一条航线都连接着属于不同省份的城市.

全国高中数学联赛模拟题(16)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿编号＿＿＿＿＿得分＿＿＿＿＿

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 已知三个实数 a,b,c 成等比数列,且 $\log_c a,\log_b c,\log_a b$ 构成公差为 d 的等差数列,则 $d=$＿＿＿＿＿＿＿＿.

2. 已知锐角 $\triangle ABC$ 中,$\angle A=30°$,$BC=3$,H 为 $\triangle ABC$ 的垂心,则 AH 等于＿＿＿＿＿＿.

3. 正整数 n 满足下述两个条件:(1) n 分别被 14,15,16 整除;(2) 存在三个整数 $0<x<y<z<14$,使得 n 除以 x,y,z 的余数都是 3. 则 n 的最小值为＿＿＿＿＿＿＿＿.

4. 已知 F_1,F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点,P 为双曲线右支上一点(除去右顶点),$\odot A$ 与 $\triangle PF_1F_2$ 的边 PF_2 相切,与边 F_1F_2,F_1P 的延长线也都相切,当点 P 在双曲线右支上运动时,圆心 A 的轨迹方程是＿＿＿＿＿＿.

5. 已知实系数多项式 $P(x)$,使得 $(x+1)P(x-1)-(x-1)P(x)$ 是常数,则 $P(x)=$＿＿＿＿＿＿＿＿.

6. 设函数 $f(x)=\ln x$ 的定义域为 $(M,+\infty)$ $(M>0)$,对所有满足 $M<a\leqslant b\leqslant c$,且 $a^2+b^2=c^2$ 的实数 a,b,c,均有 $f(a)+f(b)>f(c)$,则 M 的最小值为＿＿＿＿＿＿＿＿.

7. 设平行四边形 $ABCD$ 中,$AB=4$,$AD=2$,$BD=2\sqrt{3}$,则平行四边形 $ABCD$ 绕直线 AC 旋转所得的旋转体的体积为＿＿＿＿＿＿＿＿.

8. 设 $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,则使得 $f(f(x))$ 为常值的映射 $f:A\to A$ 的个数为＿＿＿＿＿.

二、解答题(本大题共 3 小题,第 9 题 16 分,第 10、11 题 20 分,共 56 分)

9. 设 $x_1,x_2(x_1<x_2)$是方程 $a^2x^2+bx+1=0$ 的两个实根,$x_3,x_4(x_3<x_4)$是方程 $ax^2+bx+1=0$ 的两个实根. 若 $x_3<x_1<x_2<x_4$,求实数 a 的取值范围.

10. 已知长为 4 的线段 AB,两端点分别在双曲线 $x^2-4y^2=1$ 的两条渐近线上. 求证:若 AB 的中点 M 在双曲线上,则直线 AB 与双曲线相切.

11. 已知正实数 a,b,c 满足 $a+b+c=1$,求证:

$$\frac{1-a^2}{a+bc}+\frac{1-b^2}{b+ca}+\frac{1-c^2}{c+ab}\geqslant 6.$$

全国高中数学联赛模拟题(16)加试

（考试时间:150 分钟　满分:180 分）

学校____________________姓名______________编号____________得分____________

一、（本题满分 40 分）

已知梯形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，且 $\angle ABC>90°$. M 为边 AB 上一点，$\triangle MAD$ 和 $\triangle MBC$ 的外心分别为 O_1 和 O_2，$\triangle MO_1D$ 和 $\triangle MO_2C$ 的外接圆的另一交点为 N. 证明：直线 O_1O_2 经过点 N.

二、（本题满分 40 分）

称整数 a 为友好数，若方程 $(m^2+n)(n^2+m)=a(m-n)^3$ 有正整数解 (m,n).

(1) 求证：集合 $\{1,2,\cdots,2012\}$ 中有不少于 500 个友好数；

(2) 判断 $a=2$ 是否为友好数.

三、(本题满分 50 分)

设$\{a_n\}$是有下列性质的实数列:

$$1 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots \quad ①$$

又$\{b_n\}$是由下式定义的数列:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}}, n=1,2,3,\cdots \quad ②$$

证明:对任意$0 \leqslant c < 2$,总存在一个具有性质①的数列$\{a_n\}$,使得由②导出的数列$\{b_n\}$中有无穷多个下标n,满足$b_n > c$.

四、(本题满分 50 分)

$n(\geqslant 4)$人的班级中一些学生是朋友. 已知,任意$n-1$人可以围圆桌就坐,使得每人的两旁都是他的朋友,但n人不能. 求n的最小值.

全国高中数学联赛模拟题(17)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿编号＿＿＿＿＿得分＿＿＿＿＿

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 若函数 $f(x)=\ln(ae^x-x+1)$ 的值域为 $\mathbf{R}$,则实参数 a 的最大值为＿＿＿＿＿＿.

2. 已知四面体 $ABCD$ 的体积为 20,且有 $BC=5$,$CD=6$,$DB=7$,若 A 在面 BCD 上的射影恰为 $\triangle BCD$ 的内心,则三角形 ACD 的面积为＿＿＿＿＿＿.

3. 非负实数 x,y,z 满足 $x^2+y^2+z^2+x+2y+3z=\frac{13}{4}$,则 $x+y+z$ 的最大值为＿＿＿＿＿＿.

4. 已知 $ABCD$ 为圆 $M:(x-3)^2+(y-3)^2=4$ 的内接正方形,E 为边 AB 的中点,F 在线段 AD 上,则 $\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{ME}$ 的最大值是＿＿＿＿＿＿.

5. 函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 对一切 $x,y,z\in\mathbf{R}$ 满足不等式

$$f(x+y)+f(y+z)+f(z+x)\geqslant 3f(x+2y+z).$$

则所有满足条件的函数 $f(x)=$＿＿＿＿＿＿.

6. 已知 O 为坐标原点,$B(4,0)$,$C(5,0)$,过 C 作 x 轴的垂线,M 是这垂线上的动点,以 O 为圆心,OB 为半径作圆,MT_1、MT_2 是圆的切线,则 $\triangle MT_1T_2$ 的垂心的轨迹方程是＿＿＿＿＿＿.

7. 形如 $1^n+2^n+3^n+4^n(n\in\mathbf{N}^*)$ 的数的末尾最多有＿＿＿＿＿＿个数码 0.

8. 已知集合 $A\subseteq\{1,2,\cdots,9\}$,且满足对任意 $a,b\in A$(a,b 不同,A 中至少有两个元素),均有 $|a-b|>1$,则满足要求的集合 A 的个数为＿＿＿＿＿＿.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 在$\triangle ABC$中,求$f=\sin\frac{A}{2}\sin B\sin C$的最大值.

10. 在直角坐标系中,O为坐标原点,A、B是第一象限内的点,并且A在直线$y=x\tan\theta$上(其中$45^\circ<\theta<90^\circ$),OA长度为$\frac{1}{\sqrt{2}-\cos\theta}$,$B$是双曲线$x^2-y^2=1$上使得$\triangle OAB$的面积最小的点,问:当$\theta$取何值时,$\triangle OAB$的面积最大?最大值为多少?.

11. 设数列$\{a_n\}$满足:$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}(n\geqslant 1)$,且$a_1=1$. 求证:对任意$n>1$,$\frac{2}{\sqrt{a_n^2-2}}$均为整数.

全国高中数学联赛模拟题(17)加试

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校____________________姓名_____________编号____________得分____________

一、(本题满分 40 分)

在$\triangle ABC$中,$AC>AB$,H为垂心,M为BC边上的中点,AD为BC上的高,且$AD=BC$.求证:$HD+HM=MC$.

二、(本题满分 40 分)

证明:存在无穷多个正整数对(m,n),使得$m\mid n^2+1$且$n\mid m^2+1$.

三、(本题满分 50 分)

已知正实数 a,b,c,d 满足

$$abcd=4 \text{ 和 } a^2+b^2+c^2+d^2=10.$$

求 $ab+bc+cd+da$ 的最大可能值.

四、(本题满分 50 分)

平面上给定了 100 个点. 证明:可以用一些圆来覆盖它们,这些圆的直径之和小于 100,并且其中任何两个圆的距离都大于 1(圆与圆之间的距离是指两个圆上的相距最近的点之间的距离).

全国高中数学联赛模拟题(18)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校________________姓名__________编号_________得分_________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 设函数 $f(x)=x\sin x(x\in\mathbf{R})$ 在 $x=x_0$ 处取得极值,则 $(1+x_0^2)(1+\cos 2x_0)$ 的值等于____________.

2. 设函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且 $f(2-x)=f(x)$. 若 $f(-1)-\frac{3}{f(-1)}>-2$,则 $f(2013)$ 的取值范围为________________.

3. 正三棱锥 $V-ABC$ 的侧棱长为 3,底面边长为 2,过底边 AB 的截面交侧棱 VC 于点 D. 则截面 $\triangle ABD$ 面积的最小值是________.

4. $\dfrac{\cos 15^\circ}{\cos 55^\circ\cdot\cos 65^\circ\cdot\sin 85^\circ}=$________________.

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,且 $S_n^2-2S_n-a_nS_n+1=0(n=1,2,\cdots)$,则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为______________.

6. 在平面直角坐标系中,定点 B 在 y 轴负半轴上,过点 B 的动直线 l 交椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 于 C、D,以 CD 为直径的圆恒过 x 轴上方的定点 A. 则 A 的坐标为__________.

7. 设 $M=\{1,2,3,4,5\}$,从 M 中任取四个元素 a_1、a_2、a_3、a_4(允许相同)作积. 则不同的积的个数为__________.

8. 定义 $f(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\frac{n}{i}\right]$,其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数,则 $f(2013)-f(2012)=$______________.

二、解答题(本大题共 3 小题,第 9 题 16 分,第 10、11 题 20 分,共 56 分)

9. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ 在 $\mathbf{R}$ 上为单调函数,求证:$f(1)\neq 0$.

10. 已知数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 满足:$a_1=1,b_1=-1,a_{n+1}=a_n(1-2a_{n+1}),b_{n+1}-b_n=(1-b_n)^2b_{n+1}$.

(1)证明:$\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}+\frac{1}{b_k}\right)>n^2+n+\frac{3}{2}$;

(2)若对任意的正整数 n,不等式

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant k\sqrt{\frac{-1}{b_1b_2\cdots b_{n+1}}}$$

成立,求实数 k 的最大值.

11. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{13^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ 和圆 $D:(x-10)^2+y^2=\frac{225}{64}$. 求证:存在 $\triangle AMN$,使得 A 点坐标为 $(0,5)$,M、N 为椭圆两点且圆 D 为 $\triangle AMN$ 的内切圆.

全国高中数学联赛模拟题(18)加试

(考试时间:150 分钟 满分:180 分)

学校____________________姓名_____________编号___________得分___________

一、(本题满分 40 分)

已知 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心,P 是该三角形内一点,过 H 作 AP、BP、CP 的垂线,分别交直线 BC、CA、AB 于点 M、N、L. 证明:M、N、L 三点共线.

二、(本题满分 40 分)

对正整数 n,求

$$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

小数点后第一位的数字.

三、(本题满分 50 分)

在 $m\times n$ 的方格中,任意填入 mn 个互不相同的数(每个方格填一个数). 用红笔圈出每行中最大的 $s(s\leqslant n)$ 个数,用蓝笔圈出每列中最大的 $t(t\leqslant m)$ 个数,问:至少有多少个数被红、蓝笔同时圈出? 并证明你的结论.

四、(本题满分 50 分)

设 p 是大于 7 的素数,s 是给定的整数. 求证:存在正整数 n 及正整数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,使得

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i^2-1)\equiv s(\bmod p).$$

全国高中数学联赛模拟题(19)第一试

（考试时间:80 分钟　满分:120 分）

学校__________ 姓名________ 编号________ 得分________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 设 $a,b\in\mathbf{R}$,若 $x>0$ 时恒有 $0\leqslant x^4-ax^3-x+b\leqslant(x^2-1)^2$,则 $a+b=$________.

2. 已知 3 个正整数 x,y,z 的最小公倍数为 2100,则 $x+y+z$ 的最小值为________.

3. 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,侧棱 $AA_1\perp$底面 $ABCD$,$AB/\!/CD$,$AA_1=1$,$AB=3k$,$AD=4k$,$BC=5k$,$DC=6k(k>0)$. 将与四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 形状和大小完全相同的两个四棱柱拼接成一个新棱柱,在这些拼接成的新棱柱中,其中表面积最小的是一个四棱柱,则 k 的取值范围是________.

4. 设多项式 $(x+1)^3(x+2)^3(x+3)^3$ 的展开式中 x^k 的系数为 a_k,则 $a_2+a_4+a_6+a_8$ 的值为________.

5. F 为双曲线 $x^2-y^2=1$ 的右焦点,l 为双曲线的右准线,A、B 是双曲线右支上两个动点,且满足 $AF\perp BF$,线段 AB 的中点 M 在 l 上的投影为 N,则$\dfrac{|MN|}{|AB|}$的最大值为________.

6. 方程 $4\sin x(1+\cos x)=3\sqrt{3}$的解集为________.

7. 非负实数 x,y,z 满足 $x^2+y^2+z^2+x+2y+3z=\dfrac{13}{4}$,则 $x+y+z$ 的最小值为________.

8. 将 5×1 板分割为一些 $m\times1$ 块(各块的 m 可不同,但均为整数),每块染红色、蓝色或绿色. 则三色都出现的分割染色方案数为________.

例如,(红 1×1,绿 2×1,蓝 2×1)是一个允许的方案,注意若将蓝 2×1 再分为两个蓝 1×1,得到的方案视为不同.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 数列$\{a_n\}$$(n\geqslant 1)$满足$a_1=1,a_2=2,a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n$,求$\{a_n\}$的前$n$项和$S_n$.

10. 已知$a,b,c\in[-1,2]$,求证:

$$abc+4\geqslant ab+bc+ca.$$

11. 已知P是以椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的长轴为直径的圆上任一点(异于椭圆顶点),$PA$、$PB$分别与椭圆相切于点$A$和$B$,求$\triangle OAB$面积的最大值(其中$O$为坐标原点).

全国高中数学联赛模拟题(19)加试

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校____________________姓名_____________编号___________得分___________

一、(本题满分 40 分)

已知 $ABCD$ 是圆 ω 的内接四边形,P 是 AC 延长线上一点,并使得 PB,PD 是圆 ω 的切线. 过 C 点作圆 ω 的切线与直线 PD,AD 分别交于 Q,R. 若 E 是 AQ 与圆 ω 的另一个交点. 求证:B,E,R 三点共线.

二、(本题满分 40 分)

称整数集 A 为合格的:若对任意 $x,y\in A$(允许 $x=y$)和任意整数 k 均有

$$x^2+kxy+y^2\in A.$$

求所有非零整数对(m,n),使得包含 m 及 n 的合格集只有全体整数集 $\mathbf{Z}$.

三、(本题满分 50 分)

设二次函数$f(x)=x^2+ax+b$,若方程$f(f(x))=0$有 4 个不同的实根,且其中两个根的和等于-1,求b的最大可能值.

四、(本题满分 50 分)

给定正整数n,由一些区间$I=[i,j]$(i,j为整数,$0\leqslant i<j\leqslant n$)组成的区间族$F$称为友好族:若当$I_1=[i_1,j_1]$,$I_2=[i_2,j_2]\in F$满足$I_1\subseteq I_2$时,总有$i_1=i_2$或$j_1=j_2$.

(1)求友好族中区间个数的最大值;

(2)求最大友好族的个数.

全国高中数学联赛模拟题(20)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校________________姓名__________编号_________得分________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 函数 $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\cdots+\frac{1}{x+2013}$ 图象的对称中心是____________.

2. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,M 为棱 C_1D_1 的中点,则 A_1D 和平面 A_1MC 所成角的余弦值为____________.

3. 已知复数 x,y,z 满足 $x+y+z=x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3=3$,则 $(x,y,z)=$____________.

4. 正方形 $ABCD$ 中,M 为 AB 中点,E、F 分别为边 AD 和 BC 上的点,则 $\angle EMF$ 为钝角的概率为____________.

5. 设三个不同的正整数 a,b,c 成等差数列,且以 a^5,b^5,c^5 为三边长可以构成一个三角形,则 a 的最小可能值为____________.

6. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线与 x 轴交于点 A,过 A 作抛物线的一条割线交抛物线于 B、C 两点,过焦点 F 作平行于 AC 的直线,交抛物线于 M、N 两点,则 $\frac{|FM|\cdot|FN|}{|AB|\cdot|AC|}=$____________.

7. 已知函数 $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ 满足 $f(-2)=-2$,且对任意整数 x,y 均有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy+1$,则 $f(x)=$____________.

8. 两队进行个人对抗赛,每队 3 个选手,任两个不同队的选手各赛 2 场. 全部 18 场比赛安排在 6 天进行,每天 3 场同时比赛. 有____________种不同的赛程安排.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 在等腰$\triangle ABC$中,设$BC=a,AB=AC=b$,已知$a^6-6a^4b^2+9a^2b^4-b^6=0$.求等腰$\triangle ABC$的顶角$A$的度数.

10. A、B分别是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右顶点和上顶点,点$M$在线段$AB$上运动,直线$OM$交椭圆于$C,D$两点,其中$D$、$O$在$AB$同侧.$\triangle ABC$和$\triangle ABD$的面积分别记为$S_1,S_2$,求$\frac{S_1}{S_2}$的取值范围.

11. 已知数列$\{a_n\}$满足:$\frac{1}{12}<a_1<1$,且对任意正整数n,均有

$$a_{n+1}=\sqrt{(n+2)a_n+1}.$$

求证:(1)$a_n>n-\frac{2}{n}$;

(2)数列$b_n=2^n\left(\frac{a_n}{n}-1\right)(n=1,2,\cdots)$为单调数列.

全国高中数学联赛模拟题(20)加试

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

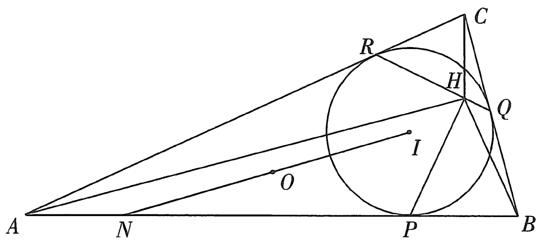
学校____________________姓名_____________编号___________得分___________

一、(本题满分 40 分)

如图,不等边锐角三角形 ABC 的内切圆与三边 AB、BC、CA 分别切于点 P、Q、R,垂心 H 在线段 QR 上.

(1)证明:$PH\perp QR$;

(2)设 O、I 分别为三角形 ABC 的外心和内心,直线 OI 交 AB 边于点 N,求证:$AP=BN$.



第一题图

二、(本题满分 40 分)

求所有整数 $m\geqslant 2$,使得区间 $\left[\frac{m}{3},\frac{m}{2}\right]$ 中的每个整数 n 都满足 $n\mid \mathrm{C}_n^{m-2n}$.

三、(本题满分 50 分)

已知实数 x,y,z,p,q 和正整数 n,满足方程组

$$\begin{cases} y = x^{2n} + px + q, \\ z = y^{2n} + py + q, \\ x = z^{2n} + pz + q. \end{cases}$$

求证:$x^2y + y^2z + z^2x \geqslant x^2z + y^2x + z^2y$.

四、(本题满分 50 分)

一个 10×10 的表格包含了 100 个方格. 定义一个 2×2 方格组为一个“块”. 已知由 n 个“块”组成的集合 C 可以覆盖整个表格(即表格中的每一个单元格都被 C 中的某一块覆盖),但是 C 中任意 $n-1$ 个“块”均不能覆盖表格. 试求 n 的最大值.

全国高中数学联赛模拟题(21)第一试

（考试时间:80 分钟　满分:120 分）

学校____________________姓名______________编号____________得分____________

一、填空题（本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分）

1. 若实数 x,y 满足 $\max\{1-x,x^2-1\}\leqslant y\leqslant x+2$,则 $u(x,y)=2x+y$ 的取值范围是____________________.

2. 三个学生独立的参加考试,随机变量 ξ 代表通过考试的学生数,其分布列如下:

$$\begin{pmatrix}\xi & 0 & 1 & 2 & 3\\ p & \frac{2}{5} & \frac{13}{30} & \frac{3}{20} & \frac{1}{60}\end{pmatrix}.$$

三个学生中通过考试的概率最小的是________________(给出具体数值).

3. 若在$\triangle ABC$ 中,有 $2\sin B\sin(A+B)-\cos A=1,2\sin C\sin(C+B)-\cos B=0$,则$\triangle ABC$ 的最大内角的值为____________.

4. 过双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{2}=1$ 的右焦点 F 作与 x 轴垂直的直线 l 与两条渐近线交于 A、B 两点,P 是 l 与双曲线的一个交点,若$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$,则 $mn=$________________.

5. 已知 a,b,c,x,y,z 为复数,且 $a=\frac{b+c}{x-2},b=\frac{c+a}{y-2},c=\frac{a+b}{z-2}$,若 $xy+yz+zx=567,x+y+z=2011$,则 $xyz=$________________.

6. 若 X 是棱长为 a 的正四面体 $ABCD$ 内一点,以 X 在四面体 $ABCD$ 的四个面上的射影为顶点的新四面体的体积的最大值为____________________.

7. 若正实数 x,y 满足$(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=2013$,则 $x+y$ 的最小值为____________.

8. 设$f(x)=a_5x^5+a_4x^4+\cdots+a_1x+a_0$,其中 $a_i\in\mathbb{Z}(i=0,1,\cdots,5)$,若对于任意的实数 $x\in\{0,1,2,3,4,5\}$,均有 $0\leqslant f(x)\leqslant 120$,则不同的函数 $f(x)$ 的个数为______________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 设$\mathbb{N}^*$为正整数集合,定义:$a_1=2$,

$$a_{n+1}=\min\left\{\lambda\ \middle|\ \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{\lambda}<1,\lambda\in\mathbb{N}^*\right\},n=1,2,\cdots.$$

求证:$a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$.

10. 将编号为1,2,…,9的九个小球随机放置在圆周的九个等分点上,每个等分点上各有一个小球.设圆周上所有相邻两球号码之差的绝对值之和为S.求使S达到最小值的放法的概率.(注:如果某种放法,经旋转或镜面反射后可与另一种放法重合,则认为是相同的放法)

11. 已知直线$y=x$与椭圆$C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{11}=1$交于$A,B$两点,过椭圆$C$的右焦点$F$、倾斜角为$\alpha$的直线$l$交弦$AB$于点$P$,交椭圆$C$于点$M,N$.

(1)用α表示四边形$MANB$的面积;

(2)求四边形$MANB$的面积取到最大值时直线l的方程.

全国高中数学联赛模拟题(21)加试

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校____________________姓名____________编号___________得分___________

一、(本题满分 40 分)

凸四边形 $ABCD$ 内接于圆 O,直线 AB 和 CD 交于点 M,直线 AD 与 BC 交于点 N. P,Q,S,T 分别为 $\angle MAN$ 和 $\angle MBN$, $\angle MBN$ 和 $\angle MCN$, $\angle MCN$ 和 $\angle MDN$, $\angle MDN$ 和 $\angle MAN$ 的角平分线的交点,这四个点各不相同.

(1)求证:P,Q,S,T 四点共圆;

(2)记 I 为 P,Q,S,T 四点所共圆的圆心,E 为 AC 和 BD 的交点,求证:E、O、I 三点共线.

二、(本题满分 40 分)

求所有的自然数 n,使得存在$(1,2,\cdots,n)$的一个置换$(p_1,p_2,\cdots,p_n)$满足:集合$\{p_i+i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$和$\{p_i-i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$均为 $\bmod n$ 的完全剩余系.

三、(本题满分 50 分)

证明:对任意正整数 n,集合 $\{2,3,4,\cdots,3n+1\}$ 可以划分为 n 个三元组,每个三元组中的三个数均为一个钝角三角形的三边长.

四、(本题满分 50 分)

对任何正整数 n 及一组正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,求证:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_k^{-1}}\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

请问不等式右边的系数“2”是否可以被一个更小的正数取代?

全国高中数学联赛模拟题(22)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校____________姓名__________编号________得分________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 设 i 为虚数单位,则 $\sum\limits_{k=1}^{2012}(2013-k)\mathrm{i}^k=$________________.

2. 设 $f(x)$ 适合等式 $f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=x$,则 $f(x)$ 的值域是________________.

3. 过点 $M(2,0)$ 作两条互相垂直的射线,分别与双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的右支交于 P、Q 两点,则直线 PQ 所过定点坐标为________________.

4. 若关于 x 的方程 $\cos 2x+4a\sin x+a-2=0$ 在区间 $[0,\pi]$ 上有两个不同的解,则实数 a 的取值范围为________________.

5. 棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 在空间移动,但始终保持点 A、B 分别在 x 轴、y 轴上移动. 则点 C_1 到原点 O 的最远距离为________________.

6. 大于 1 的正整数 n 满足:n 和 n^4 均可表为两个相邻的整数的平方和,则 $n=$__________.

7. 设集合 $A=\{1,2,\cdots,n\}$,$B=\{n+1,n+2,\cdots,2012\}$,其中 n 是任意给定的正整数,且 $2\leqslant n\leqslant 2012$. 现从集合 A、B 中各随机取两个元素组成一个样本,用 P_{ij} 表示元素 i 和 j 同时出现在这个样本中的概率,则 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 2012}P_{ij}=$________________.

8. 若关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$($a,b,c\in\mathbb{R}$ 且 $a\neq 0$)有实根,且不等式 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant ma^2$ 恒成立,则正数 m 的最大值是________________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 已知线段AB为过抛物线$y^2=4x$焦点的弦,O为原点,求$\triangle OAB$的三边边长的平方和的取值范围.

10. 设数列$\{a_n\}$的各项均为正实数,且满足$a_{n+1}=a_n-a_n^2(n\in\mathbf{N}_+)$.

求证:对任意正整数n,均有$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i<1+\ln\frac{n+2}{3}$.

11. 设x,y,z是两两不同的实数,且满足$\begin{cases}y=x(4-x),\\z=y(4-y),\\x=z(4-z).\end{cases}$求$x+y+z$的所有可能值.

全国高中数学联赛模拟题(22)加试

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校________________姓名__________编号_________得分_________

一、(本题满分 40 分)

已知$\triangle ABC$内接于圆ω,圆ω在点A处的切线为l,D、E分别在AB、AC上,满足$\frac{BD}{AD}=\frac{AE}{CE}$.直线$DE$交圆$\omega$于点$F$、$G$两点.过点$D$且平行于$AC$的直线交$l$于$H$,过点$E$且平行于$AB$的直线交$l$于$I$.求证:$F,G,H,I$四点共圆,并且此圆与$BC$相切.

二、(本题满分 40 分)

设x是一个大于 1 的正整数,p是素数,$d\left|\frac{x^p-1}{x-1}\right.$.求证:$d\equiv 0$ 或 $1 \pmod p$.

三、(本题满分 50 分)

设正整数 $n \geqslant 2$. 求常数 $C(n)$ 的最大值,使得对于所有满足 $x_i \in (0,1)$ $(i=1,2,\cdots,n)$,且 $(1-x_i)(1-x_j) \geqslant \frac{1}{4}$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ 的实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,均有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant C(n) \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(2x_i x_j + \sqrt{x_i x_j}\right). \tag{1}$$

四、(本题满分 50 分)

设 $n \geqslant 4$, M 为三维空间中 n 个点组成的有限集,其中任意四点不在同一平面上. 将集合 M 中的点染成白色或黑色,使得任意一个与集合 M 至少交于四个点的球面具有这样的性质:这些交点中恰有一半的点为白色. 证明:集合 M 中所有的点均在一个球面上.

全国高中数学联赛模拟题(23)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校____________________姓名_____________编号___________得分___________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 已知在$\triangle ABC$中,$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=4\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$,则$\triangle ABC$的最大角为____________.

2. 设$f(x)=\frac{1}{2x+5}+\lg\frac{1-x}{1+x}$,则不等式$f\left[x\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]<\frac{1}{5}$的解集为________________.

3. 已知圆心在原点,半径为R的圆与联结两点$M(1,1)$,$N\left(\frac{7}{4},0\right)$的线段有公共点,则$R$的取值范围是_______________.

4. 从一个有 2 010 条棱的凸多面体P,切去以其每个顶点为顶点的各一个棱锥,得到一个新的凸多面体Q. 这些被切去的棱锥的底面所在的平面在P上或内部互不相交,则凸多面体Q的棱数是_________________.

5. 已知$x,y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,且若

$$\tan^2(x+y)+\cot^2(x+y)=3x-x^2-\frac{1}{4},$$

则$[x]+[y]$等于_______________(其中$[x]$表示不超过x的最大整数).

6. 四面体$ABCD$中,$AB=CD=6$,$AC=AD=BC=BD=5$,则内切球半径r是___________.

7. 袋子中原有一个黑球,每次有放回的从袋子中取出一个球,但每次放回的同时再向袋子中放一个白球,则在 2014 次取球后,取到黑球的总次数为偶数的概率为___________.

8. 如果存在整数$a_1,a_2,\cdots,a_n$(可以相同)满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1a_2\cdots a_n=n,$$

则称正整数n为"魅力数". 所有"魅力数"构成的集合为__________________.

二、解答题(本大题共 3 小题,第 9 题 16 分,第 10、11 题 20 分,共 56 分)

9. 已知关于 x 的方程 $kx=\sin x(k\in(0,1))$ 在 $(-3\pi,3\pi)$ 内有且仅有 5 个根,从小到大依次为 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5.

(1) 求证:$x_5=\tan x_5$;

(2) 是否存在常数 k,使得 x_2,x_4,x_5 成等差数列,若存在,求出 k,若不存在,说明理由.

10. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,$F_1$、$F_2$ 为其左右两焦点,A 为右顶点,过点 F_1 的直线 l 交椭圆于两点 P,Q,且有 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{2}(a+c)^2$,试求椭圆离心率 e 的最小值.

11. 已知正实数 a,b,c 满足 $abc=1$. 求证:

$$\frac{1}{a^5(b+2c)^2}+\frac{1}{b^5(c+2a)^2}+\frac{1}{c^5(a+2b)^2}\geqslant\frac{1}{3}.\qquad (*)$$

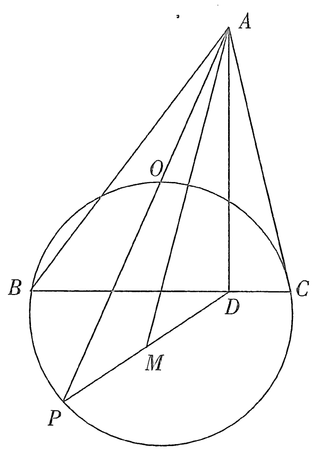
全国高中数学联赛模拟题(23)加试

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校______________姓名__________编号__________得分__________

一、(本题满分 40 分)

已知锐角$\triangle ABC$中,$AB\neq AC$,AD为BC边上的高,O是外心,AO的延长线交过O、B、C三点的圆于另一点P,记PD中点为M,求证:AM平分线段BC.



第一题图

二、(本题满分 40 分)

设正整数m,n和素数p满足$3^n=2^n+p^m$.求证:n为素数.

三、(本题满分 50 分)

要为正 n 边形的各条边和各条对角线染色,每条线段只染一种颜色(边和对角线都称为线段),但有公共端点的线段必须染为不同颜色. 至少需要多少种不同颜色?

四、(本题满分 50 分)

设 α 为实数,$1<\alpha<2$,证明:把 α 写成无穷乘积有唯一表达式

$$\alpha=\prod_{i=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n_i}\right),$$

其中,n_i 为正整数,满足 $n_i^2\leqslant n_{i+1}$.

全国高中数学联赛模拟题(24)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校____________姓名__________编号__________得分__________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 设 $x,y\in\mathbb{R}^+$,且 $(\sqrt{1+x^2}-x+1)(\sqrt{1+y^2}-y+1)\leqslant 2$,则 $\ln x+\ln y$ 的最小值为______________.

2. 已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 2 的正方体,点 M 为棱 AA_1 的中点. 若过 M,B_1,C 三点作一个平面截该正方体,则截面的面积等于______________.

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a,a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}$,若对任意 $n\geqslant 4$,均有 $\frac{3}{2}<a_n<2$,则 a 的取值范围为______________.

4. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1、F_2,过点 $A(0,a)$ 作椭圆的切线 l 交 x 轴负半轴于点 B,P 是点 F_1 关于直线 l 的对称点,若 $\triangle PF_1F_2$ 是等腰三角形,则椭圆 C 的离心率为______________.

5. 已知函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足:对任意实数 x,y,均有 $f(x)f(y)=f(x+y)+xy$,则 $f(2012)=$______________.

6. 已知 P 为 $\triangle ABC$ 内一点,直线 AP,BP,CP 分别交 BC,CA,AB 于点 D,E,F,且 $\frac{AP}{PD}+\frac{BP}{PE}+\frac{CP}{PF}=8$,则 $\frac{AP}{PD}\cdot\frac{BP}{PE}\cdot\frac{CP}{PF}=$______________.

7. 将 n 个不同的小球放入 n 个不同的盒子,设每个球落入各个盒子是等可能的,则空盒子个数的数学期望是______________.

8. 有______________个正整数 n 满足 $\left[\frac{2012}{n}\right]-\left[\frac{2012}{n+1}\right]=1$,其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 最初黑板上写有一个数码0,每次操作,将黑板上的每一个0换成001,将每一个1换成0,问经过n次操作后黑板上有多少个数码?

10. 设函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$满足对任意实数$x,y$,均有

$$|f(x+y)+\sin x+\sin y|\leqslant 2.$$

求证:$|f(x)|\leqslant 1+\cos x$.

11. 已知圆$C:(x-4)^2+(y-3)^2=36$的圆心为C. 定点$P(1,0)$,定直线l和圆C上动点Q满足:P、Q在直线l的同侧,C在直线l的另一侧. 以P、Q为焦点作与直线l相切的椭圆E,已知当Q在圆C上运动时,椭圆E的长轴长为定值.

(1)求直线l的方程;

(2)对于第一象限内任意2012个在椭圆E内的点,是否一定可以将它们分成两组,使得其中一组的横坐标之和不大于2013,另一组的纵坐标之和不大于2013? 请证明你的结论.

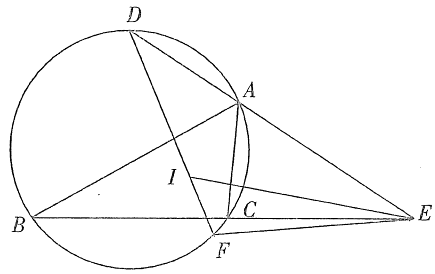
全国高中数学联赛模拟题(24)加试

(考试时间:150 分钟 满分:180 分)

学校____________ 姓名__________ 编号__________ 得分__________

一、(本题满分 40 分)

$\triangle ABC$ 中,$AB\neq AC$,ω 为$\triangle ABC$ 的外接圆,I 为$\triangle ABC$ 的内心,D 在圆 ω 上,且为$\overset{\frown}{BAC}$的中点,直线 DA 交 BC 于 E,直线 DI 与圆 ω 的另一交点为 F. 求证:$EI^2=EF^2+3IF^2$.



第一题图

二、(本题满分 40 分)

对于正整数 m,用 $S(m)$ 表示 m 的十进制表示中各位数字之和,$P(m)$ 表示 m 的十进制表示中各位数字之积. 求证:对于任意正整数 n,存在正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 同时满足

$$S(a_1)<S(a_2)<\cdots S(a_n)\text{和}S(a_i)=P(a_{i+1}),$$

其中 $i=1,2,\cdots,n,a_{n+1}=a_1$.

三、(本题满分 50 分)

不等式

$$\frac{a}{1+9bc+k(b-c)^2}+\frac{b}{1+9ca+k(c-a)^2}+\frac{c}{1+9ab+k(a-b)^2}\geqslant\frac{1}{2}$$

对满足 $a+b+c=1$ 的任意非负实数 a,b,c 恒成立,求实数 k 的最大值.

四、(本题满分 50 分)

令 $S=\{1,2,\cdots,2014\}$,对于 S 的每个非空子集 T,都选取一个 T 的元素作为 T 的代表元. 求将 S 的每个子集安排一个代表元的不同方式种数,使得满足:

对 S 的每个子集 D,若 D 是 S 的非空子集 A,B,C 的无交并(即子集 A,B,C 两两不交且并集为 D),则 D 的代表元也是 A,B,C 中某一个的代表元.

全国高中数学联赛模拟题(25)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校____________________姓名_____________编号___________得分___________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 若实数 x,y 满足 $\lg(x-y)+\lg(x+2y)=\lg 2+\lg x+\lg y$,则$\frac{x}{y}=$________________.

2. 在所有过点 $P(0,4)$,斜率为整数的直线中,有_____________条被抛物线 $y=x^2$ 截得的线段长为整数.

3. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数$f(x)$满足:当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=|x-t|-t$,且对任意实数 x,$f(x+4)\geqslant f(x)$恒成立,则正实数 t 的取值范围是_________________.

4. 若对任意 $\alpha\in\mathbb{R}$,直线 l:$x\cos\alpha+y\sin\alpha=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+4$ 与圆 C:$(x-m)^2+(y-\sqrt{3}m)^2=1$ 均无公共点,则实数 m 的取值范围是______________________.

5. 已知四棱锥的底面四边形中顺次三个内角的大小之比为 $2:3:4$,此棱锥的侧棱与底面所成的角都相等,则底面四边形的最小角是_______________.

6. 设 m 是正整数,数列 $a_0,a_1,\cdots,a_m$ 满足 $a_0=37,a_1=72,a_m=0$,且 $a_{k+1}=a_{k-1}-\frac{3}{a_k},k=1,2,\cdots,m-1$,则 m 的值为_________________.

7. 对任意正整数 n,数 $an(n+2)(n+4)$ 均为整数,则实数 a 的值为_______________.

8. 元素为非负整数,并且每一行,每一列的和都等于 n 的三阶方阵有_______________个.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 若正数 a,b,c 满足

$$\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2+\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^2+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2=3,$$

求$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$的值.

10. 设 AB 是抛物线 $y=x^2$ 的一条平行于 x 轴的弦,C 为抛物线上不同于 A、B 的任意一点,过 C 作 AB 的垂线交$\triangle ABC$ 的外接圆于 C_1,求点 C_1 的轨迹.

11. 正数数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$定义如下:$x_1=1$,$y_1=\sqrt{3}$,且对 $n=1,2,3,\cdots$,有

$$\begin{cases}x_{n+1}y_{n+1}-x_n=0,\\ x_{n+1}^2+y_n=2.\end{cases}$$

证明:数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都收敛,并求它们的极限.

全国高中数学联赛模拟题(25)加试

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校____________________姓名____________编号___________得分___________

一、(本题满分 40 分)

已知三角形 ABC 中,$\angle BAC=90°$,BD、CE 分别是 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线,I 为内心,X 为 DE 中点,直线 XI 交 BC 于 Y,求证:$AY\perp DE$.

二、(本题满分 40 分)

求所有满足 $2^a+3^b+1=6^c$ 的正整数对(a,b,c).

三、(本题满分 50 分)

一个学校有 n 个学生,他们中任意两人要么相互认识,要么相互不认识. 设 a,b 分别是满足下述条件的最小数:

(i)可将所有学生分为 a 组,使得同组中任意两人相互认识;

(ii)可将所有学生分为 b 组,使得同组中任意两人相互不认识.

记 $N=a+b$,求 N 的最大可能值.

四、(本题满分 50 分)

已知正实数 a,b,c 满足 $a+b+c=1$,求证:

$$\frac{ab}{\sqrt{ab+bc}}+\frac{bc}{\sqrt{bc+ca}}+\frac{ca}{\sqrt{ca+ab}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}.$$