2013 年全国高中数学联赛模拟题(1)第一试

（考试时间:80 分钟　满分:120 分）

学校____________姓名__________编号________得分________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 若函数 $f(x)=\ln(ae^x-x+1)$ 的值域为 $\mathbf{R}$,则实参数 a 的最大值为________.

2. 已知四面体 $ABCD$ 的体积为 20,且有 $BC=5,CD=6,DB=7$,若 A 在面 BCD 上的射影恰为 $\triangle BCD$ 的内心,则三角形 ACD 的面积为________.

3. 非负实数 x,y,z 满足 $x^2+y^2+z^2+x+2y+3z=\frac{13}{4}$,则 $x+y+z$ 的最大值为________.

4. 已知 $ABCD$ 为圆 $M:(x-3)^2+(y-3)^2=4$ 的内接正方形,E 为边 AB 的中点,F 在线段 AD 上,则 $\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{ME}$ 的最大值是________.

5. 函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 对一切 $x,y,z\in\mathbf{R}$ 满足不等式

$$f(x+y)+f(y+z)+f(z+x)\geqslant 3f(x+2y+z).$$

则所有满足条件的函数 $f(x)=$________.

6. 已知 O 为坐标原点,$B(4,0)$,$C(5,0)$,过 C 作 x 轴的垂线,M 是这垂线上的动点,以 O 为圆心,OB 为半径作圆,MT_1、MT_2 是圆的切线,则 $\triangle MT_1T_2$ 的垂心的轨迹方程是________.

7. 形如 $1^n+2^n+3^n+4^n(n\in\mathbf{N}^*)$ 的数的末尾最多有________个数码 0.

8. 已知集合 $A\subseteq\{1,2,\cdots,9\}$,且满足对任意 $a,b\in A$(a,b 不同,A 中至少有两个元素),均有 $|a-b|>1$,则满足要求的集合 A 的个数为________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 在$\triangle ABC$中,求$f=\sin\dfrac{A}{2}\sin B\sin C$的最大值.

10. 在直角坐标系中,O为坐标原点,A、B是第一象限内的点,并且A在直线$y=x\tan\theta$上(其中$45°<\theta<90°$),OA长度为$\dfrac{1}{\sqrt{2}-\cos\theta}$,$B$是双曲线$x^2-y^2=1$上使得$\triangle OAB$的面积最小的点,问:当$\theta$取何值时,$\triangle OAB$的面积最大? 最大值为多少?.

11. 设数列$\{a_n\}$满足:$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{a_n}(n\geqslant1)$,且$a_1=1$.求证:对任意$n>1$,$\dfrac{2}{\sqrt{a_n^2-2}}$均为整数.

2013 年全国高中数学联赛模拟题(1)加试

（考试时间:150 分钟　满分:180 分）

学校____________________姓名______________编号____________得分____________

一、(本题满分 40 分)

在$\triangle ABC$中,$AC > AB$,H为垂心,M为BC边上的中点,AD为BC上的高,且$AD = BC$.
求证:$HD + HM = MC$.

二、(本题满分 40 分)

证明:存在无穷多个正整数对(m,n),使得$m \mid n^2 + 1$且$n \mid m^2 + 1$.

三、(**本题满分50分**)

已知正实数 a,b,c,d 满足

$$abcd=4 \text{ 和 } a^2+b^2+c^2+d^2=10.$$

求 $ab+bc+cd+da$ 的最大可能值.

四、(**本题满分50分**)

平面上给定了100个点.证明:可以用一些圆来覆盖它们,这些圆的直径之和小于100,并且其中任何两个圆的距离都大于1(圆与圆之间的距离是指两个圆上的相距最近的点之间的距离).

2013 年全国高中数学联赛模拟题(2)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校________________姓名____________编号__________得分__________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 在$\triangle ABC$中,$AB=2$,$AC=4$. 若M为BC边的中点,O为$\triangle ABC$的外心,则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AO}$的值是______________.

2. 设$(1+x)^{16}=\sum\limits_{i=0}^{16}a_ix^i$, 则$\sum\limits_{i=1}^{8}ia_i=$__________________.

3. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3}=1$的左焦点为$F$,直线$x=m$与椭圆相交于点$A$、$B$,当$m=1$时,$\triangle FAB$的周长取到最大值,则椭圆$C$的离心率为__________________.

4. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=a$,$a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}$,若对任意$n\geqslant 4$,均有$\frac{3}{2}<a_n<2$,则a的取值范围为______________.

5. 方程$\cos^2x+\cos^22x+\cos^24x+\cos^28x=\sqrt{\frac{\sin 16x}{\sin x}}$的解集是__________________.

6. 过半径为 5 的球面上一点P作三条两两互相垂直的弦PA、PB、PC,且满足$PA=2PB$,则$PA+PB+PC$的最大值为__________________.

7. $\left\{\frac{65!}{67}\right\}=$____________________. ($\{x\}$表示$x$的小数部分)

8. 将2×100方格表的每个小方格染上红、蓝两色之一,红、蓝两色都有. 有______________种不同的染色方案,使得同一种颜色的所有小方格都是“连通”的(两个小方格是“连通”的,当且仅当它们有一条公共边).

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 数列$\{x_n\}$满足:(i) x_1为一正实数;及

(ii) $x_{n+1}=\sqrt{5}x_n+2\sqrt{x_n^2+1}, n=1,2,3,\cdots$

证明:在$x_1,x_2,\cdots,x_{2013}$中,最少可以找到671个无理数.

10. 设抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点为F,经过点F的直线交抛物线于A、B两点,点M在抛物线的准线上,O为坐标原点. 求证:

(1) MA、MF、MB的斜率成等差数列;

(2)当$MA\perp MB$时,$\angle MFO=|\angle AMF-\angle BMF|$.

11. 已知方程$x^3-ax^2+bx-c=0$有三个正实根(不必不同),求$\dfrac{1+a+b+c}{3+2a+b}-\dfrac{c}{b}$的最小值.

2013 年全国高中数学联赛模拟题(2)加试

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校____________________姓名______________编号____________得分____________

一、(本题满分 40 分)

已知$\triangle DEF$是不等边锐角三角形ABC的垂足三角形,$D\in AB$,$E\in AC$,$F\in BC$,I_1、I_2分别是$\triangle ADE$和$\triangle CEF$内心,O_1、O_2分别是$\triangle ABI_1$和$\triangle BCI_2$的外心.

求证:$O_1O_2 /\!/ I_1I_2$.

二、(本题满分 40 分)

给定素数p,求满足以下条件的所有正整数n:

对任意整数x,若$p\mid x^n-1$,则$p^2\mid x^n-1$.

三、(**本题满分 50 分**)

试确定在 12×12 棋盘中所能放置的“王”的数目的最大值,使得其中每一个“王”都恰可攻击另外一个“王”(“王”可以攻击和它所在方格有公共顶点的方格中的棋子).

四、(**本题满分 50 分**)

已知实数 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n(n\geqslant 2)$,求证:

$$\frac{n(n-1)}{2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1}ix_{i+1}\right).$$

2013 年全国高中数学联赛模拟题(3)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校____________________姓名______________编号____________得分____________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. $2013^{\ln\ln 2013}-(\ln 2013)^{\ln 2013}=$__________________.

2. 已知直线 $y=\frac{1}{2}x$ 与双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ 交于 A、B 两点,P 为双曲线上不同于 A、B 的点,当直线 PA、PB 斜率 k_{PA}、k_{PB}存在时,$k_{PA}k_{PB}=$__________________.

3. 数列$\{a_n\}$满足:$a_1=1$,$a_{n+1}=\frac{(n+1)a_n^2}{2na_n+n^2}$,则 $a_{2013}=$____________.

4. 设直角三角形的两条直角边长分别为 a,b,斜边长为$\frac{1}{3}ab-(a+b)$,若 a,b,c 均为正整数,则满足条件的直角三角形共有__________________个.

5. 设函数$f(x)=4x^3+bx+1(b\in\mathbf{R})$对于任意 $x\in[-1,1]$,都有$f(x)\geqslant 0$ 成立,则实数 b 的取值范围为__________________.

6. 已知锐角$\triangle ABC$ 的外心为 O,$\angle A=45°$,若$\frac{\cos B}{\sin C}\overrightarrow{AB}+\frac{\cos C}{\sin B}\overrightarrow{AC}=2m\overrightarrow{AO}$,则 $m=$________________.

7. 设正四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 1,E,F,G,H 分别是线段 AB,CD,PB,PC 的中点,则多面体 $BEG-CFH$ 的体积为__________________.

8. 袋内有 8 个白球和 2 个红球,每次从中随机取出一个球,然后放回 1 个白球,则第 4 次恰好取完所有红球的概率为____________________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 设$a_1,a_2,\cdots,a_{2013}\in[-2,2]$,且$a_1+a_2+\cdots+a_{2013}=0$. 试求$f=a_1^3+a_2^3+\cdots+a_{2013}^3$的最大值.

10. 给定圆$C:x^2+(y-1)^2=1$和抛物线$C_1:y^2=4x$. 过抛物线C_1上一点$P(x_0,y_0)(y_0>2)$作圆C的两条切线,分别交x轴于M、N两点,试求$\triangle PMN$面积的最小值及此时对应的y_0的值.

11. 设n为正整数,求证:

$$1+n+\frac{n^2}{2}+\cdots+\frac{n^n}{n}>\frac{e^n}{2}.$$

2013 年全国高中数学联赛模拟题(3)加试

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校____________________姓名_____________编号___________得分___________

一、(本题满分 40 分)

设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心,H_1、H_2 分别是 H 到角 B 的内外角平分线的垂足. 求证:直线 H_1H_2 平分 AC 边.

二、(本题满分 40 分)

数列 $\{x_n\}$ 满足:$x_1=a, x_{n+1}=2a-\dfrac{a^2+1}{x_n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

证明:若数列 $\{x_n\}$ 为纯周期数列,则它的最小正周期一定为奇数.

三、(本题满分50分)

求所有整数对(m,n),满足

$$\begin{cases}2m\equiv -1\pmod n,\\ n^2\equiv -2\pmod m.\end{cases}$$

四、(本题满分50分)

有65对情侣出去玩,每一位男生都有一辆机车,并且都要负责载一位女生.假设他们能够安排出一种载法,使得对于任两辆机车,下面两命题恰有一成立:

(1)这两辆机车上的男生互相彼此认识;

(2)这两辆机车上的女生的男朋友互相彼此认识.

证明:一定可以找到一对情侣,把他们剔除后,剩下的64对情侣仍能够安排出一个满足上述条件的载法.

2013 年全国高中数学联赛模拟题(4)第一试

（考试时间:80 分钟　满分:120 分）

学校________________姓名____________编号__________得分__________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 设 i 为虚数单位,则 $\sum\limits_{k=1}^{2012}(2013-k)\mathrm{i}^k=$________________.

2. 设 $f(x)$ 适合等式 $f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=x$,则 $f(x)$ 的值域是________________.

3. 过点 $M(2,0)$ 作两条互相垂直的射线,分别与双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的右支交于 P、Q 两点,则直线 PQ 所过定点坐标为________________.

4. 若关于 x 的方程 $\cos 2x+4a\sin x+a-2=0$ 在区间 $[0,\pi]$ 上有两个不同的解,则实数 a 的取值范围为________________.

5. 棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 在空间移动,但始终保持点 A、B 分别在 x 轴、y 轴上移动. 则点 C_1 到原点 O 的最远距离为________________.

6. 大于 1 的正整数 n 满足:n 和 n^4 均可表为两个相邻的整数的平方和,则 $n=$________.

7. 设集合 $A=\{1,2,\cdots,n\}$,$B=\{n+1,n+2,\cdots,2012\}$,其中 n 是任意给定的正整数,且 $2\leqslant n\leqslant 2012$. 现从集合 A、B 中各随机取两个元素组成一个样本,用 P_{ij} 表示元素 i 和 j 同时出现在这个样本中的概率,则 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 2012}P_{ij}=$________________.

8. 若关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a,b,c\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq 0)$ 有实根,且不等式 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant ma^2$ 恒成立,则正数 m 的最大值是________________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 已知线段 AB 为过抛物线 $y^2=4x$ 焦点的弦,O 为原点,求 $\triangle OAB$ 的三边边长的平方和的取值范围.

10. 设数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正实数,且满足 $a_{n+1}=a_n-a_n^2(n\in\mathbf{N}_+)$.
求证:对任意正整数 n,均有 $\sum_{i=1}^{n} a_i<1+\ln\frac{n+2}{3}$.

11. 设 x,y,z 是两两不同的实数,且满足 $\begin{cases}y=x(4-x),\\z=y(4-y),\\x=z(4-z).\end{cases}$ 求 $x+y+z$ 的所有可能值.

2013 年全国高中数学联赛模拟题(4)加试

（考试时间:150 分钟　满分:180 分）

学校____________________姓名______________编号____________得分____________

一、(本题满分 40 分)

凸四边形 $ABCD$ 内接于圆 O,直线 AB 和 CD 交于点 M,直线 AD 与 BC 交于点 N. P,Q,S,T 分别为 $\angle MAN$ 和 $\angle MBN$, $\angle MBN$ 和 $\angle MCN$, $\angle MCN$ 和 $\angle MDN$, $\angle MDN$ 和 $\angle MAN$ 的角平分线的交点,这四个点各不相同.

(1)求证:P,Q,S,T 四点共圆;

(2)记 I 为 P,Q,S,T 四点所共圆的圆心,E 为 AC 和 BD 的交点,求证:E、O、I 三点共线.

二、(本题满分 40 分)

求所有的自然数 n,使得存在$(1,2,\cdots,n)$的一个置换$(p_1,p_2,\cdots,p_n)$满足:集合$\{p_i+i \mid 1\leqslant i\leqslant n\}$和$\{p_i-i \mid 1\leqslant i\leqslant n\}$均为 mod n 的完全剩余系.

三、(本题满分50分)

证明:对任意正整数n,集合$\{2,3,4,\cdots,3n+1\}$可以划分为n个三元组,每个三元组中的三个数均为一个钝角三角形的三边长.

四、(本题满分50分)

对任何正整数n及一组正实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$,求证:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_k^{-1}}\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

请问不等式右边的系数“2”是否可以被一个更小的正数取代?

2013 年全国高中数学联赛模拟题(5)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校____________________姓名______________编号____________得分____________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 设等差数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n>7)$ 的公差不为 0,且 a_3,a_4,a_7,a_n 构成等比数列,则它的项数 $n=$________________.

2. 指数函数 $y=a^x$ 和对数函数 $y=\log_a x$(其中 $a>0,a\neq1$)的图象分别为 C_1 和 C_2,点 M 在曲线 C_1 上,线段 OM(O 为坐标原点)交曲线 C_1 于另一点 N,若曲线 C_2 上存在一点 P,满足点 P 的横坐标与点 M 的纵坐标相等,点 P 的纵坐标是点 N 横坐标的两倍,则点 P 的坐标为______________.

3. 设倒圆锥形容器的轴截面为一个等腰直角三角形,在此容器内注入水,并放入半径为 r 的一个实心球,此时球与容器壁及水面恰好都相切,则取出球后水面高为______________.

4. 已知函数 $f(x)=m(\sin x+\cos x)^4+\frac{1}{2}\cos 4x$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时有最大值 $\frac{7}{2}$,则实数 $m=$________________.

5. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1、F_2,过点 $A(0,a)$ 作椭圆的切线 l 交 x 轴负半轴于点 B,P 是点 F_1 关于直线 l 的对称点,若 $\triangle PF_1F_2$ 是等腰三角形,则椭圆 C 的离心率为______________________.

6. 已知实数 x,y 满足 $x^2+3xy+4y^2\leqslant\frac{7}{2}$,则 $x+y$ 的最大值为________________.

7. 已知 a,b,c 为正整数,且 $c>b>a>1$,$\left(a-\frac{1}{c}\right)\left(b-\frac{1}{a}\right)\left(c-\frac{1}{b}\right)$ 为整数,则 $a+b+c=$____________________.

8. 从集合 $\{-10,-9,\cdots,-1,0,1,\cdots,9,10\}$ 中任选 4 个不同的元素,考虑这 4 个元素的两数和、三数和、四数和,这 11 个和中恰有两个和为 0 的概率为________________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 求 a 的取值范围,使得对一切实数 x,y,均有 $2ax^2+2ay^2+4axy-2xy-y^2-2x+1\geqslant 0$.

10. 已知过点 $Q(0,2)$ 的直线 l 与双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的右支交于 A,B 两点(B 在 A,Q 之间),已知点 $H(7,0)$,记 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{BQ}$,求 λ 的取值范围,使得 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BH}>0$.

11. 已知实数列 $\{a_n\}$ 满足:$a_{n+1}=2^n-3a_n$,$n=0,1,2,\cdots$. 求 a_0 的取值范围,使得对任意正整数 n,均有 $a_{n+1}>a_n$.

2013 年全国高中数学联赛模拟题(5)加试

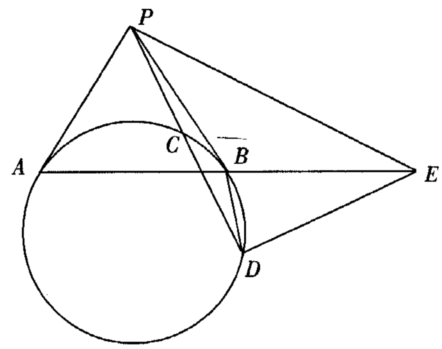
（考试时间:150 分钟　满分:180 分）

学校＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿编号＿＿＿＿＿得分＿＿＿＿＿

一、(本题满分 40 分)

如图,P 为圆 ω 外一点,PA、PB 为圆 ω 的两条切线,PCD 为圆 ω 的一条割线,其中 C 在线段 PD 上,直线 $DE\perp PD$ 交直线 AB 于点 E.

求证:$\angle BPE=2\angle PDB$.



第一题图

二、(本题满分 40 分)

求所有的正整数 a 和 b,使得

$$a\mid b^2,\ b\mid a^2 \text{且}\ a+1\mid b^2+1.$$

三、(本题满分50分)

已知实系数方程 $x^4-mx^3+nx^2-ux+v=0$ 有四个非负实数根(不必不同),求证:

$$m^4+32v\geqslant 3m^2n.$$

四、(本题满分50分)

圆周上取 $n(>1)$ 个点,以所取的两不同点为端点的圆弧称作"区间"(两点可构成两个区间). 设 F 是一族区间,满足:对每个区间 $A\in F$,至多有一个 $B\in F$ 使得 $A\subset B$ 且 $B\neq A$(称 A 是 B 的真子区间). 称 F 中的一个区间为极大,若它不是 F 中任一别的区间的真子区间. 设 F 有 m 个极大元,a 个非极大元.

(1)求证:$m+\dfrac{a}{2}\leqslant n$;

(2)给定 $n\geqslant 3$,求 $|F|$ 的最大值.

2013 年全国高中数学联赛模拟题(6)第一试

（考试时间:80 分钟　满分:120 分）

学校__________姓名__________编号__________得分__________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 已知 $k\in\mathbf{N}^*$,且 $k\geqslant 3$,若一元二次方程 $(k-1)x^2-px+2k=0$ 的两个根都是正整数,则 $12(p+k)^2+51(p+k)$ 的值等于__________.

2. 若 $x\in(-\pi,0)$,则函数 $y=\dfrac{\sin x\cos x}{1+\sin x+\cos x}$ 的值域是__________.

3. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=2$,$AA_1=AD=1$,点 E、F、G 分别为棱 AA_1、C_1D_1、BC 的中点,那么四面体 B_1EFG 的体积为__________.

4. 已知 z_1,z_2 在复平面上对应点分别为 P、Q,且 $|z_2|=4$,$4z_1^2-2z_1z_2+z_2^2=0$,则 P、Q 与原点 O 所成 $\triangle OPQ$ 的面积等于__________.

5. 已知 $\triangle ABC$ 中,$AB=2$,$AC=1$,$\angle BAC=120°$,O 是 $\triangle ABC$ 的外心,且 $\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$,则 $\lambda+\mu=$__________.

6. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,则 $\left[\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2013}\right]$ 被 11 除的余数是__________.

7. 已知 A、B 是椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上的两个动点,O 为坐标原点,且 $OA\perp OB$,则 $S_{\triangle AOB}$ 的最小值为__________.

8. 对于 $n\geqslant 2$,$a_1,a_2,\cdots a_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列,且满足有且只有一个 $i\in\{1,2,\cdots n-1\}$,使得 $a_i>a_{i+1}$,则这种排列的个数为__________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$,$a_n=2^{2n}a_{n-1}+n\cdot 2^{n^2}(n\geqslant 2)$,求通项$a_n$.

10. 已知椭圆Γ的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$离心率$e=\frac{1}{2}$, F_1是椭圆Γ的左焦点,直线L过点$M(-2a,0)$交椭圆Γ于A、B两点,且$\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_1|}=\frac{1}{12}$. 当$\triangle ABF_1$的面积最大时,求直线$l$的方程.

11. 已知正实数x,y,z满足$x^2+y^2+z^2=3$,求$u=\frac{2-x}{4x-x^2}+\frac{2-y}{4y-y^2}+\frac{2-z}{4z-z^2}$的最小值.

2013年全国高中数学联赛模拟题(6)加试

（考试时间:150分钟　满分:180分）

学校________________姓名____________编号__________得分__________

一、(本题满分40分)

已知圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 交于点 E,对边 DA、CB 延长线交于点 F,G 点使得 $ECGD$ 为平行四边形,H 为 E 关于直线 AD 的对称点,求证:D,H,F,G 四点共圆.

二、(本题满分40分)

设 $S=\{1,2,\cdots,2012\}$. 求满足下列条件的函数 $f:S\to S$ 的个数:

(1) f 为一一映射;

(2) 对任意正整数 $a(1\leqslant a\leqslant 2012)$,均有 $f(a)+f^{-1}(a)=2013$,其中 f^{-1} 为 f 的反函数.

三、(本题满分50分)

设 a,b,c 是锐角$\triangle ABC$的三边长,R是外接圆半径. 求证:

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{a^3+b^3+c^3}\geqslant\sqrt{3}R.$$

四、(本题满分50分)

p是大于3的质数. 证明:存在$a\in\{1,2,\cdots,p-2\}$,使得$a^{p-1}-1$与$(a+1)^{p-1}-1$都不是p^2的倍数.

2013 年全国高中数学联赛模拟题(7)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校____________________姓名______________编号____________得分____________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 已知 $2^{\frac{1}{x}}>x^{a}$ 对任意 $x\in(0,1)$ 成立,则实数 a 的取值范围是________________.

2. 在等腰梯形 $ABCD$ 中,$AB/\!/CD$,且 $AB>CD$. 设以 A、B 为焦点且过点 D 的双曲线的离心率为 e_1,以 C、D 为焦点且过点 A 的椭圆的离心率为 e_2,则 $e_1e_2=$______________.

3. 已知正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2+a_i}=\dfrac{1}{2}$,则 $\prod\limits_{i=1}^{n}a_i$ 的最小值为______________.

4. 已知 $\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)-\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{1}{4}$,且 $x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$. 则 $\tan x$ 的值为________________.

5. 如果复数 $|z|=2$,且 $z^3=a+bi$,其中 a,b 为实数,则 $a+b$ 的最大值为________________.

6. 四棱锥 P—$ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是凸四边形,AC,BD 相交于 O,若 $\triangle AOB$ 的面积为 36,$\triangle COD$ 的面积为 64,四棱锥的高为 9,则这样的四棱锥的体积最小值是______________.

7. 平面直角坐标系中,A、B 为两个与原点 O 不重合的点,AB 中点为 M,若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{x}$,$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{y}$,点 B 关于 $\overrightarrow{OA}$ 所在直线的对称点为 B_1,则 $\overrightarrow{OB_1}$ 为______________.(用 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 表示).

8. 求值:$\dfrac{\sum\limits_{n=1}^{99}\left(\sqrt{10+\sqrt{n}}\right)}{\sum\limits_{n=1}^{99}\left(\sqrt{10-\sqrt{n}}\right)}=$________________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 设$A=\{1,2,\cdots,10\}$,f是A到A上的一一映射,记

$$f_1(x)=f(x),f_{n+1}(x)=f(f_n(x)).$$

映射f又满足条件:

(1)对一切$x\in A$,$f(x)\neq x$;

(2)对一切$x\in A$,$f_{21}(x)=x$.

试问:满足上述条件的映射f有多少个?

10. 已知过点$A(0,1)$的直线l与抛物线$C:y^2=4x$交于两个不同的点M和N,抛物线C在点M,N处的切线的交点为P,求点P的轨迹.

11. 设有无穷数列$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$.对任何自然数$m$和$n$,满足不等式

$$|a_{m+n}-a_m-a_n|<\frac{1}{m+n}.$$

证明:这个数列是等差数列.

2013 年全国高中数学联赛模拟题(7)加试

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校________________姓名____________编号___________得分___________

一、(本题满分 40 分)

在$\triangle ABC$中,$AB=BC$,点D在三角形内,使得$\angle ADC=2\angle ABC$. 证明:顶点B到$\angle ADC$外角平分线的距离等于$AD+DC$的一半.

二、(本题满分 40 分)

p为奇质数,证明:$\dfrac{p^{2p}+1}{p^2+1}$的任一正约数模$4p$余 1.

三、(本题满分50分)

$m\times n$ 表($m,n\geqslant 4$)中由格线段组成的一条不自交闭合路线经过所有$(m-1)(n-1)$个内部格点但不过任何边界格点. 设 A 是该路线直穿而过的格点个数,B 是恰有一对对边属于该路线的方格个数,C 是四边都不属于该路线的方格个数. 求证:$A=B-C+m+n-1$.

四、(本题满分50分)

求实数 k 的最大值,使得对于任意正实数 x,y,z,均有

$$x^3+y^3+z^3-3xyz\geqslant k\left|(x-y)(y-z)(z-x)\right|. \quad ①$$

2013 年全国高中数学联赛模拟题(8)第一试

（考试时间:80 分钟　满分:120 分）

学校________________姓名____________编号__________得分__________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 设函数 $f(x)=x\sin x(x\in\mathbf{R})$ 在 $x=x_0$ 处取得极值,则 $(1+x_0^2)(1+\cos 2x_0)$ 的值等于____________.

2. 设函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且 $f(2-x)=f(x)$. 若 $f(-1)-\dfrac{3}{f(-1)}>-2$,则 $f(2013)$ 的取值范围为____________________.

3. 正三棱锥 $V-ABC$ 的侧棱长为 3,底面边长为 2,过底边 AB 的截面交侧棱 VC 于点 D. 则截面 $\triangle ABD$ 面积的最小值是__________.

4. $\dfrac{\cos 15^\circ}{\cos 55^\circ\cdot\cos 65^\circ\cdot\sin 85^\circ}=$____________________.

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,且 $S_n^2-2S_n-a_nS_n+1=0(n=1,2,\cdots)$,则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为__________________.

6. 在平面直角坐标系中,定点 B 在 y 轴负半轴上,过点 B 的动直线 l 交椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 于 C、D,以 CD 为直径的圆恒过 x 轴上方的定点 A. 则 A 的坐标为____________.

7. 设 $M=\{1,2,3,4,5\}$,从 M 中任取四个元素 a_1、a_2、a_3、a_4(允许相同)作积. 则不同的积的个数为____________.

8. 定义 $f(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\dfrac{n}{i}\right]$,其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数,则 $f(2013)-f(2012)=$__________________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 已知函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx$在$\mathbf{R}$上为单调函数,求证:$f(1)\neq 0$.

10. 已知数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$满足:$a_1=1,b_1=-1,a_{n+1}=a_n(1-2a_{n+1}),b_{n+1}-b_n=(1-b_n)^2b_{n+1}$.

(1)证明:$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}+\frac{1}{b_k}\right)>n^2+n+\frac{3}{2}$;

(2)若对任意的正整数n,不等式

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant k\sqrt{\frac{-1}{b_1b_2\cdots b_{n+1}}}$$

成立,求实数k的最大值.

11. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{13^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$和圆$D:(x-10)^2+y^2=\frac{225}{64}$. 求证:存在$\triangle AMN$,使得$A$点坐标为$(0,5)$,$M$、$N$为椭圆两点且圆$D$为$\triangle AMN$的内切圆.

2013 年全国高中数学联赛模拟题(8)加试

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校____________________姓名______________编号____________得分____________

一、(本题满分 40 分)

已知 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心,P 是该三角形内一点,过 H 作 AP、BP、CP 的垂线,分别交直线 BC、CA、AB 于点 M、N、L. 证明:M、N、L 三点共线.

二、(本题满分 40 分)

对正整数 n,求

$$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

小数点后第一位的数字.

三、(本题满分50分)

在 $m\times n$ 的方格中,任意填入 mn 个互不相同的数(每个方格填一个数). 用红笔圈出每行中最大的 $s(s\leqslant n)$ 个数,用蓝笔圈出每列中最大的 $t(t\leqslant m)$ 个数,问:至少有多少个数被红、蓝笔同时圈出? 并证明你的结论.

四、(本题满分50分)

设 p 是大于7的素数,s 是给定的整数. 求证:存在正整数 n 及正整数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,使得

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i^2-1)\equiv s(\bmod p).$$

2013 年全国高中数学联赛模拟题(9)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校____________________姓名______________编号____________得分____________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 在锐角三角形 ABC 中,边 $BC=2$,$B=2A$,则边 AC 的取值范围是__________________.

2. 设向量$\overrightarrow{OA}$绕点 O 逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$得向量$\overrightarrow{OB}$,且 $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(7,9)$,则向量$\overrightarrow{OB}=$________.

3. 一个两条边长分别为 1 和 2 的矩形在平面 α 内的射影为菱形,则矩形与平面 α 所成锐二面角 θ 的最小值为__________________.

4. 已知实数 x,y 满足 $x^3-6x^2-4=0$,$y^3-3y^2-9y-9=0$. 则 $x-y=$__________________.

5. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称,且当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$f(x)=2\sqrt{1-x^2}$. 若直线 $y=x+a$ 与曲线 $y=f(x)$ 恰有三个交点,则实数 a 的取值范围为______________.

6. 设正数 a,b,c 满足 $3a^3+2b^3+6c^3=6$,则 $2a+3b+c$ 的最大值为__________________.

7. 某食品厂制作了四种不同的精美卡片,在该厂生产的每袋食品中都随机装入一张卡片,规定:如果收集齐了四种不同的卡片即可获得奖品. 若小明一次性购买该种食品 6 袋,则小明获奖的概率为______________.

8. 已知曲线 C 上任意一点到点 $A(1,0)$ 与直线 $x=4$ 的距离之和等于 5,对于给定的点 $B(b,0)$,在曲线上恰有三对不同的点关于点 B 对称,则 b 的取值范围为____________________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 设$x_1=3,x_n+x_{n-1}=2+\frac{n(3n+1)}{x_n+x_{n-1}}$,求数列$\{x_n\}$的通项公式.

10. 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为n个正实数($n\geqslant 2$),且$x_1+x_2+\cdots+x_n=1$,将$\frac{x_1}{1+x_1},\frac{x_2}{1+x_1+x_2},\cdots,\frac{x_n}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n}$中最大的数记为$S$.

(1)令$y_k=1+x_1+x_2+\cdots+x_k(k=1,2,\cdots,n)$,求证:$y_1+y_2+\cdots y_n\geqslant\frac{1}{S}$;

(2)对于给定的正整数n,求S的最小值,并求出n取最小值时,$x_1,x_2,\cdots,x_n$的值.

11. 设抛物线$C_1:y^2=4mx(m>0)$的准线与x轴交于点F_1,焦点为F_2,以F_1和F_2为焦点,离心率$e=\frac{1}{2}$的椭圆C_2在x轴上方的交点为P,延长PF_2交抛物线于点Q,M是抛物线C_1上一动点,且点M在P与Q之间运动,当$\triangle PF_1F_2$的边长恰好是三个连续的自然数时,求$\triangle MPQ$面积的最大值.

2013 年全国高中数学联赛模拟题(9)加试

(考试时间:150 分钟 满分:180 分)

学校____________________姓名_____________编号___________得分___________

一、(本题满分 40 分)

已知 O 为不等边锐角三角形 ABC 的外心,射线 AO 交 BC 于 D,P 为 A 关于点 D 的对称点,若 $\angle APB=\angle APC$,求 $\tan B\tan C$ 的值.

二、(本题满分 40 分)

对有限数列的一步操作是同时在每两个相邻项之间插入等于它们之和的一个新项. 从(1,1)开始,第一个数列(1,2,1),第二个数列(1,3,2,3,1),等等.

试求第 n 个数列各项的立方和.

三、(本题满分 50 分)

设 m,n 为正整数,集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 中恰有 m 个素数.求证:S 的任一 $m+1$ 元子集中必有一个数是另外 m 个数的乘积的因数.

四、(本题满分 50 分)

给定整数 $n\geqslant 2$,实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1.$$

对于任意集合 $A\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$,定义 $S_A=\sum\limits_{i\in A}x_i$(若 A 为空集,则定义 $S_A=0$).

证明:对于任意正实数 λ,满足 $S_A\geqslant\lambda$ 的集合 A 的个数不超过$\dfrac{2^{n-3}}{\lambda^2}$,并确定使得等号成立的所有 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 λ.

2013 年全国高中数学联赛模拟题(10)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校____________________姓名______________编号____________得分____________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. $f(x,y)=\sqrt{9x^2+4}+\sqrt{9x^2-12xy+4y^2+1}+\sqrt{4y^2-16y+20}$ 取最小值时,对应的 $(x,y)=$ ______________.

2. 设 $S=\{(x,y)\mid -2\leqslant y\leqslant |x|,-2\leqslant x\leqslant 2\}$,则当 $(x,y)\in S$,且使得二次方程 $t^2+(|x|-1)t+|y|-2=0$ 的一个根大于 1,一个根小于 1 的概率为______________.

3. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 底面正三角形的边长为 $2\sqrt{3}$,内切球半径为 $\sqrt{2}-1$,则三棱锥体积为______________.

4. 若实数 a,b,c 满足 $a+b+c=a^2+b^2+c^2$,则 $a+b+c$ 的最大值为______________.

5. 已知 $\dfrac{\cos x\cos\frac{y}{2}}{\cos\left(x-\frac{y}{2}\right)}+\dfrac{\cos y\cos\frac{x}{2}}{\cos\left(y-\frac{x}{2}\right)}=1$,则 $\cos x+\cos y=$ ______________.

6. 数列 $\{a_n\}$ 共有 11 项,满足 $a_1=0,a_{11}=4$,且 $|a_{k+1}-a_k|=1,k=1,2,\cdots,10$. 满足这些条件的不同数列的个数为______________.

7. 设两个椭圆 $\dfrac{x^2}{t^2+2t-2}+\dfrac{y^2}{t^2+t+2}=1$ 和 $\dfrac{x^2}{2t^2-3t-5}+\dfrac{y^2}{t^2+t-7}=1$ 有公共的焦点,则 $t=$ ______________.

8. 设 p,q 是两个不同的素数,则 $p^{q-1}+q^{p-1}$ 被 pq 除的余数为______________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 若函数$f(x)=|e^x-a|+\frac{a^2}{2}$,当$x\in[0,\ln 3]$时,函数$f(x)$的最大值与最小值之差为$\frac{3}{2}$,试求$a$的值.

10. 已知点$E(m,n)$为抛物线$y^2=2px(p>0)$内一定点,过E作斜率分别为k_1,k_2的两条直线交抛物线于A,B,C,D,且M,N分别是线段AB,CD的中点.

(1)当$n=0$且$k_1\cdot k_2=-1$时,求$\triangle EMN$的面积的最小值;

(2)若$k_1+k_2=\lambda(\lambda\neq 0,\lambda$为常数$)$,证明:直线$MN$过定点.

11. 数列$\{a_n\}$定义如下:$a_1=1$,对每个$n\in\mathbf{N}$,$a_{4n+1},a_{4n+2},a_{4n+3}$构成等差数列,其公差为2,而$a_{4n+3},a_{4n+4},a_{4n+5}$构成等差数列,其公差为$\frac{1}{2}$.

证明:数列$\{a_n\}$为有界数列,并求其最小上界.

2013 年全国高中数学联赛模拟题(10)加试

（考试时间:150 分钟　满分:180 分）

学校＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿编号＿＿＿＿＿得分＿＿＿＿＿

一、(本题满分 40 分)

已知 $ABCD$ 为圆 O 内接四边形，E、F、G、H 分别为 AB、AD、BC、CD 的中点，S 为平面上一点. 证明：$\angle OFS=\angle OGS$ 的充要条件为 $\angle OES=\angle OHS$.

二、(本题满分 40 分)

对任意正整数 n，记 $a_1,a_2,\cdots,a_m(m\geqslant 1)$ 为 n 的所有正因子. 如果存在 m 个整数 $b_1,b_2,\cdots,b_m$，使得 $n=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{b_i}a_i$，我们则称 n 为一个“好数”.

证明：存在一个恰有 2013 个不同质因子的好数.

三、(本题满分50分)

求所有函数$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,,使得对一切$x,y\in\mathbf{R}$均有

$$f(x+y)+f(x)f(y)=f(xy)+(y+1)f(x)+(x+1)f(y).$$

四、(本题满分50分)

在所有的格点(x,y),其中$1\leqslant x\leqslant 101$及$1\leqslant y\leqslant 101$当中选出一些格点,限制条件是选出的格点之中没有任何4点构成一个底边与x轴或y轴平行的等腰梯形(长方形也算做一个等腰梯形),请问最多可以选出多少个格点?

2013 年全国高中数学联赛模拟题(11)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校________________姓名____________编号__________得分__________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 若实数 x,y 满足 $\max\{1-x,x^2-1\}\leqslant y\leqslant x+2$,则 $u(x,y)=2x+y$ 的取值范围是________________.

2. 三个学生独立的参加考试,随机变量 ξ 代表通过考试的学生数,其分布列如下:

$$\begin{pmatrix} \xi & 0 & 1 & 2 & 3 \\ p & \frac{2}{5} & \frac{13}{30} & \frac{3}{20} & \frac{1}{60} \end{pmatrix}.$$

三个学生中通过考试的概率最小的是____________(给出具体数值).

3. 若在 $\triangle ABC$ 中,有 $2\sin B\sin(A+B)-\cos A=1$,$2\sin C\sin(C+B)-\cos B=0$,则 $\triangle ABC$ 的最大内角的值为__________.

4. 过双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{2}=1$ 的右焦点 F 作与 x 轴垂直的直线 l 与两条渐近线交于 A、B 两点,P 是 l 与双曲线的一个交点,若 $\overrightarrow{OP}=m\,\overrightarrow{OA}+n\,\overrightarrow{OB}$,则 $mn=$____________.

5. 已知 a,b,c,x,y,z 为复数,且 $a=\frac{b+c}{x-2}$,$b=\frac{c+a}{y-2}$,$c=\frac{a+b}{z-2}$,若 $xy+yz+zx=567$,$x+y+z=2011$,则 $xyz=$____________.

6. 若 X 是棱长为 a 的正四面体 $ABCD$ 内一点,以 X 在四面体 $ABCD$ 的四个面上的射影为顶点的新四面体的体积的最大值为______________.

7. 若正实数 x,y 满足 $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=2013$,则 $x+y$ 的最小值为________.

8. 设 $f(x)=a_5x^5+a_4x^4+\cdots+a_1x+a_0$,其中 $a_i\in\mathbf{Z}(i=0,1,\cdots,5)$,若对于任意的实数 $x\in\{0,1,2,3,4,5\}$,均有 $0\leqslant f(x)\leqslant120$,则不同的函数 $f(x)$ 的个数为____________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 设$\mathbf{N}^*$为正整数集合,定义:$a_1=2$,

$$a_{n+1}=\min\left\{\lambda \,\middle|\, \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{\lambda}<1,\lambda\in\mathbf{N}^*\right\},n=1,2,\cdots.$$

求证:$a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$.

10. 将编号为1,2,…,9的九个小球随机放置在圆周的九个等分点上,每个等分点上各有一个小球.设圆周上所有相邻两球号码之差的绝对值之和为S.求使S达到最小值的放法的概率.(注:如果某种放法,经旋转或镜面反射后可与另一种放法重合,则认为是相同的放法)

11. 已知直线$y=x$与椭圆$C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{11}=1$交于$A,B$两点,过椭圆$C$的右焦点$F$、倾斜角为$\alpha$的直线$l$交弦$AB$于点$P$,交椭圆$C$于点$M,N$.

(1)用α表示四边形$MANB$的面积;

(2)求四边形$MANB$的面积取到最大值时直线l的方程.

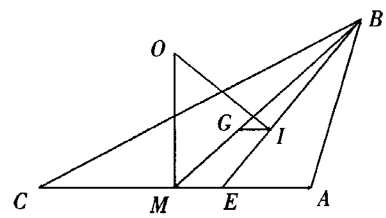
2013 年全国高中数学联赛模拟题(11)加试

（考试时间:150 分钟　满分:180 分）

学校______________姓名____________编号__________得分__________

一、(本题满分 40 分)

已知 I,O,G 分别为 $\triangle ABC$ 的内心,外心,重心,M 为边 AC 的中点,E 为 $\angle CBA$ 的平分线与 AC 的交点. 若 $GI/\!/AC$,求证:O,M,E,I 四点共圆.



第一题图

二、(本题满分 40 分)

已知 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为正实数,且对任意 $k=0,1,\cdots,n-1$,均满足 $a_{k+1}-a_k\geqslant 1$. 求证:

$$1+\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_2-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n-a_0}\right)\leqslant\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right).$$

三、(本题满分50分)

在$m\times n$的方格中,每一格染红白两色之一,已知对任意的i,j,在第i行与第j列的$m+n-1$个方格中,与方格(i,j)(第i行及第j列交叉的方格)同色的方格数目,小于另一种颜色的方格数,求证:mn是4的倍数.

四、(本题满分50分)

若一个大于1的整数N可写成偶数个素数的乘积(不要求这些素数互不相同),则称N为“好数”. 考虑多项式$P(x)=(x+a)(x+b)$,其中a,b为正整数.

(1)求一组$(a,b)(a\neq b)$使得$P(1),P(2),P(3)$均为“好数”;

(2)若对任意正整数n,$P(n)$均为“好数”,求证:$a=b$.

2013 年全国高中数学联赛模拟题(12)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校________________姓名____________编号__________得分__________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 如果关于 x 的不等式 $ax^2-|x+1|+2a<0$ 的解集为空集,则 a 的取值范围是__________.

2. 已知 F_1、F_2分别是椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b}(0<b<3)$的左、右焦点. 若在椭圆的右准线上存在一点 P,使得线段 PF_1 的垂直平分线过点 F_2,则 b 的取值范围是__________.

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}3x-1 & x\leqslant 1,\\ \frac{2x+3}{x-1} & x>1.\end{cases}$ 若函数 $y=g(x)$ 的图象与函数 $y=f^{-1}(x+1)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,则 $g(11)$ 的值是__________.

4. 已知复数列 $\{a_n\}$ 的通项为:$a_n=(1+\mathrm{i})\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)\cdots\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n}}\right)$,则 $|a_n-a_{n+1}|=$__________.

5. 设 n 为自然数,$f(n)$ 为 n^2+1 的各位数字之和,定义 $f_1(n)=f(n)$,$f_{k+1}(n)=f(f_k(n))$,则 $f_{2012}(2013)=$__________.

6. 已知四面体的 6 条棱长分别为 2、2、2、2、a、a,且这样的四面体恰有两个,则 a 的取值范围是__________.

7. 已知 $A=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 2\}$,$B=\{(x,y)\mid (x-6)^2+y^2\leqslant 4\}$,则 $C=\{(x,y)\mid x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},(x_1,y_1)\in A,(x_2,y_2)\in B\}$ 所表示区域的面积是__________.

8. 在若干立方体的每一个面上各写一个十进制数码,使得可用它们拼出任一 30 位数,最少需要__________个立方体.

二、解答题(本大题共 3 小题,第 9 题 16 分,第 10、11 题 20 分,共 56 分)

9. 已知 F_1、F_2 分别是双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点,过 F_1 斜率为 k 的直线 l_1 交双曲线的左、右两支分别于 A、C 两点,过 F_2 且与 l_1 垂直的直线 l_2 交双曲线的左、右两支分别于 D、B 两点.

(1)求 k 的取值范围;

(2)求四边形 $ABCD$ 面积的最小值.

10. 对实数 x,y,z,求 $\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos 2z+\sin z\cdot\cos 4x$ 的最大值.

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=\frac{1}{2},a_n=\frac{a_{n-1}^2+1}{a_{n-1}+1},n\in\mathbf{N}_+$,求证:$\frac{2^n}{2^n+1}<a_n<1$.

2013 年全国高中数学联赛模拟题(12)加试

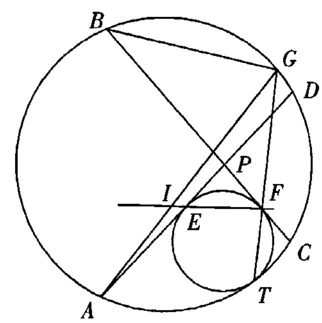
(考试时间:150 分钟 满分:180 分)

学校____________________ 姓名______________ 编号____________ 得分____________

一、(本题满分 40 分)

圆 O 的弦 AD 和 BC 交于圆内一点 P,圆 K 在 AP,PC 和圆 O 所夹区域内,且切 AD 于 E,切 BC 于 F,切圆 O 于 T. TF 交圆 O 与另一点 G,AG 交 EF 于 I. 求证:

(1)A、E、T、I 四点共圆; (2)$GB=GI$.



第一题图

二、(本题满分 40 分)

设正整数 $n\geqslant 3$. 试求出所有非常值实系数多项式 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$,使得对于每一个 $x\in\mathbf{R}$,均有

$$f_k(x)f_{k+1}(x)=f_{k+1}(f_{k+2}(x))\,(1\leqslant k\leqslant n),$$

其中,规定 $f_{n+1}(x)=f_1(x),f_{n+2}(x)=f_2(x)$.

三、(本题满分50分)

我们对放置于点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 及点 O 处的卡片进行操作($n\geqslant3$). 所谓一次操作是指

(1)若某个点 A_i 处的卡片数目不少于3,则可从中取出3张,在点 A_{i-1},A_{i+1} 及 O 处各放一张(这里 $A_0=A_n,A_{n+1}=A_1$);或者

(2)若点 O 处的卡片数目不少于 n,则可从中取出 n 张,在点 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 处各放一张.

证明:只要放置于这 $n+1$ 个点处的卡片总数不少于 n^2+3n+1,则总能通过若干次操作,使每个点处的卡片数目均不小于 $n+1$.

四、(本题满分50分)

对给定的正整数 n,试求不能表示成 $\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{a_i}\times2^{b_i}$ 形式的最小正整数 d_n,其中,a_i、b_i($i=1,2,\cdots,n$)均为非负整数.

2013 年全国高中数学联赛模拟题(13)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校__________________姓名____________编号__________得分__________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 已知 $\min\{\log_3(3x+5),\sqrt{x^2-x-2}\}<2$,则实数 x 的取值范围是______________.

2. 一个正六面体的各个面和一个正八面体的各个面都是边长为 a 的正三角形,这样的两个多面体的内切球的半径之比是__________.

3. 设 a,b,c 都是正实数,且 $a+b+c=1$,则 $a^2+b^2+c^2+\lambda\sqrt{abc}\leqslant 1$ 恒成立的实数 λ 的最大值是___________.

4. 在$\triangle ABC$ 中,已知$\angle B$ 的平分线交 AC 于 K. 若 $BC=2,CK=1,BK=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,则$\triangle ABC$ 的面积为_______________.

5. 对于自然数 n,将其各位数字之和记为 a_n,如 $a_{2009}=2+0+0+9=11,a_{2010}=2+0+1+0=3$,则 $a_1+a_2+\cdots+a_{2010}=$______________.

6. 两个三位数 m,n 恰有一个数位的数字不同,且 n 是 m 的倍数,则这样的三位整数对 (m,n) 共有_________________组.

7. 设抛物线 $y^2=x$ 的一弦 PQ 被直线 $l:y=k(x-1)+1(k\in\mathbf{Z})$ 垂直平分,则弦 PQ 的长等于__________.

8. 同时抛掷两枚骰子,如果至少有一枚出现了 3 点或 4 点,则称这次抛掷为“好点”. 连续抛掷 270 次,那么出现“好点”的数学期望为____________.

二、解答题(本大题共 3 小题,第 9 题 16 分,第 10、11 题 20 分,共 56 分)

9. 求所有的角 α,使得集合 $\{\sin\alpha,\sin2\alpha,\sin3\alpha\}=\{\cos\alpha,\cos2\alpha,\cos3\alpha\}$.

10. 已知多项式 $P(x)$、$Q(x)$ 和 $R(x)$ 满足

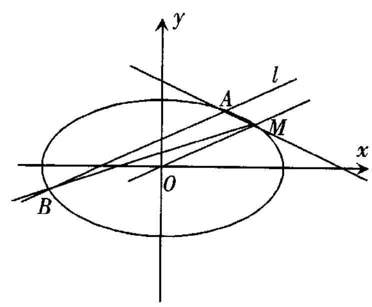
$$2xP(x^3)+Q(-x-x^2)=(1+x+x^2)R(x).$$

求证:$x-1$ 是 $P(x)-Q(x)$ 的一个因式.

11. 已知椭圆 C 过点 $M(2,1)$,两个焦点分别为 $(-\sqrt{6},0)$,$(\sqrt{6},0)$. O 为坐标原点,平行于 OM 的直线 l 交椭圆 C 于不同的两点 A,B.

(1)求 $\triangle OAB$ 面积的最大值;

(2)证明:直线 MA,MB 与 x 轴围成一个等腰三角形.



第 11 题图

2013 年全国高中数学联赛模拟题(13)加试

（考试时间:150 分钟　满分:180 分）

学校____________________姓名_____________编号___________得分___________

一、(本题满分 40 分)

给定凸六边形 $ABCDEF$,其中 $AB/\!/DE$,$BC/\!/EF$,$CD/\!/FA$. 直线 AB 与 DE,直线 BC 与 EF,直线 CD 与 FA 的距离相等.

求证:$AD+BE+CF$ 不超过六边形 $ABCDEF$ 的周长.

二、(本题满分 40 分)

已知 m,n 为正整数,$p\geq5$ 为素数,解不定方程

$$m(4m^2+m+12)=3(p^n-1).$$

三、(本题满分50分)

设n,k为给定的大于1的整数,非负实数$a_1,a_2,\cdots,a_n;c_1,c_2,\cdots,c_n$满足:

(1)$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$,且$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$;

(2)对$m=1,2,\cdots,n$,有$c_1+c_2+\cdots+c_m\leqslant m^k$.

求$c_1a_1^k+c_2a_2^k+\cdots+c_na_n^k$的最大值.

四、(本题满分50分)

在10×10的正方形单元格中填入整数$1,2,\cdots,100$,使得每两个相邻格(有公共边的方格称为相邻)中的数之和都不小于S,试求S的最大值.

2013 年全国高中数学联赛模拟题(14)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校____________姓名__________编号__________得分__________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 已知函数 $f(x)=\dfrac{m-2\sin x}{\cos x}$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减,则实数 m 的取值范围是________________.

2. 若非空集合 $A=\{x\mid 2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$,$B=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 22\}$,则能使 $A\subseteq(A\cap B)$ 成立的所有 a 的集合是__________.

3. 正三棱锥 $V-ABC$ 的侧棱长为 3,底面边长为 2,过底边 AB 的截面交侧棱 VC 于点 D. 则截面 $\triangle ABD$ 面积的最小值是__________.

4. 设任意实数 $x_0>x_1>x_2>x_3>0$,要使 $\log_{\frac{x_0}{x_1}}2\,011+\log_{\frac{x_1}{x_2}}2\,011+\log_{\frac{x_2}{x_3}}2\,011\geqslant k\log_{\frac{x_0}{x_3}}2\,011$ 恒成立,则 k 的最大值是____________.

5. 从一个有 n 条棱的凸多面体 P,切去以其每个顶点为顶点的各一个棱锥,得到一个新的凸多面体 Q. 这些被切去的棱锥的底面所在的平面在 P 上或内部互不相交,则凸多面体 Q 的棱数是________________.

6. 已知直线 $y=k(x+2)(k>0)$ 与抛物线 $C:y^2=8x$ 相交于 A、B 两点,F 为 C 的焦点,若 $FA=2FB$,则 $k=$______________.

7. 将 4 个相同的红球和 4 个相同的蓝球排成一行,从左至右依次对应序号 $1,2,\cdots,8$. 若同色球之间不加区分,则 4 个红球对应序号之和小于 4 个蓝球序号之和的排列共有____________个.

8. 两个两位数,它们的差是 52,它们平方后得到的数的末两位数字相同,则这两个数是____________.

二、解答题(本大题共 3 小题,第 9 题 16 分,第 10、11 题 20 分,共 56 分)

9. 设函数 $f(x)=x^2+ax+b$(a、b 为实常数),数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 定义为

$$a_1=\frac{1}{2},2a_{n+1}=f(a_n)+15,b_n=\frac{1}{2+a_n}(n=1,2,\cdots).$$

已知不等式 $|f(x)|\leqslant|2x^2+4x-30|$ 对任意实数 x 均成立.

(1)求实数 a、b 的值;

(2)若将数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项的和与乘积分别记为 S_n、T_n,证明:对任意正整数 n,$2^{n+1}T_n+S_n$ 为定值;

(3)证明:对任意正整数 n,都有 $2\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]\leqslant S_n<2$.

10. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ 求证:

$$\frac{1}{3abc}+\frac{2}{a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2}\geqslant\frac{1}{a^2b+b^2c+c^2a}+\frac{1}{ab^2+bc^2+ca^2}.$$

11. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F,准线与 x 轴的交点为 K,过 K 作直线 l 交抛物线于 A、B 两点,其中 A 在线段 KB 上,记直线 AF 与抛物线的另一交点为 D,试求 $\triangle KBD$ 的内切圆半径 r 的取值范围.

2013 年全国高中数学联赛模拟题(14)加试

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校________________姓名____________编号__________得分__________

一、(本题满分 40 分)

锐角$\triangle ABC$中,O、H、G分别为三角形的外心、垂心和重心. $OD\perp BC$于D,$HE\perp CA$于E,F为AB的中点. 若$\triangle ODC$、$\triangle HEA$和$\triangle GFB$的面积相等,求$\angle C$的所有可能取值.

二、(本题满分 40 分)

已知实数$a,b,c\in[-1,1]$,且满足

$$1+2abc\geqslant a^2+b^2+c^2.$$

求证:对任意正整数n,均有

$$1+2(abc)^n\geqslant a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}.$$

三、(本题满分 50 分)

求所有大于 1 的正奇数 n,使得存在 $1,2,\cdots,n$ 的一个置换 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,满足:对任意正整数 k $(1\leqslant k\leqslant n)$,$n$ 整除 $a_k^2-a_{k+1}-1$ 和 $a_k^2-a_{k+1}+1$ 中的一个(规定 $a_{n+1}=a_1$).

四、(本题满分 50 分)

无穷大的方格纸原来是白色的,现有 n 个小方格被染成黑色. 在时刻 $t=1,2,\cdots$时,都为方格纸上的方格重新染色,规则如下:对每一个方格 K,都将其染成在前一时刻 K 本身及其上邻和右邻这三个方格中多数所具有的颜色.

(1)证明:经过有限时刻,纸上将不再剩有黑色方格;

(2)证明:黑色方格的全部消失不迟于时刻 $t=n$.

2013 年全国高中数学联赛模拟题(15)第一试

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

学校__________ 姓名__________ 编号__________ 得分__________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 若点(x,y)是区域$|x|+|y|\leqslant 1$内的动点,则$z=ax+y(a>0)$的最大值是__________.

2. 计算$\cot 20°\cos 10°+\sqrt{3}\sin 10°\tan 70°-4\cos^2 20°=$__________.

3. 已知$ABCD-A_1B_1C_1D_1$为长方体,E、F分别为棱AA_1、CC_1的中点,则在空间中与直线A_1D_1,EF,CD都相交的直线有__________条.

4. 如图所示的三角形数阵,满足:(1)第 1 行的数为 1;(2)第$n(n\geqslant 2)$行首尾两数均为$2n-1$,其余的数都等于它肩上的两个数相加,则第$n+1$行中的第 2 个数是__________(用n表示).

5. 设$[x]$表示不超过x的最大整数,则当$0\leqslant x\leqslant 10$时,$f(x)=[x]+[2x]+[3x]+[4x]$表示的所有不同整数的个数是__________.

1
3　3
5　6　5
7　11　11　7
9　18　22　18　9
…　…　…

第 4 题图

6. 已知函数$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,满足$f(0)\neq 0$,且对任意$x,y\in\mathbf{R}$,均有

$$f((x-y)^2)=f^2(x)-2xf(y)+y^2.$$

则$f(x)=$__________.

7. 已知复数z满足$|z^2|+|z^2-1|=7$,若复数z在复平面上对应点为一条圆锥曲线,则其离心率为__________.

8. 已知a,b,c为正实数,且$a+b+c=12$,$ab+bc+ca=45$,则$\max\{a,b,c\}$的最小值为__________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 已知实数 x,y,z 满足

$$\begin{cases}x+1=z+y,\\ xy+z^2+14-7z=0\end{cases}$$

试求 x^2+y^2 的最值.

10. 已知圆 O 的方程为 $x^2+y^2=4$,圆 M 的方程为 $(x-5\cos\theta)^2+(y-5\sin\theta)^2=1\ (\theta\in\mathbf{R})$,过圆 M 上任意一点 P 作圆 O 的两条切线 PE、PF,切点分别为 E、F,试求 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$ 的最小值.

11. 若正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n\ (n\geqslant 2)$ 满足

$$t=a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2.$$

求证: $\sum\limits_{i\neq j}\dfrac{a_i}{a_j}\geqslant\dfrac{(n-1)^2t}{t-1}$.

2013 年全国高中数学联赛模拟题(15)加试

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校____________________姓名_____________编号___________得分___________

一、(本题满分 40 分)

已知锐角$\triangle ABC$不是等腰三角形,O和I分别为其外心和内心. $\triangle ABC$的内切圆I分别与三边BC、CA、AB相切于点D、E、F. 若直线AI与OD交于点P,BI与OE交于点Q,CI与OF交于点R,且M为$\triangle PQR$的外心. 求证:I、M、O三点共线.

二、(本题满分 40 分)

对自然数n,用$f(n)$表示闭区间$[n^2,2n^2]$中完全平方数的个数,求证:$f(n)$单调不减且取满所有自然数.

三、(本题满分 50 分)

$n \geq 3$ 次多项式 $P(x)$ 有 n 个不同实根 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$,并且 $x_2 - x_1 < x_3 - x_2 < \cdots < x_n - x_{n-1}$. 证明:函数 $y = |P(x)|$ 在区间 $[x_1, x_n]$ 中的最大值在位于区间 $[x_{n-1}, x_n]$ 中的点上达到.

四、(本题满分 50 分)

某国国内某些城市间有双向直飞航线连接,使得从该国任何一个城市都可飞到该国任何别的城市(包含中转后到达). 现知,如果将其中任何一个由奇数条航线所形成的环状闭路上的每一条航线都关闭停用,那么就不能从任何城市飞往其他任何城市. 证明:可以让该国各个城市分别属于 4 个省份,使得每一条航线都连接着属于不同省份的城市.

2013 年全国高中数学联赛模拟题解答

联赛模拟题(1)第一试

一、填空题

1.〖答案〗e^{-2}.

〖解〗由题设知,$g(x)=ae^x-x+1$ 应取遍 $(0,+\infty)$. 因为 $g'(x)=ae^x-1$,令 $g'(x)=0$ 得 $x=-\ln a$. 从而当 $a>0$ 时,$g(x)$ 在 $x=-\ln a$ 处取到最小值

$$g(x)_{\min}=g(-\ln a)=\ln a+2.$$

由题设,$\ln a+2\leqslant 0$,从而 $a\leqslant e^{-2}$.

2.〖答案〗$\sqrt{174}$.

〖解〗由题设易得 $S_{\triangle BCD}=6\sqrt{6}$,从而 $\triangle BCD$ 的内切圆半径 $r=\frac{2S_{\triangle BCD}}{5+6+7}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$,又四面体 $ABCD$ 的高

$$h=\frac{3V}{S_{\triangle BCD}}=\frac{3\cdot 20}{6\sqrt{6}}=\frac{10}{\sqrt{6}}.$$

所$\triangle ACD$ 的高为 $\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{10}{\sqrt{6}}\right)^2}=\frac{\sqrt{174}}{3}$.

$$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{174}}{3}=\sqrt{174}.$$

3.〖答案〗$\frac{3}{2}$.

〖解〗由题设有

$$\frac{27}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2$$
$$\geqslant\frac{1}{3}(x+y+z+3)^2.$$

所以,$x+y+z\leqslant\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$.

当且仅当 $x=1,y=\frac{1}{2},z=0$ 时取到最大值$\frac{3}{2}$.

4.〖答案〗8.

〖解〗$\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{ME}$等于$|\overrightarrow{ME}|$与$\overrightarrow{OF}$在$\overrightarrow{DA}$方向上的投影的乘积,故当$\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{ME}$最大时,$F$ 与 A 重合,此时

$$\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MA}$$
$$\leqslant|\overrightarrow{ME}|\cdot|\overrightarrow{OM}|+2=8.$$

5.〖答案〗$f(x)\equiv c$(c 为常数).

〖解〗令 $x=-y=z$,得

$$f(0)+f(0)+f(2x)\geqslant 3f(0)$$
$$\Rightarrow f(2x)\geqslant f(0).$$

令 $x=y=-z$,则

$$f(2x)+f(0)+f(0)\geqslant 3f(2x)$$
$$\Rightarrow f(0)\geqslant f(2x).$$

从而必有$f(2x)=f(0)$. 也即$f(x)=f(0)\equiv c$(c 为常数).

6.〖答案〗$\left(x-\frac{16}{5}\right)^2+y^2=\left(\frac{16}{5}\right)^2(x>0)$.

〖解〗以 O 为圆心,OB 为半径的圆的方程为 $x^2+y^2=16$,连结 OT_1、OT_2. H 为$\triangle MT_1T_2$的垂心,N 为 OM 与 T_1T_2 的交点,易证四边形 OT_2HT_1 是菱形,所以 $ON=\frac{1}{2}OH$. 又 $OM\perp T_1T_2$,$OT_1\perp MT_1$,则 $OT_1{}^2=ON\cdot OM$.

设点 H 的坐标为 (x,y),$M(5,b)$,则 $N\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)$,代入 $OT_1{}^2=ON\cdot OM$. 并有$\frac{b}{5}=\frac{y}{x}$,得$\left(x-\frac{16}{5}\right)^2+y^2=\left(\frac{16}{5}\right)^2(x>0)$为所求.

7.〖答案〗2.

〖解〗当 $n=1,2,3,4$ 时,$1^n+2^n+3^n+4^n$ 分别等于 10,30,100,354. 末尾最多有 2 个 0.

下证明当 $n>4$ 时 $1^n+2^n+3^n+4^n$ 不能被 8 整除,从而其末尾不可能有 3 个 0,也即 $1^n+2^n+3^n+4^n$ 的末尾最多有 2 个 0.

这是因为 $n>4$ 时,2^n 和 4^n 都能被 8 整除,但 $3^n\equiv 1$ 或 $3\pmod 8$,故 $1^n+3^n\equiv 2$ 或 $4\pmod 8$,不能被 8 整除,因此 $1^n+2^n+3^n+4^n$ 不能被 8 整除.

8.〖答案〗79.

〖解〗设集合 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$ $(2\leqslant k\leqslant 5)$,不妨设 $x_1<x_2<\cdots<x_k$.

令 $y_1=x_1,y_2=x_2-1,y_3=x_3-2,\cdots y_k=x_k-(k-1)$,则知映射$\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}\to\{y_1,y_2,\cdots,y_k\}$是一一映射,且$\{y_1,y_2,\cdots,y_k\}$是集合$\{1,2,\cdots,10-k\}$的一个 k 元子集,其个数为 C_{10-k}^k. 所以集合 A 的个数为

$$C_8^2+C_7^3+C_6^4+C_5^5=79.$$

二、解答题

9.〖解〗注意到 $A+B+C=\pi$,则

$$f=\sin\frac{A}{2}\sin B\sin C$$

$=\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}[\cos(B-C)+\cos A]$

$\leqslant\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}(1+\cos A)=\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}}$

$\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{2\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}}{3}\right)^3}$

$=\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

当且仅当 $2\sin^2\frac{A}{2}=\cos^2\frac{A}{2}$ 且 $B=C$,即

$B=C=\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取到最大值.

10.〖**解**〗由题设,当 OA 给定时,$\triangle OAB$ 的面积最小,等价于点 B 到直线 $y=x\tan\theta$ 的距离最小,设 $B(\sec\varphi,\tan\varphi)$ $(0°<\varphi<90°)$,则 B 到直线 $y=x\tan\theta$ 的距离为

$$d=\frac{|\sec\varphi\tan\theta-\tan\varphi|}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{|\tan\theta-\sin\varphi|}{\sec\theta\cos\varphi}$$

$$=\frac{\sin\theta-\cos\theta\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

故　　$d\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi=\sin\theta$,

即　　$\sqrt{d^2+\cos^2\theta}\sin(\varphi+\varphi_1)=\sin\theta$,

$\therefore\ \sqrt{d^2+\cos^2\theta}\geqslant\sin\theta,d^2\geqslant\sin^2\theta-\cos^2\theta$,

$$d_{\min}=\sqrt{\sin^2\theta-\cos^2\theta}.$$

$\therefore S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}-\cos\theta}\cdot\sqrt{\sin^2\theta-\cos^2\theta}$,

$$S^2_{\triangle OAB}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-2\cos^2\theta}{2-2\sqrt{2}\cos\theta+\cos^2\theta}.$$

令 $u=\frac{1-2\cos^2\theta}{2-2\sqrt{2}\cos\theta+\cos^2\theta}$,则

$$2u-2\sqrt{2}u\cos\theta+u\cos^2\theta=1-2\cos^2\theta,$$

即　　$(u+2)\cos^2\theta-2\sqrt{2}u\cos\theta+2u-1=0$,

$$\Delta=8u^2-4(u+2)(2u-1)\geqslant0\Rightarrow u\leqslant\frac{2}{3}.$$

当 $u=\frac{2}{3}$ 时,$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$,得 $S_{\max}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

综上,当 $\theta=\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时,$\triangle OAB$ 的面积取到最大值 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

11.〖**证明**〗显然,对任意 $n>1$,有 $a_n\geqslant\sqrt{2}$,且仅当 $a_{n-1}=\sqrt{2}$ 时等号才成立.

由 $a_1=1$ 知 $a_n>\sqrt{2},a_n^2>2(n>1)$.

下用数学归纳法证明:对任意 $n>1$,数 $\frac{2}{\sqrt{a_n^2-2}}$ 和数 $\frac{4a_n}{a_n^2-2}$ 均为自然数.

当 $n=2$ 时,$a_2=\frac{3}{2}$,故 $\frac{2}{\sqrt{a_2^2-2}}=4$,而 $\frac{4a_2}{a_2^2-2}=24$,此时结论成立.

设当 $n=k$ 时结论成立,则当 $n=k+1$ 时,

$$\frac{2}{\sqrt{a_{k+1}^2-2}}=\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{a_k}{2}+\frac{1}{a_k}\right)^2-2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{a_k}{2}-\frac{1}{a_k}\right)^2}}=\frac{2}{\frac{a_k}{2}-\frac{1}{a_k}}=\frac{4a_k}{a_k^2-2},$$

从而由归纳假设知 $\frac{2}{\sqrt{a_{k+1}^2-2}}$ 必为自然数.

又　$$\frac{4a_{k+1}}{a_{k+1}^2-2}=\frac{4\left(\frac{a_k}{2}+\frac{1}{a_k}\right)}{\left(\frac{a_k}{2}+\frac{1}{a_k}\right)^2-2}$$

$$=4\cdot\frac{\left(\frac{a_k}{2}+\frac{1}{a_k}\right)}{\left(\frac{a_k}{2}-\frac{1}{a_k}\right)^2}=\frac{8a_k(a_k^2+2)}{(a_k^2-2)^2}$$

$$=\frac{4a_k}{a_k^2-2}\cdot2\left(1+\frac{4}{a_k^2-2}\right).$$

故由归纳假设知,$\frac{4a_{k+1}}{a_{k+1}^2-2}$ 为自然数.命题得证.

联赛模拟题(1)加试

一、〖**证明**〗注意到 $BM=CM,AD=BC$,得

$HD+HM=MC$

$\Leftrightarrow HM^2=(MC-HD)^2$

$\Leftrightarrow HD^2+DM^2=MC^2+HD^2-2MC\cdot HD$

$\Leftrightarrow 2MC\cdot HD=MC^2-DM^2=CD\cdot BD$

$\Leftrightarrow\frac{BC}{BD}=\frac{CD}{HD}\Leftrightarrow\frac{AD}{BD}=\frac{CD}{HD}$.

由 $\triangle ABD\backsim\triangle CHD$ 知最后一式成立,命题得证.

二、〖**证明**〗不妨设 $m\leqslant n$,记 $k=\frac{n^2+1}{m}\geqslant\frac{n^2+1}{n}>n$,则 $k\mid n^2+1$,且

$$n\mid m^2+1=\left(\frac{n^2+1}{k}\right)^2+1=\frac{(n^2+1)^2+k^2}{k^2}$$

$$\Rightarrow n\mid(n^2+1)^2+k^2\Rightarrow n\mid k^2+1.$$

从而,若(m,n)为满足题设的一组正整数,则(n,k)也为满足题设的一组正整数,且$k>n$.又$(m,n)=(1,2)$显然为一组满足题设的正整数对,则用上述构造方法可以得到无穷多个满足题设要求的正整数对.命题得证.

三、〖解〗

$$S=ab+bc+cd+da=(a+c)(b+d)$$

$$=\sqrt{(a^2+c^2+2ac)(b^2+d^2+2bd)}$$

$$=\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)+2ac(b^2+d^2)+2bd(a^2+c^2)+4abcd}$$

$$\leqslant\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}\right)^2+2(ab+cd)(ad+bc)+16}$$

$$\leqslant\sqrt{25+2\cdot\left(\frac{ab+bc+cd+da}{2}\right)^2+16}=\sqrt{41+\frac{S^2}{2}}.$$

解得$S\leqslant\sqrt{82}$,当且仅当$a^2+c^2=b^2+d^2$且$ab+cd=ad+bc$时,上式取等号.此时取$a=c=\sqrt{\frac{5}{2}}$,则$bd=\frac{8}{5}$,$b^2+d^2=5$,解得$\{b,d\}=\left\{\frac{\sqrt{41}-3}{2\sqrt{5}},\frac{\sqrt{41}+3}{2\sqrt{5}}\right\}$

综上,$ab+bc+cd+da$的最大可能值为$\sqrt{82}$.

四、〖证明〗围绕每一个给定点作一个半径为$\frac{1}{2}$的圆,这些圆的直径之和等于100.

如果其中有两个圆相交,则用包含这两个圆的直径最小的圆来取代它们,于是直径之和不增加,而圆的数目却减少.

继续上述过程,我们即可得到一族两两不交的圆,它们含有所有的给定点,而直径之和却不大于100.且易知此时每一个点到圆周的距离都不小于$\frac{1}{2}$.

设这些圆之间的最小距离为r.如果$r>1$,则结论已成立.如果$r\leqslant1$,则将每一个圆换成与之同心,而半径却比其小$\frac{1}{2}-\frac{r}{3}$的圆,于是所得之圆族即可满足条件.

联赛模拟题(2)第一试

一、填空题

1.〖答案〗5.

〖解〗$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2=5$.

2.〖答案〗262144.

〖解〗由已知:$a_i=\mathrm{C}_{16}^i(i=0,1,\cdots,16)$,而$ia_i=i\mathrm{C}_{16}^i=16\mathrm{C}_{15}^{i-1}$,所以

$$\sum_{i=1}^{8}ia_i=\sum_{i=1}^{8}16\mathrm{C}_{15}^{i-1}=16\sum_{k=0}^{7}\mathrm{C}_{15}^k$$

$$=16\times\frac{(1+1)^{15}}{2}=2^{18}=262144.$$

3.〖答案〗$\frac{1}{2}$.

〖解〗设椭圆的右焦点为E,直线$x=m$与x轴交于点C,则$AC\leqslant AE$,$BC\leqslant BE$,由椭圆定义,得

$$\triangle FAB\text{ 的周长}=FA+FB+AC+BC$$

$$\leqslant FA+FB+AE+BE=4a,$$

等号成立时点C与E重合,即$m=1=c=\sqrt{a^2-3}\Rightarrow a=2$,从而离心率$e=\frac{1}{2}$.

4.〖答案〗$a>0$.

〖解〗要使$\frac{3}{2}<a_n<2$,即$\frac{3}{2}<1+\frac{1}{a_{n-1}}<2$,也即$1<a_{n-1}<2$. $\because\left(\frac{3}{2},2\right)\subseteq(1,2)$, $\therefore$ 只须当$a_4\in\left(\frac{3}{2},2\right)$时,都有$a_n=\left(\frac{3}{2},2\right)(n\geqslant5)$.

由$a_1=a$,$a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}$,得$a_2=\frac{a+1}{a}$,$a_3=\frac{2a+1}{a+1}$,$a_4=\frac{3a+2}{2a+1}$.从而$\frac{3}{2}<\frac{3a+2}{2a+1}<2$.解得$a>0$.

5.〖答案〗$\left\{x\,\middle|\,x=(2k+1)\pi\pm\frac{\pi}{3}\right\}(k\in\mathbf{Z})$.

〖解〗因为$\frac{\sin 16x}{\sin x}=16\cos 8x\cdot\cos 4x\cdot\cos 2x\cdot\cos x$,所以$\sqrt{\frac{\sin 16x}{\sin x}}=4\sqrt[4]{\cos^2 8x\cdot\cos^2 4x\cdot\cos^2 2x\cdot\cos^2 x}$

$$\leqslant\cos^2x+\cos^2 2x+\cos^2 4x+\cos^2 8x.$$

原方程即为此不等式取等号的情形,故$\cos^2x=\cos^2 2x$,解得$\cos x=\pm\frac{1}{2}$或±1(舍去),从而$x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.又$\sin 16x$与$\sin x$同号.注意到$\sin\frac{16\pi}{3}<0$,则

$$x=(2k+1)\pi\pm\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z}).$$

6.〖答案〗$2\sqrt{70}$.

〖解〗依题意,以PA、PB、PC为相邻三条棱的长方体内接于球,则该长方体的对角线为球的直径,有$PA^2+PB^2+PC^2=100$,即$5PB^2+PC^2=100$.所以

$$(PA+PB+PC)^2=(3PB+PC)^2$$

$$=\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}PB+PC\right)^2\leqslant\left(\frac{9}{5}+1\right)(5PB^2+PC^2)$$

$$=280.$$

故 $PA+PB+PC$ 的最大值为 $2\sqrt{70}$.

7.〖答案〗$\frac{1}{67}$.

〖解〗因为67为素数,由威尔逊定理知,$66!\equiv-1\pmod{67}$,也即有 $66!=67n+66(n\in\mathbf{N})$. 从而

$$67n=66!-66=66(65!-1),$$

注意到 $(66,67)=1$,则 $67\mid 65!-1$,$66\mid n$,所以

$$n=\frac{66!}{67}-\frac{66}{67}\Rightarrow\frac{n}{66}=\frac{65!}{67}-\frac{1}{67}$$

$$\Rightarrow\frac{65!}{67}=\frac{n}{66}+\frac{1}{67}\Rightarrow\left\{\frac{65!}{67}\right\}=\frac{1}{67}.$$

8.〖答案〗39800.

〖解〗假设按题设要求进行染色,我们定义位于矩形边缘的网格线的交点为"顶点",于是有204个顶点,这些顶点是其中某个正方形的顶点或是两个正方形的公共顶点. 从左下角的顶点出发,沿顺时针方向遍历边缘矩形,不难得出在路径右边的正方形的颜色必会在经过唯一的某一点后由红变蓝,也必会在经过惟一的某点后由蓝转红,显然,颜色发生变化的点必是两相邻正方形的公共顶点,而公共顶点共有200个,若我们从200个点中选中一对点(点的两侧正方形颜色产生变化)则由这两点可以确定一条折线,且这条折线恰为红、蓝两区域的分界线,因此染色方案数即选择这两个"变色点"的方法数,即 $A_{200}^2=39800$.

二、解答题

9.〖解〗显然 $\{x_n\}$ 为正项数列,且对 $n=1,2,\cdots$ 均有 $x_{n+1}=\sqrt{5}x_n+2\sqrt{x_n^2+1}>x_n$.

由题设,有 $(x_{n+1}-\sqrt{5}x_n)^2=4(x_n^2+1)$. 即

$$x_{n+1}^2+x_n^2-2\sqrt{5}x_nx_{n+1}=4, \qquad ①$$

同理,有 $$x_{n+2}^2+x_{n+1}^2-2\sqrt{5}x_{n+1}x_{n+2}=4, \qquad ②$$

②-①,得 $x_{n+2}^2-x_n^2-2\sqrt{5}x_{n+1}(x_{n+2}-x_n)=0$,

即 $(x_{n+2}-x_n)(x_{n+2}+x_n-2\sqrt{5}x_{n+1})=0$.

从而 $x_{n+2}+x_n=2\sqrt{5}x_{n+1}$,$\frac{x_{n+2}+x_n}{x_{n+1}}=2\sqrt{5}$ 为无理数. 所以,x_n,x_{n+1},x_{n+2} 三项中至少有一项为无理数. 从而,$x_1,x_2,\cdots,x_{2013}$ 中至少有 $\left[\frac{2013}{3}\right]=671$ 项为无理数.

10.〖证明〗(1)设 MA、MF、MB 的斜率分别为 k_1,k,k_2,点 A,B,M 的坐标分别为 (x_1,y_1),(x_2,y_2),$\left(-\frac{p}{2},m\right)$. 因 AB 经过点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$,所以 AB 的方程可设为 $x=ty+\frac{p}{2}$,代入抛物线方程,并化简得

$$y^2-2pty-p^2=0.$$

由韦达定理,得 $y_1y_2=-p^2$. 注意到 $y_1^2=2px_1$,$y_2^2=2px_2$,有

$$x_1+\frac{p}{2}=\frac{y_1^2}{2p}+\frac{p}{2}=\frac{1}{2p}(y_1^2+p^2),$$

$$x_2+\frac{p}{2}=\frac{y_2^2}{2p}+\frac{p}{2}=\frac{p^4}{2py_1^2}+\frac{p}{2}=\frac{p}{2y_1^2}(p^2+y_1^2).$$

所以, $$k_1+k_2=\frac{y_1-m}{x_1+\frac{p}{2}}+\frac{y_2-m}{x_2+\frac{p}{2}}$$

$$=\frac{2p(y_1-m)}{y_1^2+p^2}+\frac{\frac{2y_1^2}{p}(y_2-m)}{y_1^2+p^2}$$

$$=\frac{-2pm-\frac{2my_1^2}{p}}{y_1^2+p^2}=-\frac{2m}{p}.$$

又 $k=-\frac{m}{p}$,所以 $k_1+k_2=2k$,即 MA、MF、MB 的斜率成等差数列.

(2)设 $\angle AMF=\alpha$,$\angle BMF=\beta$,$\angle MFO=\gamma$,由 $MA\perp MB$ 知 $k_1k_2=-1$,不妨设 $k_1>0$,$k_2<0$,于是

$$\tan\alpha=\frac{k_1-k}{1+k_1k}=\frac{k_1-k}{-k_1k_2+k_1k}$$

$$=\frac{k_1-k}{k_1(k-k_2)}=\frac{1}{k_1}=-k_2,$$

同理,$\tan\beta=k_1$,故

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-k_2-k_1}{1-k_1k_2}$$

$$=-\frac{k_1+k_2}{2}=-k.$$

所以,$|\tan(\alpha-\beta)|=|k|=\tan\gamma$,从而

$$\gamma=|\alpha-\beta|.$$

11.〖解〗设方程三实根分别为 x,y,z,则由韦达定理,有

$$a=x+y+z,b=xy+yz+zx,c=xyz,$$

下证 $$\frac{1+a+b+c}{3+2a+b}-\frac{c}{b}\geqslant\frac{1}{3}.$$

上式等价于 $ab+2b^2\geqslant 9c+6ac$,也即

$$(x+y+z)(xy+yz+zx)+2(xy+yz+zx)^2$$
$$\geqslant 9xyz+6xyz(x+y+z), \qquad ①$$

而 $$(x+y+z)(xy+yz+zx)\geqslant 9xyz,$$

$$(xy+yz+zx)^2\geqslant 3(xy\cdot yz+yz\cdot zx+zx\cdot xy)$$
$$=3xyz(x+y+z).$$

从而①式成立,当且仅当 $x=y=z$ 时取等号,此时所求最小值为 $\frac{1}{3}$.

联赛模拟题(2)加试

一、[证明]延长 AI_1,CI_2 交于点 I,则 I 为 $\triangle ABC$ 的内心. 由 $BE\perp AC$,$CD\perp AB$,有 B,C,E,D 四点共圆. 从而 $\angle AED=\angle ABC$,得 $\triangle ADE\backsim\triangle ACB$,从而

$$\frac{AI_1}{AI}=\frac{AE}{AB}=\cos A\Rightarrow AI_1=AI\cos A$$

$$\Rightarrow II_1=AI-AI_1=AI(1-\cos A)=2AI\sin^2\frac{A}{2}.$$

同理,有 $$II_2=2CI\sin^2\frac{C}{2}.$$

在 $\triangle AIC$ 中,由正弦定理,有

$$\frac{AI}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{CI}{\sin\frac{A}{2}}\Rightarrow AI\sin\frac{A}{2}=CI\sin\frac{C}{2}.$$

从而 $$II_1\cdot IA=2\left(AI\sin\frac{A}{2}\right)^2=2\left(CI\sin\frac{C}{2}\right)^2=II_2\cdot IC.$$

所以,A,I_1,I_2,C 四点共圆.

记 BI 与圆 O_1、圆 O_2 的另一交点分别为 P_1、P_2,则由

$$IP_1\cdot IB=II_1\cdot IA=II_2\cdot IC=IP_2\cdot IB$$

知 P_1、P_2 重合,记该点为 P,易知 BP 为圆 O_1 和圆 O_2 的公共弦,则有 $BP\perp O_1O_2$,从而只需证明 $BP\perp I_1I_2$ 即可.

注意到 $$\angle I_1PI+\angle PI_1I_2=\angle I_1PI+\angle PI_1I+\angle II_1I_2=\angle IAB+\angle IBA+\angle ICA=90°.$$

从而 $PI(BP)\perp I_1I_2$,命题得证.

二、[解]所有满足条件的 n 为 $kp(k\in\mathbf{N}_+)$.

首先我们证明,若 n 满足题设条件,则 n 必为 p 的倍数.

取 $x=p+1$,则

$$x^n-1=(p+1)^n-1\equiv1^n-1\equiv0(\bmod p),$$

我们得到 $p\mid x^n-1$,由题设 $p^2\mid x^n-1$.

由二项式定理,得

$$(p+1)^n\equiv np+1(\bmod p^2)\Rightarrow x^n-1\equiv np(\bmod p^2)\Rightarrow p^2\mid np\Rightarrow p\mid n.$$

其次,我们证明,若 $n=kp(k\in\mathbf{N}_+)$,则 n 满足题设要求.

首先,由 Fermat 小定理,得 $x^n=(x^k)^p\equiv x^k(\bmod p)$,这表明,若 x^n-1 是 p 的倍数,则 x^k-1 也是 p 的倍数. 又

$$\frac{x^n-1}{x^k-1}=1+x^k+x^{2k}+\cdots+x^{(p-1)k}$$

$$\equiv\underbrace{1+1+\cdots+1}_{p\text{个}1}\equiv0(\bmod p).$$

从而,有 $x^n-1=(x^k-1)\times\frac{x^n-1}{x^k-1}$ 必为 p^2 的倍数.

综上,所有满足题设条件的 $n=kp(k\in\mathbf{N}_+)$.

三、[解]可以放置的"王"最多有 56 个. 如下表所示的 56 个"王"满足题设要求.

王	王		王	王		王	王		王		王
									王		王
王	王		王	王		王	王				
									王		王
王		王		王		王	王		王		王
王		王		王							
							王		王		王
王		王		王	王		王		王		王
王		王									
				王	王		王	王		王	王
王		王									
王		王		王	王		王	王		王	王

这表明所求最大值 $\geqslant56$,下证明这个最大值 $\leqslant56$,从而可得 56 是所求的最大值.

我们称棋盘上每个方格的顶点为格点,显然任意一组可互相攻击的"王"所在的方格累计不少于 6 个格点,而 12×12 棋盘中共有 $13\times13=169$ 个格点,从而可互相攻击的王对数目不超过 $\left[\frac{169}{6}\right]=28$ 个. 所以,至多可以放置 $28\times2=56$ 个"王".

四、[证明]记 $y_i=x_{i+1}+x_{i+2}+\cdots+x_n$,$i=1,2,\cdots,n-1$. 则有

$$y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}=\sum_{i=1}^{n-1}ix_{i+1}=y.$$

注意到

$$\sum_{i<j}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n-1}x_i(x_{i+1}+x_{i+2}+\cdots+x_n)=\sum_{i=1}^{n-1}x_iy_i.$$

原不等式即为

$$\frac{n(n-1)}{2}\sum_{i=1}^{n-1}x_iy_i\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i\right)\sum_{i=1}^{n-1}y_i.$$

也即 $$\sum_{i=1}^{n-1}x_i\left[\frac{n(n-1)}{2}y_i-(n-i)\sum_{i=1}^{n-1}y_i\right]\geqslant0. \qquad ①$$

记 $z_i=\frac{1}{2}n(n-1)y_i-(n-i)y(i=1,2,\cdots,n-1)$.

因为 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$,所以

$$(n-i)(x_{i+2}+\cdots+x_n)\geqslant(n-i-1)(x_{i+1}+x_{i+2}+\cdots+x_n),$$

即 $$\frac{y_{i+1}}{n-i-1}\geqslant\frac{y_i}{n-i},\frac{z_{i+1}}{n-i-1}\geqslant\frac{z_i}{n-i}.$$

又 $z_1+z_2+\cdots+z_{n-1}=\frac{n(n-1)}{2}\sum_{i=1}^{n-1}y_i-y\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)=0$，记 k 为使得 $z_k\geqslant 0$ 的最小下标，则对 $i\geqslant k,z_i\geqslant 0,i<k,z_i<0$. 不等式①等价于

$$S=\sum_{i=1}^{n-1}x_iz_i\geqslant 0.$$

易得

$$S=\sum_{i=1}^{n-1}x_iz_i\geqslant\sum_{i=1}^{k-1}x_iz_i+\sum_{i=k}^{n-1}x_kz_i$$
$$=\sum_{i=1}^{k-1}x_iz_i-x_k\sum_{i=1}^{k-1}z_i=\sum_{i=1}^{k-1}z_i(x_i-x_k)\geqslant 0.$$

不等式得证.

联赛模拟题(3)第一试

一、填空题

1.［**答案**］0.

［**解**］考虑更一般的情形：$T=x^{\ln\ln x}-(\ln x)^{\ln x}$.

记 $y=\ln x$，则 $x=e^y$，从而

$$T=(e^y)^{\ln y}-y^y=e^{y\ln y}-y^y$$
$$=e^{\ln y^y}-y^y=y^y-y^y=0.$$

2.［**答案**］$\frac{4}{9}$.

［**解**］设 $P(x_0,y_0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(-x_1,y_1)$，则

$$k_{PA}k_{PB}=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{y_0+y_1}{x_0+x_1}=\frac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}.$$

又由 $\frac{x_0^2}{9}-\frac{y_0^2}{4}=1$ 和 $\frac{x_1^2}{9}-\frac{y_1^2}{4}=1$，两式相减，得

$$\frac{x_0^2-x_1^2}{9}=\frac{y_0^2-y_1^2}{4}.$$

所以，$k_{PA}k_{PB}=\frac{4}{9}$.

3.［**答案**］$\frac{2013}{2^{2^{2012}}-1}$.

［**解**］令 $b_n=1+\frac{n}{a_n}$，易知 $b_{n+1}=1+\frac{n+1}{a_{n+1}}=b_n^2$. 故

$$b_n=b_1^{2^{n-1}}=2^{2^{n-1}},1+\frac{n}{a_n}=2^{2^{n-1}},$$

$$a_n=\frac{n}{2^{2^{n-1}}-1},a_{2013}=\frac{2013}{2^{2^{2012}}-1}.$$

4.［**答案**］3.

［**解**］由 $\left[\frac{1}{3}ab-(a+b)\right]^2=a^2+b^2$ 整理得

$$ab-6(a+b)+18=0.$$

即 $$(a-6)(b-6)=18=1\times 18=2\times 9=3\times 6.$$

所以，满足条件的直角三角形共有3个.

5.［**答案**］$b=-3$.

［**解**］分别令 $x=-1$ 和 $\frac{1}{2}$，得到

$$f(-1)=-b-3\geqslant 0,f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}b+\frac{3}{2}\geqslant 0.$$

从而 $b=-3$.

6.［**答案**］$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

［**解**］由题设条件式两边同乘 $\overrightarrow{AO}$，得

$$\frac{\cos B}{\sin C}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO})+\frac{\cos C}{\sin B}(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO})=2m\overrightarrow{AO}^2,$$

即 $$\frac{\cos B}{\sin C}\cdot c^2+\frac{\cos C}{\sin B}\cdot b^2=4mR^2.$$

结合正弦定理，得

$$m=\cos B\sin C+\cos C\sin B$$
$$=\sin(B+C)=\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

7.［**答案**］$\frac{5}{16}$.

［**解**］将多面体 $BEG-CFH$ 补全为三棱柱 $BEG-CFH'$，则

$$V_{多面体BEG-CFH}=V_{三棱柱BEG-CFH'}-V_{三棱锥H'-CFH}$$
$$=\frac{3}{4}V_{四面体PABD}-\frac{1}{8}V_{四面体PBCD}=\frac{5}{16}.$$

8.［**答案**］0.0434.

［**解**］第4次恰好取完所有红球的概率为

$$\frac{2}{10}\times\left(\frac{9}{10}\right)^2\times\frac{1}{10}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}+\left(\frac{8}{10}\right)^2\times\frac{2}{10}\times\frac{1}{10}=0.0434.$$

二、解答题

9.［**解**］因为 $a_k\in[-2,2]$，可设 $a_k=2\cos\theta_k$，则

$$2\cos 3\theta_k=8\cos^3\theta_k-6\cos\theta_k=a_k^3-3a_k.$$

故 $$f=\sum_{k=1}^{2013}a_k^3=\sum_{k=1}^{2013}a_k^3-3\sum_{k=1}^{2013}a_k$$
$$=\sum_{k=1}^{2013}(a_k^3-3a_k)=2\sum_{k=1}^{2013}\cos 3\theta_k$$
$$\leqslant 2\times 2013=4026.$$

所以，f 的最大值为4026，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_{671}=2$，其余为 -1 时，上式取等号.

10.［**解**］设切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$. 则点 $C(0,1)$ 到切线的距离为1，从而有

$$\frac{|y_0-kx_0-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1,$$

即有 $$(x_0^2-1)k^2-2x_0(y_0-1)k+y_0^2-2y_0=0.$$

设两条切线斜率分别为 k_1,k_2，则

$$k_1+k_2=\frac{2x_0(y_0-1)}{x_0^2-1},x_1x_2=\frac{y_0^2-2y_0}{x_0^2-1},$$

且易得 $M\left(x_0-\frac{y_0}{k_1},0\right)$和$N\left(x_0-\frac{y_0}{k_2},0\right)$. 因此,

$$|MN|=\left|\frac{y_0}{k_2}-\frac{y_0}{k_1}\right|=y_0\left|\frac{k_1-k_2}{k_1k_2}\right|$$

$$=y_0\sqrt{\frac{(k_1+k_2)^2-4k_1k_2}{(k_1k_2)^2}}=\sqrt{\frac{8y_0+4y_0^2}{(y_0-2)^2}},$$

从而, $S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}|MN|\cdot y_0=\sqrt{\frac{y_0^2(2y_0+y_0^2)}{(y_0-2)^2}}$.

设 $f(t)=\frac{t^2(2t+t^2)}{(t-2)^2}$, 则

$$f'(t)=\frac{2t^2(t^2-3t-6)}{(t-2)^3}\ (t>0).$$

令 $t^2-3t-6=0$, 则 $t=\frac{3+\sqrt{33}}{2}$(负舍去). 因此

$$S_{\triangle PMN\min}=\frac{9+\sqrt{33}}{16}\sqrt{54+10\sqrt{33}},$$

此时, $y_0=\frac{3+\sqrt{33}}{2}$.

11.【证明】注意到

$$\mathrm{e}^n=1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}+\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots$$

$$=1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{n^n}{n!}\left[1+\frac{n}{n+1}+\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}+\cdots\right]$$

$$<1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{n^n}{n!}\left[1+\frac{n}{n+1}+\frac{n^2}{(n+1)^2}+\cdots\right]$$

$$=1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{\frac{n^n}{n!}}{1-\frac{n}{n+1}}$$

$$=1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{n^n(n+1)}{n!}.$$

当 $n=1$ 时, $1+1>\frac{\mathrm{e}}{2}$.

当 $n=2$ 时, $1+2+\frac{2^2}{2}=5>\frac{\mathrm{e}^2}{2}$.

当 $n\geqslant3$ 时, $2n!>n\cdot2(n-1)\geqslant n(n+1)$. 故

$$\frac{\mathrm{e}^n}{2}<\frac{1}{2}\left[1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{n^n(n+1)}{n!}\right]$$

$$<1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{n^n(n+1)}{2n!}$$

$$<1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{n^n}{n!}.$$

综上, $1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}>\frac{\mathrm{e}^n}{2}$.

联赛模拟题(3)加试

一、【证明】延长 AH, CH 交对边于 D, E(AD, CE 是高), 由垂直条件, H, H_1, D, B, H_2, E 六点共圆.

由角平分线条件, H_1, H_2 是该圆周上两个 DE 弧的中点, 故 H_1H_2 是 DE 的中垂线.

最后, 由 A, C, D, E 共圆(AC 为直径), DE 的中垂线过圆心即 AC 的中点.

二、【解】令 $x_n=y_n+a$, 则 $y_1=0$, $y_{n+1}=\frac{ay_n-1}{y_n+a}$.

令 $y_n=\cot\theta_n$, $a=\cot\varphi\ (0<\varphi<\pi)$, 则

$$\cot\theta_{n+1}=\frac{\cot\theta_n\cot\varphi-1}{\cot\theta_n+\cot\varphi}=\cot(\theta_n+\varphi).$$

又 $\theta_1=\frac{\pi}{2}$, 则 $\theta_n=\frac{\pi}{2}+(n-1)\varphi$,

$$y_n=\cot\theta_n=\cot\left(\frac{\pi}{2}+(n-1)\varphi\right).$$

设 m 为数列 $\{x_n\}$ 的最小正周期, 则 m 是使得 $\frac{m\varphi}{\pi}$ 为整数的最小正整数, 故 $m\varphi=k\pi\ (k\in\mathbf{N}^*)$.

反设 $m=2u$ 为偶数, 则 $u\varphi=\frac{k\pi}{2}$, 由

$$y_{u+1}=\cot\left(\frac{\pi}{2}+u\varphi\right)=\cot\frac{(k+1)\pi}{2}$$

有意义得到 $k=2v$ 为偶数, 但此时 $u\varphi=v\pi$, u 为更小的周期, 矛盾. 故 m 必为奇数.

三、【解】由题设, n 是 $2m+1$ 的约数, 因此, n 是奇数, 不妨设为正奇数. 又 m 是 n^2+2 的约数, 因而 m 也是奇数. 分两种情况:

(1) m 为正数, 这时, 设

$$2m+1=an,\ n^2+2=bm,$$

其中 a, b 均为正奇数.

(i) $a=1$ 时, $n=2m+1$, 代入后一式, 得

$$(2m+1)^2+2=bm\Rightarrow3\equiv0\pmod m$$

$$\Rightarrow m=1\text{ 或 }3\Rightarrow(m,n)=(1,3),(3,7).$$

(ii) $n=1$ 时, 由后一式, $m=1$ 或 3, 从而 $(m,n)=(1,1),(3,1)$.

(iii) $a\geqslant3$, $n\geqslant3$ 时, 易得 $b<n<m$, 且

$$2n^2+4=2bm=b(an-1),$$

从而 $\quad(ab-2n)n=b+4\leqslant n+3\leqslant2n$

$\Rightarrow ab-2n=1$($ab-2n$ 是奇数), $n=b+4$.

$\Rightarrow b(a-2)=9\Rightarrow(a,b)=(11,1),(5,3),(3,9)$

$\Rightarrow(m,n)=(27,5),(17,7),(19,13)$.

(2) m 为负数, 令 $h=-m$, 则得

$$2h-1=an,\ n^2+2=bh,$$

其中 a,b 仍为正奇数.

(ⅰ) $a=1$ 时, $n=2h-1$, 代入后一式, 同样得 $h\mid 3$, $h=1$ 或 3,

$$(m,n)=(-1,1),(-3,5).$$

(ⅱ) $n=1$ 时, 由后一式, $h=1$ 或 3, 从而 $(m,n)=(-1,1),(-3,3)$.

(ⅲ) $a\geqslant 3,n\geqslant 3$ 时, 与前面类似.

$2n^2+4=2bh=b(an+1)\Rightarrow(ab-2n)n=4-b$.

$b=1$ 时, $n=3,a=7,m=-11$. $b=3$ 时, 无解.

综上, 本题解为 $(m,n)=(1,\pm3),(3,\pm7),(1,\pm1),(3,\pm1),(27,\pm5),(17,\pm7),(19,\pm13),(-1,\pm1),(-3,\pm5),(-3,\pm3),(-11,\pm3)$.

四、〖证明〗假设这65对情侣已经选择了一种符合题目条件的载法, 我们证明: 一定有一对情侣在同一辆车上(事实上必恰只有一对), 因此把他们剔除后, 剩下的64对情侣可以沿用原本的载法, 这样显然能够满足题目条件.

将所有情侣编号1至65, 并且定义函数 $f(a)=b$ 表示第 a 号女生被 b 号男生载. 则 $f(a)$ 是个一一映射, 因此若是对所有 $1\leqslant a\leqslant 65$, 将 a 不停的代入 f, 直至其值变回 a, 并把过程写成一个环状, 就得到

$$a\to f(a)\to f(f(a))\to\cdots\to f^{(k)}(a)=a.$$

这样就能把1到65分成许多互不相交的圈. 注意到65为奇数, 从而必有一个圈含有奇数个数字. 记这个圈为

$$a_1\to a_2\to\cdots\to a_k\to a_1$$

其中 k 是奇数.

假设 $k>1$, 我们定义符号 (a,b) 表示第 a 号男生与第 b 号男生互相认识, $<a,b>$ 表示第 a 号男生与第 b 号男生互不认识. 假设有 (a_1,a_2), 则由于 $f(a_1)=a_2$, $f(a_2)=a_3$, 因此知道男生 a_2 与男生 a_3 所载的女生(就是 a_1 和 a_2)的男朋友互相认识, 因此得到 $<a_2,a_3>$. 类似地由 $f(a_2)=a_3$, $f(a_3)=a_4$, 因此知道男生 a_3 与男生 a_4 所载的女生(就是 a_2 和 a_3)的男朋友互不认识, 所以男生 a_3 与男生 a_4 应该互相认识, 即有 (a_3,a_4), 这样推导下去, 有

$$(a_1,a_2)\to<a_2,a_3>\to\cdots\to(a_k,a_1)\to<a_1,a_2>,$$

矛盾! 如果是 $<a_1,a_2>$ 这种情况, 仍然可以运用同样的推理推出矛盾!

因此 $k=1$, 即 $f(a_1)=a_1$, 命题得证.

联赛模拟题(4)第一试

一、填空题

1. 〖答案〗$-1006+1006\mathrm{i}$.

〖解〗记 $S=\sum\limits_{k=1}^{2012}(2013-k)\mathrm{i}^k=2012\mathrm{i}+2011\mathrm{i}^2+\cdots+2\mathrm{i}^{2011}+\mathrm{i}^{2012}$, 则

$$\mathrm{i}S=2012\mathrm{i}^2+2011\mathrm{i}^3+\cdots+2\mathrm{i}^{2012}+\mathrm{i}^{2013}.$$

两式相减, 得 $(\mathrm{i}-1)S=\mathrm{i}^{2013}+\mathrm{i}^{2012}+\cdots+\mathrm{i}^2-2012\mathrm{i}=-2012\mathrm{i}$, 所以 $S=\dfrac{-2012\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}=-1006+1006\mathrm{i}$.

2. 〖答案〗$\left(-\infty,-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right]\cup\left[\dfrac{2\sqrt{2}}{3},+\infty\right)$.

〖解〗在 $f(x)-2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x$ 中用 $\dfrac{1}{x}$ 替换 x, 得

$$f\left(\frac{1}{x}\right)-2f(x)=\frac{1}{x}.$$

两式联立, 解得 $f(x)=-\dfrac{1}{3}\left(x+\dfrac{2}{x}\right)$, 所以

$$|f(x)|=\frac{|x|+\left|\frac{2}{x}\right|}{3}\geqslant\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

3. 〖答案〗$\left(\dfrac{10}{3},0\right)$.

〖解〗设 $PQ:x=my+a(a>2)$, 代入 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$, 得

$$(m^2-4)y^2+2amy+a^2-4=0.$$

设 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$, 则

$$y_1+y_2=-\frac{2am}{m^2-4},y_1y_2=\frac{a^2-4}{m^2-4}.$$

因为 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=(x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2$

$=(my_1+a-2)(my_2+a-2)+y_1y_2$

$=(m^2+1)y_1y_2+m(a-2)(y_1y_2)+(a-2)^2=0$.

所以, $\dfrac{(m^2+1)(a^2-4)}{m^2-4}-\dfrac{2am^2(a-2)}{m^2-4}+(a-2)^2=0$.

化简得 $3a^2-16a+20=0$, 解得 $a=2$(舍去)或 $a=\dfrac{10}{3}$. 故直线 PQ 必过定点 $\left(\dfrac{10}{3},0\right)$.

4. 〖答案〗$a=\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{3}{5}<a\leqslant 1$.

〖解〗设 $t=\sin x(0\leqslant t\leqslant 1)$. 将问题转化为: 满足条件的 t 值只有一个, 且 $t\neq 1$. 令

$$f(t)=-2t^2+4at+a-1.$$

(1) 由判别式 $\Delta=0$ 得 $a=\dfrac{1}{2}$ 或 -1.

当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时 $t=\dfrac{1}{2}$, 满足题意;

当 $a=-1$ 时, $t=-1$, 不合题意.

(2) 当 $\Delta>0$ 时, 只需 $f(0)f(1)\leqslant 0$, 且 $f(1)\neq 0$. 解得 $\dfrac{3}{5}<a\leqslant 1$.

5.〖答案〗4.

〖解〗记 AB 中点为 E,则 OE 之长恒为 1. 而

$$|OE|+|EC_1|\geqslant|OC_1|\Rightarrow|OC_1|\leqslant 4.$$

当 Q、E、C_1 三点共线时,有 $|OC_1|4$. 故点 C 离 O 最远距离为 4.

6.〖答案〗13.

〖解〗令 $n=k^2+(k+1)^2$,由 $(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2$ 得

$$n^2=(2k+1)^2+[2k(k+1)]^2,$$

$$n^4=(4k^4+8k^3-4k-1)^2+(8k^3+12k^2+4k)^2.$$

注意到 $4k^4+8k^3-4k-1\equiv 3\pmod 4$,$8k^3+12k^2+4k\equiv 0\pmod 4$,故只能

$$(4k^4+8k^3-4k-1)-(8k^3+12k^2+4k)=-1,$$

即 $4k^4-12k^2-8k=0$,即 $0=k^4-3k^2-2k=k(k-2)(k+1)^2$,注意到 $k\geqslant 1$,则 $k=2$,从而

$$n=2^2+3^3=13,n^4=119^2+120^2.$$

7.〖答案〗6.

〖解〗显然,每一个二元组,在样本中出现 $C_4^2=6$ 次,从而 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 2012}P_{ij}=6$.

8.〖答案〗$\frac{9}{8}$.

〖解〗设方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实根为 x_1,x_2,则 $b=-a(x_1+x_2)$,$c=ax_1x_2$. 于是,有

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

$$=a^2[(1+x_1+x_2)^2+(x_1+x_2+x_1x_2)^2+(x_1x_2-1)^2]=2a^2(x_1^2+x_1+1)(x_2^2+x_2+1)$$

$$=2a^2\left[\left(x_1+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\left[\left(x_2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\geqslant\frac{9}{8}a^2.$$

当且仅当 $x_1=x_2=-\frac{1}{2}$ 时,上式取等号. 所以 $\frac{9}{8}a^2\geqslant ma^2$,$m\leqslant\frac{9}{8}$,$m$ 的最大值为 $\frac{9}{8}$.

二、解答题

9.〖解〗$y^2=4x$ 的焦点为 $(1,0)$.

当直线 AB 的斜率不存在时,A、B 的坐标分别为 $(1,2)$ 与 $(1,-2)$. 此时 $\triangle OAB$ 的三边边长的平方和等于 26.

当直线 AB 的斜率为 k 时,显然 $k\neq 0$. 则直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$.

与抛物线方程 $y^2=4x$ 联立并消去 x,得

$$y^2-\frac{4}{k}y-4=0.$$

设 A,B 的纵坐标分别为 y_1,y_2,则其横坐标分别为 $\frac{y_1^2}{4}$ 与 $\frac{y_2^2}{4}$,且由韦达定理,有

$$y_1+y_2=\frac{4}{k},y_1y_2=-4.$$

此时,$\triangle OAB$ 的三边边长的平方和为

$$T_{\triangle OAB}=\left(\frac{y_1^2}{4}\right)^2+y_1^2+\left(\frac{y_2^2}{4}\right)^2+y_2^2+\left(\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_2^2}{4}\right)^2+(y_1-y_2)^2=\frac{1}{8}(y_1^4+y_2^4)+2(y_1^2+y_2^2)-\frac{1}{8}y_1^2y_2^2-2y_1y_2$$

$$=\frac{1}{8}(y_1^2+y_2^2)^2-\frac{1}{4}y_1^2y_2^2+2(y_1^2+y_2^2)-\frac{1}{8}y_1^2y_2^2-2y_1y_2$$

$$=\frac{1}{8}(y_1^2+y_2^2)^2+2(y_1^2+y_2^2)+2=\frac{1}{8}(y_1^2+y_2^2+8)^2-6$$

$$=\frac{1}{8}[(y_1+y_2)^2-2y_1y_2+8]^2-6=2\left(\frac{1}{k^2}+4\right)^2-6.$$

注意到 $\frac{1}{k^2}\in(0,+\infty)$,则 $\triangle OAB$ 的三边边长的平方和 $T_{\triangle OAB}\in[26,+\infty)$.

10.〖证明〗由 $a_1-a_1^2=a_2>0$ 得 $0<a_1<1$.

先用数学归纳法证明:当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n\leqslant\frac{1}{n+2}$.

当 $n=2$ 时,$a_2=a_1-a_1^2=\frac{1}{4}-\left(a_1-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}$. 不等式成立.

假设当 $n=k(k\geqslant 2)$ 时,不等式成立,即 $a_k\leqslant\frac{1}{k+2}$. 则当 $n=k+1$ 时,有

$$a_{k+1}=a_k-a_k^2=-\left(a_k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

$$\leqslant-\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}=\frac{k+1}{(k+2)^2}$$

$$<\frac{k+1}{(k+1)(k+3)}=\frac{1}{(k+1)+2}.$$

即当 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

故对一切 $n\geqslant 2$,都有 $a_n\leqslant\frac{1}{n+2}$.

记 $f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}(x>0)$,则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}>0.$$

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数,则 $f(x)>f(0)=0$,即 $\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$. 令 $x=\frac{1}{i+1}(i\in\mathbf{N}_+)$,则 $\frac{1}{i+2}<\ln(i+2)-\ln(i+1)$. 从而有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+2}<\sum_{i=1}^{n}[\ln(i+2)-\ln(i+1)]$$

$$=\ln(n+2)-\ln3=\ln\frac{n+2}{3}.$$

又 $n=1$ 时,不等式显然成立,故对任意正整数 n,均有 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i<1+\ln\frac{n+2}{3}$.

11.【解】由最后一式,得

$$x=z(4-z)\leqslant\left[\frac{z+(4-z)}{2}\right]=4.$$

同理,$y\leqslant4,z\leqslant4$.

下证 $x\geqslant0$,反设 $x<0$,则 $4-x>0$,由第一式,得 $y<0$,类似得到 $z<0$,从而 $x+y+z<0$. 将题设中三式相加,得

$$x^2+y^2+z^2=3(x+y+z)<0,$$

矛盾!故必有 $0\leqslant x\leqslant4$,同理,$0\leqslant y\leqslant4,0\leqslant z\leqslant4$.

令 $x=4\sin^2\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,代入第一式,得 $y=4\sin^2 2\theta$. 再依次代入第二式,第三式,得

$$z=4\sin^2 4\theta,x=4\sin^2 8\theta.$$

于是,有 $4\sin^2 8\theta=4\sin^2\theta\Rightarrow\cos16\theta=\cos2\theta\Rightarrow\sin9\theta\sin7\theta=0$. 从而

$$\theta=0,\frac{\pi}{9},\frac{2\pi}{9},\frac{3\pi}{9},\frac{4\pi}{9},\frac{\pi}{7},\frac{2\pi}{7},\frac{3\pi}{7}.$$

当 $\theta=0$ 时,可得 $x=y=z=0$,矛盾!当 $\theta=\frac{3\pi}{9}$时,$x=y=z=3$,矛盾!

当 $\theta=\frac{\pi}{9},\frac{2\pi}{9},\frac{4\pi}{9}$时,

$$\begin{aligned}x+y+z&=4\left(\sin^2\frac{\pi}{9}+\sin^2\frac{2\pi}{9}+\sin^2\frac{4\pi}{9}\right)^2\\&=6-\left(\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}\right)\\&=6-\left(2\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{\pi}{9}\right)=6;\end{aligned}$$

当 $\theta=\frac{\pi}{7},\frac{2\pi}{7},\frac{3\pi}{7}$时,

$$\begin{aligned}x+y+z&=4\left(\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}\right)^2\\&=6-\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)\\&=6-\frac{\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)}{\sin\frac{\pi}{7}}\\&=6-(-1)=7.\end{aligned}$$

综上,$x+y+z$ 的所有可能值有两个:6 或 7.

联赛模拟题(4)加试

一、【证明】(1)易知 $\angle QPT=\angle BPA=\angle MBP-\angle MAP=\frac{1}{2}(\angle MBN-\angle MAN)=\frac{1}{2}\angle BNA$.

同理,有 $\angle QST=\angle CSD=\angle MCS-\angle MDS=\frac{1}{2}(\angle MCN-\angle MDN)=\frac{1}{2}\angle CND$.

由 $\angle BNA=\angle CND$ 知 $\angle QPT=\angle QST$,所以,P,Q,S,T 四点共圆;

(2)由 $\angle MQB=\frac{\pi-\angle BCM}{2}=\frac{\pi-\angle BAD}{2}=\angle BAT$ 得 B,Q,A,T 四点共圆,所以 $MA\cdot MB=MQ\cdot MT$,即有 M 在$\odot(ABCD)$和$\odot(PQST)$的根轴上,同理可得 N 也在这条根轴上. 所以 $OI\perp MN$.

又 MN 是 E 对$\odot(ABCD)$的极线,所以 $OE\perp MN$. 从而 O,I,E 三点共线.

二、【解】n 为所有与 6 互素的正整数.

由$\{p_i+i\mid1\leqslant i\leqslant n\}$为 mod n 的完全剩余系,得

$$\sum_{k=1}^{n}k\equiv\sum_{i=1}^{n}(p_i+i)\equiv\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}p_i\equiv2\sum_{k=1}^{n}k\pmod n,$$

则有

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}\equiv0\pmod n$$

$$\Rightarrow n\left|\frac{n(n+1)}{2}\right.\Rightarrow2\nmid n.$$

又由$\{p_i-i\mid1\leqslant i\leqslant n\}$为 mod n 的完全剩余系,我们可以得到,

$$2\sum_{k=1}^{n}k^2\equiv\sum_{i=1}^{n}((p_i+i)^2+(p_i-i)^2)\equiv\sum_{i=1}^{n}(2p_i^2+2i^2)\equiv4\sum_{k=1}^{n}k^2\pmod n.$$

所以,$2\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}\equiv0\pmod n$,

从而 $n\left|\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}\right.\Rightarrow3\nmid n$.

综上,可得$(n,6)=1$.

另一方面,若$(n,6)=1$,取 $p_i\equiv2i\pmod n$,$p_i\in\{1,2,\cdots,n\}$,则$(p_1,p_2,\cdots,p_n)$为$(1,2,\cdots,n)$的一个置换. 又$\{p_i+i\mid1\leqslant i\leqslant n\}=\{3i\mid1\leqslant i\leqslant n\}$和$\{p_i-i\mid1\leqslant i\leqslant n\}=\{i\mid1\leqslant i\leqslant n\}$均为 mod n 的完全剩余系. 所以这样的 n 满足题设要求.

三、【解】若三元组$\{a,b,c\}$($a<b<c$)中的三数为一个钝角三角形的三边长,则称该三元组为"钝的". 下首先证明一个引理:

引理 若三元组$\{a,b,c\}$($a<b<c$)为"钝的",则三元组$\{a,b+x,c+x\}$也为"钝的",其中 x 为正整数.

引理的证明 因为 $a<b+x<c+x$,且$(c+x)-(b+x)=c-b<a$,故 $a,b+x,c+x$ 为某三角形的三边长.

又$(c+x)^2-(b+x)^2=(c-b)(c+b+2x)>(c-$

$b)(c+b)=c^2-b^2>a^2$. 故$\{a,b+x,c+x\}$也为"钝的".

回到原题,下用数学归纳法,对 n 进行归纳证明.

当 $n=1$ 时,显然成立. 假设 $n>1$ 时,且对小于 n 的正整数,结论成立.

设 $t=\left[\frac{n}{2}\right]<n$,其中,$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 由归纳假设,存在一个$\{2,3,4,\cdots,3t+1\}$的划分,使得 t 个三元组 $A_i'=\{i,a_i',b_i'\}(i=2,3,\cdots,t+1)$ 均为"钝的".

定义

$$A_i=\begin{cases}\{i,a_i'+n-t,b_i'+n-t\}, & i=2,3,\cdots,t+1,\\ \{i,n+t+i,2n+i\}, & i=t+2,\cdots,n+1.\end{cases}$$

易检验知 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{2,3,\cdots,3n+1\}$. 而由引理,立得$\{i,a_i'+n-t,b_i'+n-t\}$为"钝的".

注意到 $i=t+2,t+3,\cdots,n+1$ 时,

$$(2n+i)^2-(n+t+i)^2=(n-t)(3n+t+2i)$$
$$\geqslant\frac{n}{2}(3n+3t+3+1)\geqslant\frac{9n^2}{4}\geqslant i^2.$$

所以,A_i 也为"钝的". 所以,结论成立.

四、〖证明〗由柯西不等式,得

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4}=\left(\sum_{j=1}^{k}j\right)^2\leqslant\left(\sum_{j=1}^{k}j^2a_j\right)\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{a_j}\right).$$

即有 $\frac{k}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}\leqslant\frac{4}{k^2(k+1)^2}\sum_{j=1}^{k}j^2a_j$.

注意到 $\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{2k+1}{k^2(k+1)}\geqslant\frac{2}{k(k+1)^2}$,则有

$$\begin{aligned}X&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}j^2a_j\frac{4}{k^2(k+1)^2}\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}2j^2a_j\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\\&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}2j^2a_j\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\\&=2\sum_{j=1}^{n}j^2a_j\sum_{k=j}^{n}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\\&=2\sum_{j=1}^{n}j^2a_j\left(\frac{1}{j^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)<2\sum_{j=1}^{n}a_j.\end{aligned}$$

2 不能变得更小,取 $a_j=\frac{1}{j}$. 此时 $X=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{1+2+\cdots+k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k+2}$,而 $\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

若 $0<c<2$,则 $c\sum_{k=1}^{n}a_k-X=c+(c-2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{2}{n+1}<0$(当 n 足够大时). 综上 2 是最小的值.

联赛模拟题(5)第一试

一、填空题

1.〖答案〗16.

〖解〗依题意,$a_4^2=(a_4-d)(a_4+3d)=a_4^2+2a_4d-3d^2$,由 $d\neq0$ 得 $a_4=\frac{3d}{2}$,$a_7=\frac{9d}{2}$,故 $a_n=\frac{27d}{2}$,$n-4=\frac{a_n-a_4}{d}=12$. 因此 $n=16$.

2.〖答案〗$(4,\log_a4)$.

〖解〗设 $M(x_1,a^{x_1})$,$N(x_2,a^{x_2})$,则有 $x_P=a^{x_1}$,$y_P=2x_2=\log_a a^{x_1}=x_1$,则 $2x_2=x_1$.

因为 O,M,N 共线,所以 $\frac{x_1}{x_2}=\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}}=2$,即 $a^{2x_2}=2a^{x_2}$,解得 $x_2=\log_a2$,$x_1=\log_a4$,即 $P(4,\log_a4)$.

3.〖答案〗$\sqrt[3]{3+5\sqrt{2}}\,r$.

〖解〗注意到容器轴截面为等腰直角三角形,则放置小球后水面高度为$(1+\sqrt{2})r$,此时水面半径为$(1+\sqrt{2})r$,设取出球后水面高度为 h,此时水面半径为 h,则

$$\frac{1}{3}\pi(1+\sqrt{2})^2r^2\cdot(1+\sqrt{2})r=\frac{1}{3}\pi h^2\cdot h+\frac{4}{3}\pi r^3,$$

解之,得 $h=\sqrt[3]{3+5\sqrt{2}}\,r$.

4.〖答案〗1.

〖解〗
$$\begin{aligned}f(x)&=m(\sin x+\cos x)^4+\frac{1}{2}\cos 4x\\&=m(\sin x+\cos x)^4-\sin^22x+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

令 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[1,\sqrt{2}]$,则 $\sin 2x=2\sin x\cos x=t^2-1$,从而

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2}-(t^2-1)^2+mt^4\\&=(m-1)t^4+2t^2-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

令 $u=t^2\in[1,2]$,由题意知 $g(u)=(m-1)u^2+2u-\frac{1}{2}$ 在 $u\in[1,2]$时有最大值$\frac{7}{2}$.

当 $m-1=0$ 时,$g(u)=2u-\frac{1}{2}$ 在 $u=2$ 时有最大值$\frac{7}{2}$,故 $m=1$ 符合条件;

当 $m-1>0$ 时,$g(u)_{\max}\geqslant g(2)>2\times2-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$,矛盾! 当 $m-1<0$ 时,$g(u)<2u-\frac{1}{2}\leqslant\frac{7}{2}$,矛盾!

综上所述,所求的实数 $m=1$.

5.【答案】$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【解】设直线 l 斜率为 $k(k>0)$，则 $l:y=kx+a$，与椭圆方程联立，并消去 y 得

$$(b^2+a^2k^2)x^2+2a^3kx+a^2c^2=0.$$

由 $\Delta=4a^6k^2-4a^2c^2(b^2+a^2k^2)=0$，得 $k^2=\frac{c^2}{a^2}=e^2$，$k=e$.

因为 $PF_1\perp l$，所以 $\angle PF_1F_2$ 为钝角，要使 $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形，必有

$$|PF_1|=|F_1F_2|,\text{即}\frac{1}{2}|PF_1|=c.$$

设点 F_1 到 l 的距离为 d，由 $\frac{1}{2}|PF_1|=d=\frac{|e(-c)+0+a|}{\sqrt{1+e^2}}=\frac{|a-ec|}{\sqrt{1+e^2}}=c$，得

$$\frac{1-e^2}{\sqrt{1+e^2}}=e\Rightarrow e^2=\frac{1}{3}\Rightarrow e=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

6.【答案】2.

【解】记 $t=x+y$，将 $x=t-y$ 代入题中不等式，得 $(t-y)^2+3(t-y)y+4y^2-\frac{7}{2}\leqslant 0$，即 $2y^2+ty+t^2-\frac{7}{2}\leqslant 0$.

令 $f(y)=2y^2+ty+t^2-\frac{7}{2}$. 由于 $f(y)$ 的二次项系数为正，故必有 $\Delta=28-7t^2\geqslant 0$，解得 $t\leqslant 2$，即 $x+y\leqslant 2$. 当 $x=\frac{5}{2}$，$y=-\frac{1}{2}$ 时，上式取等号，故 $x+y$ 的最大值为 2.

7.【答案】10.

【解】
$$\left(a-\frac{1}{c}\right)\left(b-\frac{1}{a}\right)\left(c-\frac{1}{b}\right)=\frac{(ca-1)(ab-1)(bc-1)}{abc}=\frac{a^2b^2c^2-abc(a+b+c)+(ab+bc+ca)-1}{abc}$$

为整数，所以 $abc\mid(ab+bc+ca)-1$.

注意到 $0<(ab+bc+ca)-1<3bc$，则 $(ab+bc+ca)-1=bc$ 或 $2bc$，即 $a=1$ 或 2.

当 $a=1$ 时，$bc\mid bc+b+c-1$，而 $bc<bc+b+c-1<2bc$，不可能；

当 $a=2$ 时，$2bc\mid bc+2b+2c-1$，而 $bc<bc+2b+2c-1<3bc$，从而必有 $bc+2b+2c-1=2bc$，$(b-2)(c-2)=3$，解得 $b=3$，$c=5$，从而 $a+b+c=10$.

8.【答案】$\frac{68}{1197}$.

【解】恰有两个和为零的情况有三类：

$(0,a,-a,b)$ 型 $(a,b\neq 0)$，$(a,b,c,0)$ 型、$(a,b,c,-a)$ 型 $(a,b,c\neq 0,a+b+c=0)$.

第一类有 $C_{10}^1C_{18}^1=180$ 种；

第二、三类中先计算 $a,b,c(a,b,c\neq 0,a+b+c=0)$ 的选法数，列举易知有 $20\times 2=40$ 种，从而第二、三类共有 $40\times 4=160$ 种.

综上，所求概率为 $\frac{180+160}{C_{21}^4}=\frac{68}{1197}$.

二、解答题

9.【解】原不等式等价于

$$2a(x+y)^2\geqslant(x+y)^2-(x-1)^2, \quad ①$$

若 $x=-y$，则①为：$0\geqslant-(x-1)^2$，则①对任何 a 成立.

若 $x\neq -y$，由①得，$a\geqslant\frac{1}{2}-\frac{(x-1)^2}{2(x+y)^2}$，注意到 $\frac{1}{2}-\frac{(x-1)^2}{2(x+y)^2}\leqslant\frac{1}{2}$，从而 $a\geqslant\frac{1}{2}$.

综上，所求 a 的取值范围为 $a\geqslant\frac{1}{2}$.

10.【解】显然直线 l 的斜率存在且不为 0，设直线 $l:y=kx-2$，设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，将直线方程和双曲线方程联立，并消去 y 得

$$(3-k^2)x^2+4kx-7=0.$$

由题设，得

$$\begin{cases}\Delta=16k^2+28(3-k^2)>0,\\ x_1+x_2=\dfrac{4k}{k^2-3}>0,\\ x_1x_2=\dfrac{7}{k^2-3}>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sqrt{3}<k<\sqrt{7}. \quad ①$$

又由 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BH}>0$ 得，

$$(7-x_1)(7-x_2)+y_1y_2>0$$
$$\Rightarrow(7-x_1)(7-x_2)+(kx_1-2)(kx_2-2)>0$$
$$\Rightarrow(1+k^2)x_1x_2-(7+2k)(x_1+x_2)+53>0$$
$$\Rightarrow\frac{7(1+k^2)}{k^2-3}-\frac{4k(7+2k)}{k^2-3}+53>0$$
$$\Rightarrow\frac{7k^2+7-8k^2-28k+53k^2-159}{k^2-3}>0\Rightarrow k>2. \quad ②$$

由①、②得实数 k 的取值范围是 $2<k<\sqrt{7}$.

又由 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{BQ}$ 得 $(x_1,y_1+2)=\lambda(x_2,y_2+2)$，则 $x_1=\lambda x_2$，所以

$$(1+\lambda)x_2=\frac{4k}{k^2-3},\lambda x_2^2=\frac{7}{k^2-3},$$

则 $$\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda}=\frac{16}{7}\cdot\frac{k^2}{k^2-3}=\frac{16}{7}\left(1+\frac{3}{k^2-3}\right),$$

由 $2<k<\sqrt{7}$ 得，$4<\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda}<\frac{64}{7}$，解得 $\frac{1}{7}<\lambda<7$，又注意到 $\lambda>1$，所以 λ 的取值范围为 $(1,7)$.

11.〖解〗由 $a_{n+1}=2^n-3a_n$ 得，

$$\frac{a_{n+1}}{(-3)^{n+1}}-\frac{a_n}{(-3)^n}=\frac{2^n}{(-3)^{n+1}}.$$

令 $b_n=\frac{a_n}{(-3)^n}$，则 $b_{n+1}-b_n=\frac{2^n}{(-3)^{n+1}}$，所以

$$\begin{aligned}b_n&=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_n-b_{n-1})\\&=b_1+\frac{2}{(-3)^2}+\frac{2^2}{(-3)^3}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{(-3)^n}\\&=b_1+\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}\\&=b_1+\frac{2}{15}\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right),\end{aligned}$$

从而，
$$\begin{aligned}a_n&=a_1\cdot(-3)^{n-1}+\frac{2}{15}[(-3)^n+3\cdot2^{n-1}]\\&=(1-3a_0)(-3)^{n-1}+\frac{2}{15}[(-3)^n+3\cdot2^{n-1}]=\frac{1}{5}[2^n+(-1)^{n-1}\cdot3^n]+(-1)^n\cdot3^n\cdot a_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=2^n-4a_n=2^n-\frac{4}{5}[2^n+(-1)^{n-1}\cdot3^n]-(-1)^n\cdot4\cdot3^n\cdot a_0\\&=\frac{1}{5}\cdot2^n+(-1)^n\cdot4\cdot3^n\cdot\left(\frac{1}{5}-a_0\right)\\&=3^n\left(\frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^n+(-1)^n\cdot4\left(\frac{1}{5}-a_0\right)\right).\end{aligned}$$

如果 $\frac{1}{5}-a_0>0$，利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$，对于非常大的奇数 n，有 $a_{n+1}-a_n<0$；如果 $\frac{1}{5}-a_0<0$，对于非常大的偶数 n，有 $a_{n+1}-a_n<0$，不满足题目要求.

当 $a_0=\frac{1}{5}$ 时，$a_{n+1}-a_n=\frac{2^n}{5}$，于是对任意正整数 n，$a_{n+1}>a_n$，因此所求的 $a_0=\frac{1}{5}$.

联赛模拟题(5)加试

一、〖证明〗连 BC,AC,AD，过 P 作 $PF/\!/BC$，交直线 AB 于点 F，取 AB 中点 M，连 PM,DM.

注意到 PA、PB 为圆 ω 的两条切线，PCD 为圆 ω 的一条割线，易得 $ACBD$ 为调和四边形，从而有

$$\angle ADM=\angle BDC=\angle PBC.$$

由 $PF/\!/BC$，得 $\angle PBC=BPF$，$\angle CBA=\angle PFA$.

从而只需证明 $\angle EPF=\angle ADM$，命题即成立.

由 $PM\perp AB$，$PD\perp DE$ 得 P,M,D,E 四点共圆，从而

$$\begin{aligned}\angle EPF&=\angle PFA-\angle PEA=\angle CBA-\angle PDM\\&=\angle CDA-\angle CDM=\angle ADM.\end{aligned}$$

从而命题得证.

二、〖解〗设 $(a,b)=d$，$a=dm$，$b=dn$，$(m,n)=1$.

由 $a\mid b^2$ 得，$dm\mid d^2n^2$，$m\mid d$，同理，$n\mid d$，从而 $mn\mid d$.

设 $d=smn$，则由 $a+1\mid b^2+1$ 得

$$a+1\mid(b^2+1)+(a^2-1)=a^2+b^2,$$

即 $dm+1\mid d^2m^2+d^2n^2$，从而

$$dm+1\mid m^2+n^2,sm^2n+1\mid m^2+n^2.$$

设 $m^2+n^2=k(sm^2n+1)$，则 n 为方程 $x^2-km^2sx+m^2-k=0$ 的一个实根，设方程的另一实根为 n'，由韦达定理，得

$$n+n'=km^2s,nn'=m^2-k.$$

若 $m^2-k<0$，则 $n'<0$，由 $n\mid m^2-k$ 得 $n<k$，与 $n>km^2s$ 矛盾.

若 $m^2-k=0$，则 $n'=0$，$n=km^2s$，由 $(m,n)=1$，得 $m=1$，$n=ks$，从而

$$1+k^2s^2=k(ks^2+1)\Rightarrow k=1,n=s$$
$$\Rightarrow a=s^2,b=s^3.$$

得到一组解 $(a,b)=(s^2,s^3)$.

若 $m^2-k>0$，则 $n,n'>0$，记 $x_0=\min\{n,n'\}$，则 $x_0^2\leqslant nn'=m^2-k<m^2$，从而

$$2m^2-km^2sx_0>x_0^2-km^2sx_0+m^2=k>0.$$

所以，$kx_0s<2$，$k=x_0=s=1$. n 和 n' 一个为 1，一个为 m^2-1.

当 $(n,n')=(1,m^2-1)$ 时，$(a,b)=(m^2,m)$；

当 $(n,n')=(m^2-1,1)$ 时，$(a,b)=(m^2(m^2-1),m(m^2-1)^2)$.

综上，$(a,b)=(t^2,t),(t^2,t^3)(t\in\mathbf{N}^*)$ 和 $(t^2(t^2-1),t(t^2-1)^2)(t\geqslant2)$.

三〖解〗设 a,b,c,d 为方程的四个实根，由韦达定理，得 $m=a+b+c+d$，$n=ab+bc+cd+da+ac+bd$，$v=abcd$. 从而待证不等式即为

$$(a+b+c+d)^4+32abcd\geqslant3(a+b+c+d)^2(ab+bc+cd+da+ac+bd).\quad①$$

若 a,b,c,d 中有一个为 0，不妨设 $d=0$，则①即为

$$(a+b+c)^2\geqslant3(ab+bc+ca),$$

这个不等式是显然的.

下设 a,b,c,d 均不为 0，由齐次性，可不妨设

$$d=\min\{a,b,c,d\}=1,\quad②$$

则不等式①即为

$$(a+b+c+1)^4+32abc$$
$$\geqslant 3(a+b+c+1)^2(ab+bc+ca+a+b+c).\quad ③$$

令 $p=a+b+c,q=ab+bc+ca,r=abc$,由②有 $p\geqslant 3,q\geqslant 3$. 不等式③即为

$$(p+1)^4+32r\geqslant 3(p+1)^2(q+p).$$

展开,并化简得

$$p^4+p^3+p+1-3p^2q-6pq-3q+32r\geqslant 0.$$

令 $q=\frac{1}{3}(p^2-t^2),0\leqslant t\leqslant p$,则有

$$r\geqslant\frac{1}{27}(p+t)^2(p-2t)=\frac{1}{27}(p^3-3pt^2-2t^3).\quad ④$$

因此,只需证明

$$p^4+p^3+p+1-p^2(p^2-t^2)-2p(p^2-t^2)-(p^2-t^2)^2+\frac{32}{27}(p^3-3pt^2-2t^3)\geqslant 0,$$

即 $$\frac{5}{27}p^3-p^2+p+1+p^2t^2+t^2-\frac{14}{9}pt^2-\frac{64}{27}t^3\geqslant 0.$$

$$\frac{1}{27}(5p+3)(p-3)^2+t^2\left(p^2+1-\frac{14}{9}p-\frac{64}{27}t\right)\geqslant 0.\quad ⑤$$

注意到 $p\geqslant 3$,我们有 $\frac{14}{27}p^2\geqslant\frac{14}{9}p$,且 $q=\frac{1}{3}(p^2-t^2)\geqslant 3,p^2\geqslant t^2+9$,由 AM-GM 不等式,得

$$\frac{13}{27}p^2+1\geqslant\frac{13}{27}t^2+\frac{16}{3}\geqslant\frac{64}{27}t.$$

则有 $$p^2+1-\frac{14}{9}p-\frac{64}{27}t\geqslant 0.$$

这意味着⑤成立,从而原不等式得证,取等条件为 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$或$\left(0,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

四、〖证明〗(1)可以认为题中所给的 n 个点等分圆周,每段弧长为1. 设 I_k 表示长为 k 的区间,满足 $I_1\subset I_2\subset\cdots\subset I_{n-1}$ 的区间组 $(I_1,I_2,\cdots,I_{n-1})$ 称为一条覆盖链(其中的区间可以不属于 F).

对每个 $i\leqslant n-2$,覆盖 I_i 的 I_{i+1} 有且只有两个(向两侧之一延长1),故不同的覆盖链共有 $n\cdot 2^{n-2}$ 条(I_1 有 n 种取法,然后 $I_2,I_3,\cdots,I_{n-1}$ 依次各有2种取法).

又因对每个 $2\leqslant i\leqslant n-1$,$I_i$ 的子区间 I_{i-1} 也有且只有两个(两侧之一缩进1),且不同的极大区间互不覆盖,故包含极大区间的覆盖链共有 $m\cdot 2^{n-2}$ 条(每条恰含一个极大区间,从它出发向两侧依次补充).

再由 F 中覆盖的唯一性及覆盖关系的传递性,每个非极大区间被且只被一个极大区间覆盖(不同的非极大区间也互不覆盖),故包含非极大区间但不含极大区间的覆盖链共有 $a\cdot 2^{n-3}$ 条.

以上两类覆盖链互不相同,故得 $m\cdot 2^{n-2}+a\cdot 2^{n-3}\leqslant n\cdot 2^{n-2}$,即 $m+\frac{a}{2}\leqslant n$.

对任意给定的 n 可以达到 $m+\frac{a}{2}\leqslant n$,设分点依次为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$:

当 $n=2$ 时,取 $F=\{(x_1,x_2),(x_2,x_1)\},m=2,a=0$.

当 $n>2$ 时,取所有的 $I_1((x_1,x_2),(x_2,x_3),\cdots,(x_n,x_1))$ 及所有互不重叠的 $I_2\{(x_1,x_3),(x_3,x_5),\cdots\}$,则 $a=2\left[\frac{n}{2}\right],m=\left[\frac{n+1}{2}\right]$,故

$$m+\frac{a}{2}=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]=n.$$

(2)〖解〗同上由包含非极大区间的覆盖链得 $a\leqslant n$,故 $|F|=m+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\leqslant\frac{3n}{2}$,$|F|\leqslant\left[\frac{3n}{2}\right]$.

达到 $|F|=\left[\frac{3n}{2}\right]=n+\left[\frac{n}{2}\right]$的例子如上,故 $|F|$的最大值是$\left[\frac{3n}{2}\right]$.

联赛模拟题(6)第一试

一、填空题

1.〖答案〗2013.

〖解〗设方程 $(k-1)x^2-px+2k=0$ 的两个根 x_1,x_2 都是正整数,由韦达定理,得

$$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{p}{k-1}, & ①\\ x_1x_2=\frac{2k}{k-1}. & ②\end{cases}$$

由②得,$x_1x_2=\frac{2k}{k-1}=2+\frac{2}{k-1}$,又因为 $k\in\mathbf{N}^*$,且 $k\geqslant 3$,所以 $k-1=2$,即 $k=3$,于是 $x_1x_2=3$,所以 $x_1+x_2=4$,代入①得 $p=8$,故

$$12(p+k)^2+51(p+k)=2013.$$

2.〖答案〗$\left[\frac{-\sqrt{2}-1}{2},-1\right)\cup(-1,0)$.

〖解〗令 $t=\sin x+\cos x$,则 $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$,于是 $y=\frac{t-1}{2}$,又 $t=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$,因 $-\frac{3\pi}{4}<x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$,则 $\sin(x+\frac{\pi}{4})\in(-1,\frac{\sqrt{2}}{2}]$,即 $t\in(-\sqrt{2},1]$,注意 $t\neq-1$,则有 $y\in\left[\frac{-\sqrt{2}-1}{2},-1\right)\cup(-1,0)$.

3.〖答案〗$\frac{3}{8}$.

〖解〗在 D_1A_1 的延长线上取一点 H,使 $A_1H=\frac{1}{4}$.

易证 $HE // B_1G, HE //$ 平面 B_1FG. 故

$$V_{B_1-EFG}=V_{E-B_1FG}=V_{H-B_1FG}=V_{G-B_1FH}.$$

而 $S_{\triangle B_1FH}=\frac{9}{8}$，点 G 到平面 B_1FH 的距离为 1，故 $V_{B_1-EFG}=\frac{3}{8}$.

4.〖答案〗$2\sqrt{3}$.

〖解〗由题意得 $z_1=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{4}z_2$，故 $|z_1|=\left|\frac{1\pm\sqrt{3}i}{4}\right|\cdot|z_2|=2$，且 $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg\frac{1\pm3i}{4}=\pm\frac{\pi}{3}$. 所以 $\angle POQ=\frac{\pi}{3}$. 故 $S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}|z_1|\cdot|z_2|\cdot\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$.

5.〖答案〗$\frac{13}{6}$.

〖解〗注意到 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，则有 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2=2$，同样可求得 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$.

又 $\begin{cases}2=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AB}^2+\mu\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=4\lambda-\mu,\\ \frac{1}{2}=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{AC}^2=-\lambda+u\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lambda=\frac{5}{6},\\ \mu=\frac{8}{6}\end{cases}\Rightarrow\lambda+\mu=\frac{13}{6}.$$

6.〖答案〗3.

〖解〗设 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，则 $-1<\beta<0, 1<\alpha<2$，且 $\alpha+\beta=1, \alpha\beta=-1$，，故 α,β 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两个不等实数根，令 $A_n=\alpha^n+\beta^n$，则可得 $A_{n+2}=A_{n+1}+A_n$，且 $A_1=1, A_2=3$，得数列 $\{A_n\}$ 被 11 除的余数构成数列为：1，3，4，7，0，7，7，3，10，2，1，3，4，…，是周期为 10 的数列.

又当 n 是奇数时，$\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n\right]=A_n$，当 n 是偶数时，$\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n\right]=A_n-1$，故 A_{2013} 被 11 除的余数为 3.

7.〖答案〗$\frac{36}{13}$.

〖解〗设 $A(r_1\cos\theta, r_1\sin\theta)$，$B(-r_2\sin\theta, r_2\cos\theta)$. 将点 A、B 的坐标分别代入椭圆方程得

$$\frac{r_1^2\cos^2\theta}{9}+\frac{r_1^2\sin^2\theta}{4}=1,\quad\frac{r_2^2\sin^2\theta}{9}+\frac{r_2^2\cos^2\theta}{4}=1.$$

则 $r_1^2=\frac{36}{4\cos^2\theta+9\sin^2\theta}$，$r_2^2=\frac{36}{4\sin^2\theta+9\cos^2\theta}$. 又因 $OA\perp OB$，所以，

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}r_1r_2=\frac{18}{\sqrt{(4\cos^2\theta+9\sin^2\theta)(4\sin^2\theta+9\cos^2\theta)}}$$

$$=\frac{18}{\sqrt{97\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta+36(\sin^4\theta+\cos^4\theta)}}$$

$$=\frac{18}{\sqrt{36+25\sin^2\cdot\cos^2\theta}}$$

$$=\frac{18}{\sqrt{36+\frac{25}{4}\sin^2 2\theta}}\geqslant\frac{18}{\sqrt{36+\frac{25}{4}}}=\frac{36}{13}.$$

当且仅当 $|\sin 2\theta|=1$，即 $\theta=k\pi\pm\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$ 时，$S_{\triangle AOB}$ 取到最小值 $\frac{36}{13}$.

8.〖答案〗2^n-n-1.

〖解〗因为 $a_1<a_2<\cdots a_i, a_i>a_{i+1}, a_{i+1}<a_{i+2}<\cdots<a_n$，所以，对某个 i 定下后，我们先从原集合中任意选出 i 个数，从小到大排列为 $a_1<a_2<\cdots a_i$，剩下的数从小到大排列为 $a_{i+1}<a_{i+2}<\cdots<a_n$ 由于 $a_i>a_{i+1}$，所以只要排除选出的恰好是 $\{1,2,\cdots,i\}$ 这种情况即可.

$$\therefore\quad p_n=\sum_{i=1}^{n-1}(\mathrm{C}_n^i-1)=\sum_{i=0}^{n}(\mathrm{C}_n^i-1)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^i-(n+1)=2^n-n-1.$$

二、解答题

9.〖解〗由题设，得

$$\frac{a_n}{2^{n^2}}=\frac{2a_{n-1}}{2^{n^2-2n+1}}+n=2\cdot\frac{a_{n-1}}{2^{(n-1)2}}+n.$$

令 $b_n=\frac{a_n}{2^{n^2}}$，则 $b_n=2b_{n-1}+n$，

即 $$b_n+n=2(b_{n-1}+n-1)+2, b_1=1.$$

再令 $c_n=b_n+n$，则 $c_n=2c_{n-1}+2$，

即 $$c_n+2=2(c_{n-1}+2), c_1=2.$$

$\therefore c_n+2=(c_1+2)\cdot2^{n-1}=2^{n+1}$，即 $c_n=2^{n+1}-2$.

$\therefore b_n=c_n-n=2^{n+1}-n-2$.

故 $a_n=2^{n^2}a_n=2^{n^2}(2^{n+1}-n-2)$，$(n=1,2,\cdots)$.

10.〖解〗$\because$ 椭圆 Γ 的离心率是 $\frac{1}{2}$，$\therefore c=\frac{a}{2}$，$b^2=\frac{3}{4}a^2$，椭圆的方程可写为

$$3x^2+4y^2=3a^2. \qquad ①$$

设直线 l 的方程为　$x=my-2a$，　②

①、②联立，得

$$(3m^2+4)y^2-12may+9a^2=0.$$

依题意，该方程的判别式 $\triangle>0$，即 $m^2-4>0$.

设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 两点到左准线的距离分别

为 d_1、d_2 则

$$|AF_1|=\frac{1}{2}d_1,|BF_1|=\frac{1}{2}d_2.$$

又 $d_1=|my_1|,d_12=|my_2|$,因此 $\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_1|}=\frac{1}{12}$ 可化为

$$\left|\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}\right|=\frac{|m|}{24}. \quad ③$$

将 $y_1+y_2=\frac{12ma}{3m^2+4},y_1y_2=\frac{9a^2}{3m^2+4}$ 代入③式得

$$\frac{|12ma|}{9a^2}=\frac{|m|}{24}\Rightarrow a=32.$$

所以, $S_{\triangle ABF_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3a}{2}|y_1-y_2|=\frac{9a^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{m^2-4}}{3m^2+4}$. ④

令 $t=\sqrt{m^2-4}(t>0)$,则④式可化为

$$S_{\triangle ABF_1}=\frac{9a^2}{2}\cdot\frac{t}{3t^2+16}\leqslant\frac{9a^2}{2}\cdot\frac{t}{2\times4\times\sqrt{3}t}=192\sqrt{3}.$$

当且仅当 $t^2=\frac{16}{3}$ 时,"="成立,此时 $m=\pm\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

∴ 直线 l 的方程为 $x=\pm\frac{2\sqrt{21}}{3}y-64$,即 $x\pm\frac{2\sqrt{21}}{3}y+64=0$.

11.〖解〗因为正实数 x,y,z 满足 $x^2+y^2+z^2=3$,所以 $0<x<\sqrt{3}<2$.

由单调性知,$\frac{9}{4x-x^2}+\frac{2}{2-x}\geqslant5$,从而

$$\frac{2-x}{4x-x^2}\geqslant\frac{1}{9}[5(2-x)-2]=\frac{8-5x}{9}.$$

同理 $\frac{2-y}{4y-y^2}\geqslant\frac{8-5y}{9}$, $\frac{2-z}{4z-z^2}\geqslant\frac{8-5z}{9}$.

$$\therefore\frac{2-x}{4x-x^2}+\frac{2-y}{4y-y^2}+\frac{2-z}{4z-z^2}\geqslant\frac{8}{3}-\frac{5}{9}(x+y+z).$$

又由 $(x+y+z)^2\leqslant3(x^2+y^2+z^2)=9$ 得 $x+y+z\leqslant3$. 所以 $\frac{8}{3}-\frac{5}{9}(x+y+z)\geqslant1$.

$\therefore\frac{2-x}{4x-x^2}+\frac{2-y}{4y-y^2}+\frac{2-z}{4z-z^2}\geqslant1$,当且仅当 $x=y=z=1$ 时取等号.

所以,$u=\frac{2-x}{4x-x^2}+\frac{2-y}{4y-y^2}+\frac{2-z}{4z-z^2}$ 的最小值为1.

联赛模拟题(6)加试

一、〖证明〗我们首先证明 $\triangle FDG\backsim\triangle FBE$.

由 $\triangle EAB\backsim\triangle EDC$, $\triangle FAB\backsim\triangle FCD$ 及 $GD=EC$, $\angle CDG=\angle DCE=\angle DCA=\angle DBA$ 得

$$\angle FDG=\angle FDC+\angle CDG$$
$$=\angle FBA+\angle ABD=\angle FBE,$$
$$\frac{GD}{EB}=\frac{CE}{EB}=\frac{CD}{AB}=\frac{FD}{FB}.$$

从而,$\triangle FDG\backsim\triangle FBE$. $\angle FGD=\angle FEB$.

又 H 为 E 关于 FD 的对称点,所以

$$\angle FHD=\angle FED=180°-\angle FEB=180°-\angle FGD.$$

所以,D,H,F,G 四点共圆.

二、〖解〗考虑如下几种情形:

(1)若存在 a,使得 $f(a)=a$,则 $f(a)+f^{-1}(a)=2a\neq2013$. 所以不可能.

(2)若存在 $a\neq b$,使得 $f(a)=b,f(b)=a$,则 $f(a)+f^{-1}(a)=2b\neq2013$. 所以不可能.

(3)存在三个相异整数 a,b,c 使得 $f(a)=b,f(b)=c$ 且 $f(c)=a$,则 $f(a)+f^{-1}(a)=b+c$ 且 $f(b)+f^{-1}(b)=c+a$. 由 $b+c=c+a=2013$,得 $b=a$,矛盾.

(4)若存在 $k(k\geqslant5)$ 相异整数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$,使得 $f(a_1)=a_2,f(a_2)=a_3,\cdots,f(a_{k-1})=a_k$,且 $f(a_k)=a_1$,则 $f(a_2)+f^{-1}(a_2)=a_3+a_1=2013=f(a_4)+f^{-1}(a_4)=a_5+a_3$,得 $a_1=a_5$,矛盾.

(5)若存在4个相异整数 a,b,c,d,使得 $f(a)=b,f(b)=c,f(c)=d$ 且 $f(d)=a$,则 $f(b)+f^{-1}(b)=c+a=2013=f(d)+f^{-1}(d)$,即 $c=2013-a$,同理 $d=2013-b$. 因此,$(a,b,c,d)=(a,b,2013-a,2013-b)$ 形成一个环状组.

因为只有(5)可以成立,只要确定503个 $(a_i,b_i,2013-a_i,2013-b_i)$ 环状组,就决定一个这样的函数 f. 因为 a_i 和 $2013-a_i$ 分别有一个小于1007,一个大于1007. 对于 b_i 和 $2013-b_i$ 也是相同,所以可设 $1\leqslant a_i,b_i\leqslant1006$,即可确定 $(a_i,b_i,2013-a_i,2013-b_i)$(此时不再是环状组,而是有序组). 从 $\{1,2,\cdots,1006\}$ 中依序选出 $a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_{503},b_{503}$,这会有1006!种可能. 而这503组无顺序之分,因此函数 f 的个数是 $\frac{1006!}{503!}$.

三、〖证明〗因为 $(a^4+b^4+c^4)(a^2+b^2+c^2)\geqslant(a^3+b^3+c^3)^2$,下证明更强的结论:

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2+b^2+c^2}\geqslant3R^2$$
$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4\geqslant3R^2(a^2+b^2+c^2).$$

由 Heron 公式,$16S^2=2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-(a^4+b^4+c^4)$,其中 S 表示 $\triangle ABC$ 的面积,结合三角形恒等式 $a^2b^2c^2=16R^2S^2$,知所证不等式等价于

$$a^4+b^4+c^4\geqslant\frac{3a^2b^2c^2}{16S^2}(a^2+b^2+c^2),$$

也即 $[2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-(a^4+b^4+c^4)](a^4+b^4+c^4)\geqslant3a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)$.

由$\triangle ABC$为锐角三角形,设$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}>0$,$y=\frac{c^2+a^2-b^2}{2}>0$,$z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}>0$,则$a^2=y+z$,$b^2=z+x$,$c^2=x+y$,对所证不等式置换,整理为

$$4(yz+zx+xy)(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)$$
$$\geqslant 3(x+y+z)(y+z)(z+x)(x+y).$$

上式展开,整理,得

$$x^3(y+z)+y^3(z+x)+z^3(x+y)-2(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)\geqslant 0,$$

也即　$yz(y-z)^2+zx(z-x)^2+xy(x-y)^2\geqslant 0.$

四、〖证明〗令集合

$$A=\{a\mid 1\leqslant a\leqslant p-1,a^{p-1}\not\equiv 1(\bmod p^2)\}.\quad ①$$

对于$1\leqslant a\leqslant p-1$,

$$(p-a)^{p-1}-a^{p-1}\equiv-(p-1)pa^{p-2}\not\equiv 0(\bmod p^2).\quad ②$$

所以,$(p-a)p-1$与$a^{p-1}(\bmod p^2)$不同,因而至少有一个$\not\equiv 1(\bmod p^2)$. 这表明a与$p-a$中至少有一个$\in A$.

反设题中结论不成立,则在$1,2,\cdots,p-1$,每两个连续自然数至少有一个不属于A.

显然,$1\notin A$,所以$p-1\in A$,$p-2\notin A$,$2\in A$,$3\notin A$,$p-3\in A$,$p-4\notin A$.

从而,$(p-4)^{p-1}\equiv 1(\bmod p^2)$,$(p-2)^{p-1}\equiv 1(\bmod p^2)$,也即

$$4^{p-1}+p\cdot 4^{p-2}\equiv 1(\bmod p^2),$$
$$2^{p-1}+p\cdot 2^{p-2}\equiv 1(\bmod p^2),$$

后一式平方减去前一式,得

$$p^2\mid 2\cdot 2^{p-1}\cdot p\cdot 2^{p-2}-p\cdot 4^{p-2}$$
$$=p(4^{p-1}-4^{p-2})=3p\cdot 4^{p-2},$$

不可能,所以本题结论成立.

联赛模拟题(7)第一试

一、填空题

1.〖答案〗$(-\ln 2^e,+\infty)$.

〖解〗在$2^{\frac{1}{x}}>x^a$两边取对数,得$\frac{\ln 2}{x}>a\ln x$,由于$0<x<1$,所以$\frac{a}{\ln 2}>\frac{1}{x\ln x}$ ①,考虑$f(x)=\frac{1}{x\ln x}$,$f'(x)=\frac{\ln x+1}{x^2\ln^2 x}$,令$f'(x)=0$得$x=\frac{1}{e}$. 列表如下:

x	$(0,\frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e},1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	−
$f(x)$	↗	极大值$f(\frac{1}{e})$	↘	↘

故当$x\in(0,1)$时,$f(x)\leqslant f(\frac{1}{e})=-e$,①对所有$x\in(0,1)$成立,当且仅当$\frac{a}{\ln 2}>-e$,即$a>-\ln 2^e$.

2.〖答案〗1.

〖解〗设$AB=x$,$CD=y$,$AD=BC=z$,$AC=BD=t$,则$e_1=\frac{AB}{BD-AD}=\frac{x}{t-z}$,$e_2=\frac{CD}{AD+AC}=\frac{y}{t+z}$.

所以$e_1e_2=\frac{xy}{t^2-z^2}$.

过点D作$DH\perp AB$于H,由等腰梯形的对称性,得

$$t^2-z^2=BD^2-AD^2=BH^2-AH^2$$
$$=(BH+AH)(BH-AH)=AB\cdot CD=xy.$$

所以$e_1e_2=1$.

3.〖答案〗$(2n-2)^n$.

〖解〗令$x_i=\frac{1}{2+a_i}$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2+a_i}=\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{2},$$

则
$$a_i=\frac{1}{x_i}-2=2\cdot\frac{\frac{1}{2}-x_i}{x_i}$$
$$=\frac{2}{x_i}\cdot(x_1+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_n)$$
$$\geqslant\frac{2}{x_i}(n-1)(\prod_{j\neq i}x_j)^{\frac{1}{n-1}},$$

所以,$\prod_{i=1}^{n}a_i\geqslant(2n-2)^n$.

4.〖答案〗$\frac{2\sqrt{14}+\sqrt{7}}{7}$.

〖解〗由题设及二倍角公式,得

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}.$$

则$\sqrt{2}\cos 2x=-\frac{1}{2}$,$\cos 2x=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

又$x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,$2x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,有

$$\tan 2x=-\sqrt{7}=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.$$

解得$\tan x=\frac{2\sqrt{14}+\sqrt{7}}{7}$.

5.〖答案〗$8\sqrt{2}$.

〖解〗由$|z|=2$知$|a++bi|=|z|^3=8$,从而$a^2+b^2=8^2=64$. 因此

$$(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)=128,$$

所以,$a+b\leqslant 8\sqrt{2}$,当且仅当$a=b=4\sqrt{2}$时等号成立,故$a+b$的最大值为$8\sqrt{2}$.

6.【答案】588.

【解】$\frac{1}{2}(OB\times OC\sin\angle BOC+OD\times OA\sin\angle AOD)$

$$\geqslant 2\sqrt{\frac{OB\times OC\times OD\times OA\sin\angle BOC\sin\angle AOD}{2\times 2}}$$

$$=2\sqrt{36\times 64}=2\times 6\times 8=96.$$

在 $OB=12,OC=8,OD=16,OA=6$ 时等号成立，所以底面积最小值为 $36+64+96=196$.

体积最小值为 $\frac{1}{3}\times 9\times 196=588$.

7.【答案】$\dfrac{\left(|\boldsymbol{y}|^2-\frac{1}{4}|\boldsymbol{x}|^2\right)(2\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})}{\left|-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\right|^2}-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$.

【解】设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{y}$，由此得，$\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$.

因为 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影为 $\overrightarrow{OK}=\dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}$,

则 $\overrightarrow{OB_1}=2\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OB}=\dfrac{2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}-\boldsymbol{b}$

$$=\frac{\left(|\boldsymbol{y}|^2-\frac{1}{4}|\boldsymbol{x}|^2\right)(2\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})}{\left|-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\right|^2}-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}.$$

8.【答案】$1+\sqrt{2}$.

【解】记 $S=\sum\limits_{n=1}^{99}\sqrt{10+\sqrt{n}},T=\sum\limits_{i=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{n}}$

$$\sqrt{2}S=\sum\sqrt{20+2\sqrt{n}}$$

$$=\sum\left(\sqrt{10+\sqrt{100-n}}+\sqrt{10-\sqrt{100-n}}\right)$$

$$=S+T.$$

二、解答题

9.【解】因为 f 是 A 到 A 上的一一映射，又 A 是有限集，所以，对每一个 $x\in A$，相应的有一个正整数 $k(1\leqslant k\leqslant 10)$，使得 $f_k(x)=x$.

由条件(1)推知，对任意 $x\in A$，有 $k\neq 1$；

由条件(2)推知，对于 A 中的 x，有 $k=7$ 或 3.

由 $10=7+3,21=7\times 3$，可将 A 划分为两部分：

作映射 f，$a_1\xrightarrow{f}a_2\xrightarrow{f}\cdots\xrightarrow{f}a_7\xrightarrow{f}a_1$ 和 $b_1\xrightarrow{f}b_2\xrightarrow{f}b_3\xrightarrow{f}b_1$ 满足要求.

故满足题设要求的映射 f 的总数为

$$C_{10}^7\cdot\frac{7!}{7}\cdot C_3^3\cdot\frac{3!}{3}=172800.$$

10.【解】设点 M,N 的坐标分别为 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2)，曲线 C 在点 M,N 处的切线分别为 l_1,l_2，其交点 P 的坐标为 (x_p,y_p)，设 l 的方程为 $x=m(y-1)$，由方程组 $\begin{cases}y^2=4x,\\x=m(y-1)\end{cases}$ 消去 x 得

$$y^2-4my+4m=0,$$

该方程有两个相异的实根 y_1,y_2，由韦达定理得

$$y_1+y_2=4m,\quad ①$$

$$y_1y_2=4m.\quad ②$$

并且有 $\Delta=16m^2-16m>0$，由此解得 $m<0$ 或 $m>1$.

设过 M 点的抛物线的切线 l_1 为 $x=m_1(y-y_1)+x_1$，代入抛物线方程得到

$$y^2-4m_1y+4m_1y_1-4x_1=0.$$

令 $\Delta_1=16m_1^2-16m_1y_1+16x_1=0$，即

$$16m_1^2-16m_1y_1+4y_1^2=(4m_1-2y_1)^2=0,$$

得到 $m_1=\frac{y_1}{2}$. 所以切线 l_1 方程为 $x=\frac{y_1}{2}(y-y_1)+x_1$，即

$$x=\frac{y_1}{2}y-\frac{y_1^2}{4}.\quad ③$$

同理可求得直线 l_2 的方程为

$$x=\frac{y_2}{2}y-\frac{y_2^2}{4}.\quad ④$$

③－④得

$$\left(\frac{y_1}{2}-\frac{y_2}{2}\right)y-\left(\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_2^2}{4}\right)=0.$$

因为 $y_1\neq y_2$，故有

$$y_p=\frac{y_1+y_2}{2}.\quad ⑤$$

将⑤代入④式得 $x_p=\frac{y_1y_2}{4}$，结合①②可知 $y_p=2x_p$.

由于 $m<0$ 或 $m>1$，故

$$x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty),$$

即点 P 的轨迹为不含端点的两条射线：

$$y=2x(x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)).$$

11.【证明】$|a_{m+1}-a_m-a_1|<\dfrac{1}{m+1}$

$$|a_{m+1}-a_{m-1}-a_2|<\frac{1}{m+1}.$$

所以，$\quad |a_m-a_{m-1}-a_2+a_1|<\dfrac{2}{m+1}.$

又 $\quad |a_m-a_{m-1}-a_1|<\dfrac{1}{m+1},$

所以 $\quad |a_2-2a_1|<\dfrac{3}{m+1}.$

令 $m\to+\infty$ 得 $a_2=2a_1$.

一般地，由

$$|a_{m+n}-a_m-a_n|<\frac{1}{m+n},$$

$$|a_{m+n}-a_{m-1}-a_{n+1}|<\frac{1}{m+n},$$

$$|a_m-a_{m-1}-a_1|<\frac{1}{m+n},$$

得 $$|a_{n+1}-a_n-a_1|<\frac{3}{m+n}$$

令 $m\to+\infty$ 得，$a_{n+1}=a_n+a_1$

从而 $a_n=na_1$，$\{a_n\}$ 是等差数列.

联赛模拟题(7)加试

一、〖证明〗延长 AD 到 C_1，使得 $DC_1=DC$，则 $\angle AC_1C=\frac{1}{2}\angle ADC=\angle ABC$，从而 A,B,C_1,C 四点共圆，记圆心为 O，则 O 在 l 上，过 B 作 l 的垂线，交圆 O 于 B_1，则 BB_1CC_1 为等腰梯形，从而 $B_1C_1=BC=AC$，则 AB_1C_1B 为等腰梯形，从而 $B_1B=AC_1$，所以，顶点 B 到 $\angle ADC$ 外角平分线的距离等于 $AD+DC$ 的一半.

二、〖证明〗只需证明 $\frac{p^{2p}+1}{p^2+1}$ 的任一质因数 q 满足

$$q\equiv1(\bmod 4p).$$

由 $q\mid p^{2p}+1$ 知 $p^{2p}\equiv-1(\bmod q)$. ①

所以，$p^{4p}\equiv1(\bmod q)$.

由费马小定理，知 $p^{q-1}\equiv1(\bmod q)$.

设 $(4p,q-1)=r$，则 $p^r\equiv1(\bmod q)$.

注意到①，则有 $r=4$ 或 $4p$.

若 $r=4$，则 $p^4-1=(p^2+1)(p^2-1)\equiv0(\bmod q)$.

由①，$p^2\not\equiv1(\bmod q)$，所以 $p^2\equiv-1(\bmod q)$，于是

$$0\equiv\frac{p^{2p}+1}{p^2+1}=(p^2)^{(p-1)}-(p^2)^{(p-2)}+\cdots+p^4-p^2+1\equiv p(\bmod q),$$

从而 $p=q$，矛盾，故 $r\neq4$.

从而 $r=4p$，则有 $4p\mid q-1$，也即 $q\equiv1(\bmod 4p)$.

三、〖证明〗再设 D 是题给路线的转弯点个数，E 是恰有一对相邻边属于路线的方格个数，F 是恰有一边属于路线的方格个数，G 是恰有三边属于路线的方格个数. 则 $A+D=(m-1)(n-1)$,

$$B+C+E+F+G=mn$$

(没有四边都属于不自交路线的方格).

由于路线的每边恰属于两个方格，对于方格－边关联算两次得

$$2B+2E+F+3G=2(m-1)(n-1).$$

最后，转弯点处的两边构成一个方格的一角，只有 E,G 两类方格有这种角，故 $E+2G=D$. 于是

$$\begin{aligned}2B+2E+F+3G&=(B+E+F+G)+B+(E+2G)\\&=mn-C+B+D=2(m-1)(n-1)\\&=(m-1)(n-1)+A+D,\end{aligned}$$

$$A=B-C+mn-(m-1)(n-1)=B-C+m+n-1.$$

四、〖解〗因为不等式①是齐次全对称的，所以不失一般性，设 $z>y>x$，那么①即为

$$x^3+y^3+z^3-3xyz\geqslant k(z-y)(z-x)(y-x).\quad②$$

②化简整理等价于

$$(x+y+z)[(z-y)^2+(z-x)^2+(y-x)^2]\geqslant2k(z-y)(z-x)(y-x).\quad③$$

作差分代换，设 $y=a+x,z=b+a+x$，其中 $a,b\in\mathbf{R}^+$，将其代入③式整理得

$$3x(a^2+ab+b^2)+(2a+b)(a^2+ab+b^2)\geqslant kab(a+b).\quad④$$

因为 $x>0$，欲使④式成立，我们只需有

$$(2a+b)(a^2+ab+b^2)\geqslant kab(a+b).\quad⑤$$

⑤式展开整理等价于

$$b^3+(3-k)b^2a+(3-k)ba^2+2a^3\geqslant0.\quad⑥$$

令 $t=\frac{b}{a}$，显然 $t>0$. 所以不等式⑥就转化为对 $t>0$，函数

$$f(x)=t^3+(3-k)t^2+(3-k)t+2\geqslant0$$

恒成立. 下面只需求使 $f(t)\geqslant0$ 对 $t>0$ 恒成立的最大 k 值即可. 为此先对 t 求导：

$$f'(t)=3t^2+2(3-k)t+3-k.$$

由 $f'(t)=0$，解得 $t=\frac{k-3\pm\sqrt{k(k-3)}}{3}$，注意到 $t>0$，则 $f(t)$ 在 $t=\frac{k-3+\sqrt{k(k-3)}}{3}$ 时取得最小值，即此时 $f(t)=0$，将 $t=\frac{k-3+\sqrt{k(k-3)}}{3}$ 代入、化简、整理，得

$$2k^3-9k^2-27=2k(k-3)\sqrt{k(k-3)},$$

上式两边平方，约去 27 整理得

$$k^4-18k^2-27=0\Leftrightarrow(k^2-9)^2=108.$$

解上述方程，并注意到 $k>0$，得，$k^2-9=6\sqrt{3}$，即 $k=\sqrt{9+6\sqrt{3}}$. 从而所求 k 的最大值为 $\sqrt{9+6\sqrt{3}}$.

联赛模拟题(8)第一试

一、填空题

1.〖答案〗2.

〖解〗注意到 $f'(x)=\sin x+x\cos x$. 由函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极值，知 $f'(x_0)=0$，即 $x_0=-\tan x_0$. 故

$$(1+x_0^2)(1+\cos2x_0)=(1+\tan^2x_0)\cdot2\cos^2x_0$$

$=\sec^2 x_0 \cdot 2\cos^2 x_0 = 2$.

2.【答案】$(-1,0)\cup(3,+\infty)$.

【解】由题设,得$f(x-2)=-f(x)$,故

$$f(x-4)=-f(x-2)=f(x).$$

所以,$f(2013)=f(1)$.

又$f(-1)-\frac{3}{f(-1)}>-2$,即$f(1)-\frac{3}{f(1)}<2$,解得

$$-1<f(1)<0 \text{ 或 } f(1)>3.$$

3.【答案】$\frac{\sqrt{23}}{3}$.

【解】设AB的中点为P.则顶点V在底面的射影O在CP上,且是底面的中心.所以,

$$CP=\sqrt{3},CO=\frac{2}{3}CP=\frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$VO=\sqrt{VC^2-OC^2}=\sqrt{\frac{23}{3}}.$$

为使$\triangle ABD$的面积最小,即PD最小,于是,PD为异面直线AB、VC的公垂线.

$$PD\cdot VC=2S_{\triangle VPC}=VO\cdot PC\Rightarrow PD=\frac{\sqrt{23}}{3}.$$

所以,$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot PD=\frac{\sqrt{23}}{3}$.

4.【答案】4.

【解】因为　$\cos 55°\cdot\cos 65°\cdot\sin 85°$

$$=\frac{1}{2}(\cos 120°+\cos 10°)\cos 5°$$

$$=\frac{1}{2}\cos 10°\cdot\cos 5°-\frac{1}{4}\cos 5°$$

$$=\frac{1}{4}(\cos 15°+\cos 5°)-\frac{1}{4}\cos 5°$$

$$=\frac{1}{4}\cos 15°.$$

所以,$\frac{\cos 15°}{\cos 55°\cdot\cos 65°\cdot\sin 85°}=4$.

5.【答案】$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$.

【解】当$n=1$时,$S_1=\frac{1}{2}$.

当$n>1$时,由题设得

$$S_n^2-2S_n-(S_n-S_{n-1})S_n+1=0,$$

化简,得
$$\frac{1}{S_n-1}=\frac{1}{S_{n-1}-1}-1.$$

所以,$\frac{1}{S_n-1}=-n-1$,从而$S_n=\frac{n}{n+1}$.

进一步得,$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{n(n+1)}$,易知$n=1$时也满足上式.

6.【答案】$(0,1)$.

【解】设$A(s,t)$,$B(0,-m)$$(t,m>0)$.

当直线斜率存在时,设$l:y=kx-m$,与椭圆方程联立,得

$$(1+2k^2)x^2-4kmx+2m^2-2=0.$$

设$C(x_1,kx_1-m)$,$D(x_2,kx_2-m)$.则

$$x_1+x_2=\frac{4km}{1+2k^2},x_1x_2=\frac{2m^2-2}{1+2k^2}.$$

又$0=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=(x_1-s,kx_1-m-t)\cdot(x_2-s,kx_2-m-t)=(1+k^2)x_1x_2-(s+km+kt)(x_1+x_2)+s^2+(m+t)^2=\frac{1}{1+2k^2}[(-2+2s^2+2t^2)k^2-4msk+2m^2-2+s^2+(m+t)^2]$.

比较系数,得$4ms=0$,$-2+2s^2+2t^2=0$,从而

$$(s,t)=(0,1).$$

7.【答案】55.

【解】不妨设$1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant a_4\leqslant 5$,则

$$1\leqslant a_1<a_2+1<a_3+2<a_4+3\leqslant 8.$$

于是积$x=a_1a_2a_3a_4$(包括值相同的)共有$C_8^4=70$个.现从中去掉积值相同的x.

因为$1\times 4a_3a_4=2\times 2a_3a_4$,$1\leqslant a_3\leqslant a_4\leqslant 5$,$1\leqslant a_3<a_4+1\leqslant 6$,所以,重复的积值共$C_6^2=15$个,从而不同的积有$70-15=55$个.

8.【答案】8.

【解】易知
$$\left[\frac{n}{k}\right]=\begin{cases}\left[\frac{n-1}{k}\right], & k\text{ 不是 }n\text{ 的因数},\\ \left[\frac{n-1}{k}\right]+1, & k\text{ 是 }n\text{ 的因数}.\end{cases}$$

设$d(n)$是n的因数的个数,则

$$f(n)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n}{i}\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n-1}{i}\right]+d(n)$$
$$=f(n-1)+d(n).$$

所以,　$f(2013)-f(2012)=d(2013)$
$$=d(3\times 11\times 61)=2^3=8.$$

二、解答题

9.【证明】因为$f(x)=ax^3+bx^2+cx$在$\mathbf{R}$上为单调函数,所以$f'(x)\geqslant 0$或者$f'(x)\leqslant 0$在$\mathbf{R}$上恒成立,但不恒为0.

若$a=0$,则$f'(x)=2bx+c$,要是$f'(x)=2bx+c$恒$\geqslant 0$或恒$\leqslant 0$,但不恒为0,必有$b=0$,$c\neq 0$,此时$f(1)=a+b+c\neq 0$.

若$a\neq 0$,则$f'(x)=3ax^2+2bx+c$,要使$f'(x)=3ax^2+2bx+c$恒$\geqslant 0$或恒$\leqslant 0$,必有$(2b^2)-12ac\leqslant 0$,即$b^2\leqslant 3ac$,反设此时$f(1)=0$,则有

$$3ac\geqslant b^2=(a+c)^2=a^2+c^2+2ac\geqslant 4ac,$$

所以 $ac\leqslant 0$，则 $ac=0$，由 $a\neq 0$，得 $c=0,b=0$，此时 $f(1)=a\neq 0$.

综上，$f(1)\neq 0$.

10.〖解〗(1)由题设化简变形易得

$$a_n=\frac{1}{2n-1},b_n=\frac{2n-3}{2n-1}.$$

所以，$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}+\frac{1}{b_k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(2k-1+\frac{2k-1}{2k-3}\right)$$

$$=n^2+n+\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-3}$$

$$>n^2+n-2+2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\frac{2}{9}+\frac{2}{11}$$

$$>n^2+n+\frac{3}{2};$$

(2)记 $F(n)=(1+a_1)\cdots(1+a_n)\sqrt{-b_1b_2\cdots b_{n+1}}$，下求 $F(n)_{\min}$.

又 $$\frac{F(n+1)}{F(n)}=(1+a_{n+1})\sqrt{b_{n+2}}=\frac{2n+2}{2n+1}\sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}}$$

$$=\frac{2n+1}{\sqrt{(2n+3)(2n+1)}}>1.$$

从而对任意正整数 n，$F(n+1)>F(n)$. 因此 $F(1)$最小. 所以

$$k\leqslant F(n)_{\min}=F(1)=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

11.〖证明〗设过点 $C(0,5)$ 的直线 l 方程为 $y-kx-5=0$. 又 l 与圆 $D:(x-10)^2+y^2=\frac{225}{64}$ 相切，由点到直线距离公式知

$$\frac{|10k+5|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{15}{8}\Rightarrow 247k^2+256k+55=0.$$

设其两根分别为 k_1、k_2，则

$$k_1+k_2=-\frac{256}{247},k_1k_2=\frac{55}{247}.$$

又由 $y=kx+5$ 和 $\frac{x^2}{13^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ 联立解得

$$x_M=\frac{-1690k_1}{25+169k_1^2},x_N=\frac{-1690k_2}{25+169k_2^2}.$$

从而 $k_{MN}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{25(k_1+k_2)}{25-169k_1k_2}=\frac{80}{39}$. 设 MN 的方程为 $y-\frac{80}{39}x+t=0$，则由距离公式易求得 $t=\frac{595}{24}$，将 MN 方程与椭圆方程联立，得 M、N 两点坐标适合直线 l 方程，故命题得证.

联赛模拟题(8)加试

一、〖证明〗设 MH 与 AP，NH 与 BP 分别交于点 M_1、N_1，则

$$MP^2=NM_1^2+M_1P^2=MM_1^2+PH^2-HM_1^2.$$

所以，$$MP^2-MH^2=MM_1^2-HM_1^2-MH^2+PH^2$$

$$=(M_1H+MH)^2-M_1H^2--MH^2+PH^2$$

$$=2M_1H\cdot MH+PH^2. \quad ①$$

同理，$$NP^2-NH^2=2N_1H\cdot NH+PH^2. \quad ②$$

设 AH、BH 分别交 BC、AC 于点 A_1、B_1，则 N,B_1,N_1,B 四点共圆，从而有

$$NH\cdot HN_1=BH\cdot HB_1,$$

同理，有 $$MH\cdot HM_1=AH\cdot HA_1.$$

结合 $AH\cdot HA_1=BH\cdot HB_1$，得 $NH\cdot HN_1=MH\cdot HM_1$. 从而由①、②知 $MP^2-MH^2=NP^2-NH^2$. 所以，$HP\perp MN$，同理 $HP\perp ML$，因此，M、N、L 三点共线.

二、〖解〗因为 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_2=\frac{7}{12}$，所以，其小数点后第一位数字均为5. 又

$$a_3=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{37}{60},$$

其小数点后第一位数字是6.

下证对任意正整数 $n(n\geqslant 3)$，有 $0.6<a_n<0.7$.

注意到

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}>0.$$

故对任意正整数 $n(n\geqslant 3)$，有 $a_n\geqslant a_3>0.6$

下归纳证明：对任意正整数 $n(n\geqslant 3)$，有 $a_n\leqslant 0.7-\frac{1}{4n}$.

当 $n=3$ 时，有 $a_3=\frac{37}{60}=0.7-\frac{1}{12}$.

假设结论对 n 成立，即 $a_n\leqslant 0.7-\frac{1}{4n}$. 则

$$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$\leqslant 0.7-\frac{1}{4n}+\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$<0.7-\frac{1}{4(n+1)}.$$

所以，正整数 $n(n\geqslant 3)$，a_n 小数点后第一位数字均为6.

三〖解〗我们用数学归纳法证明至少有 st 个数同时被红蓝笔圈出.

对 $s+t$ 进行归纳.

当 $s+t=2$ 时，$s=t=1$，结论显然成立，这是因为 mn 个数中最大的一个数既被红笔圈出，又被蓝笔圈

出.

假设结论对 $s+t=k$ 成立,下考虑 $s+t=k+1$ 的情形.

将这 mn 个数依从大到小的顺序排列成 $a_1,a_2,\cdots,a_{mn}$. 显然 a_1 同时被红、蓝笔圈出. 设第一个不被红、蓝笔同时圈出的数为 a_r.

不妨设 a_r 未被红笔圈出,此时,与 a_r 同行的数中有 s 个比 a_r 大,从而,它们都同时被红、蓝笔圈出. 将这行删除,剩下 $(m-1)n$ 个数,填在 $(m-1)\times n$ 的方格中,每行 s 个最大的数用红笔圈出,每列 $t-1$ 个最大的数用蓝笔圈出,且 $s+(t-1)=k$,根据归纳假设,必有 $s(t-1)$ 个数同时被红、蓝笔圈出.

于是,共有 $s(t-1)+s=st$ 个数同时被红、蓝笔圈出. 命题得证.

四、〖证明〗首先证明一个引理:

设小于 p 的素数从小到大依次为 $p_1,p_2,\cdots,p_k$. 则对每个 $p_i(1\leqslant i\leqslant k)$,存在正整数 n 及正整数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,使得

$$p_i\equiv\prod_{i=1}^{n}(x_i^2-1)(\bmod p).$$

证明:注意到 $3=2^2-1,2^3=3^2-1,2^4\times 3=7^2-1$. 由裴蜀定理知,存在 $x,y\in\mathbf{N}$,使得 $3x+4y\equiv 1(\bmod p-1)$.

由费马小定理得

$2\equiv 2^{3x+4y}\cdot 3^y\cdot 3^{p-1-y}\equiv(3^2-1)^x(7^2-1)^y(2^2-1)^{p-1-y}(\bmod p)$.

从而引理对 $p_1=2,p_2=3$ 成立. 假设引理对 $p_1,p_2,\cdots,p_t(2\leqslant t\leqslant k-1)$ 成立. 则

$(p_{t+1}-1)^2-1=p_{t+1}(p_{t+1}-2)=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}p_{t+1}$, $(\alpha_i\in\mathbf{N},1\leqslant i\leqslant t)$.

由归纳假设知

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}\equiv\prod_{x\in A}(x^2-1)(\bmod p).$$

从而由费马小定理知

$$p_{t+1}\equiv[(p_{t+1}-1)^2-1]\Big(\prod_{x\in A}(x^2-1)\Big)^{p-2}(\bmod p).$$

所以,引理对 p_{t+1} 成立,引理得证. 回到原题.

(1)若 $p\mid s$,取 $n=1,x_1=1$ 即可;

(2)若 $p\nmid s$,不妨设 $2\leqslant s\leqslant p-1$(对 $s=1$,取 $n=p-1,x_1=x_2=\cdots=x_n=2$ 即可),设 s 的标准分解式为 $s=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}$. 由引理知,存在正整数集 $A_1,A_2,\cdots,A_t$,使得

$$p_i^{\alpha_i}\equiv\prod_{x\in A_i}(x^2-1)(i=1,2,\cdots,t).$$

从而,$\prod_{i=1}^{n}\prod_{x\in A}(x^2-1)\equiv s(\bmod p)$. 命题得证.

联赛模拟题(9)第一试

一、填空题

1.〖答案〗$(2\sqrt{2},2\sqrt{3})$.

〖解〗由锐角三角形知 $B=2A<90°,C=180-3A<90°$,所以 $30°<A<45°$.

再由 $B=2A$ 知,$AC=2BC\cos A$,从而 $AC\in(2\sqrt{2},2\sqrt{3})$.

2.〖答案〗$(-\frac{11}{5},\frac{23}{5})$.

〖解〗设 $\overrightarrow{OA}=(m,n)$,则 $\overrightarrow{OB}=(-n,m)$,所以

$2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(2m-n,2n+m)=(7,9)$.

即 $\begin{cases}2m-n=7,\\m+2n=9.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\frac{23}{5},\\n=\frac{11}{5}.\end{cases}$ 因此 $\overrightarrow{OA}=(\frac{23}{5},\frac{11}{5})$, $\overrightarrow{OB}=(-\frac{11}{5},\frac{23}{5})$.

3.〖答案〗$\frac{\pi}{3}$.

〖解析〗设矩形 $ABCD,AB=1,BC=2$,菱形的边长为 a,一个内角为 φ,则 $a\leqslant AB=1$. 于是

$$\cos\theta=\frac{a^2\sin\varphi}{AB\cdot CD}=\frac{a^2\sin\varphi}{2}\leqslant\frac{1}{2}\Rightarrow\theta\geqslant\frac{\pi}{3}.$$

又当 $AB//$平面 α 时,则 $a=1,\varphi=\frac{\pi}{2}$ 此时取到 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

4.〖答案〗1.

〖解〗$x^3-6x^2-4=(x-2)^3-12(x-2)-20$,

$y^3-3y^2-9y-9=(y-1)^3-12(y-1)-20$.

注意到 $(x^3-12x)'=3x^2-12$,所以 x^3-12x 在 $x=-2$ 时取到极大值 16,也即 $x^3-12x=20$ 只有唯一解,从而 $x-2=y-1,x-y=1$.

5.〖答案〗$(2k-1,2k+\sqrt{5}-2)(k\in\mathbf{R})$.

〖解〗由题设,$f(2+x)=f(-x)=f(x)$,所以,$f(x)$ 是周期为 2 的周期函数.

又函数图像在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时为 $f(x)=2\sqrt{1-x^2}$,$1\leqslant x\leqslant 3$ 时,$f(x)=2\sqrt{-x^2+4x-3}$. 联立方程结合函数图像知 $(2k-1,2k+\sqrt{5}-2)(k\in\mathbf{R})$.

6.〖答案〗$\sqrt[3]{196}$.

〖解〗注意到 $7a^3+4+4\geqslant 6\sqrt[3]{14}a$,

$\frac{14}{3}b^3+9+9\geqslant 9\sqrt[3]{14}b$,

$$14c^3+1+1\geqslant 3\sqrt[3]{14}c,$$

所以，$3\sqrt[3]{14}(2a+3b+c)\leqslant 42$

$$\Rightarrow 2a+3b+c\leqslant\sqrt[3]{196}.$$

7.【答案】$\frac{195}{512}$.

【解】收集卡片总共有 4^6 种可能，其中，获奖的情况可分为两类：

(1)有 3 袋食品的卡片相同的获奖情况(如 $AAABCD$)为 $C_6^3\times 4!$种；

(2)有两组 2 袋食品的卡片相同的获奖情况(如 $AABBCD$)有$\frac{C_6^2C_4^2}{2}\times 4!$种.

所以，概率为$\frac{195}{512}$.

8.【答案】$\left(\frac{5}{2},4\right)$.

【解】设 $M(x,y)$是曲线 C 上任意一点. 由题意

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+|x-4|=5.$$

化简得 $y^2=\begin{cases}4x, & 0\leqslant x\leqslant 4, \quad ①\\ -16(x-5), & 4\leqslant x\leqslant 5. \quad ②\end{cases}$

结合图像知，只需图像①上有一点(x_1,y_1)和②上一点(x_2,y_2)关于 $B(b,0)$对称，则

$x_1+x_2=2b, y_1+y_2=0.$

结合①、②方程相减得 $x_2+4x_1=20$. 故 $2b+3x_1=20$，即 $b=10-\frac{3}{2}x_1\in\left[\frac{5}{2},4\right]$，检验知两端点处不合.

二、解答题

9.【解】由题设，得

$$x_n^2-x_{n-1}^2=2(x_n-x_{n-1})+n(3n+1)$$

$$\Rightarrow x_n^2-2x_n=x_{n-1}^2-2x_{n-1}+n(3n+1).$$

待定系数 a,b,c，则

$$(x_n-1)^2+an^3+bn^2$$

$$=(x_{n-1}-1)^2+a(n-1)^3+b(n-1)^2+c,$$

比较系数，得 $a=-1,b=-2,c=1$，从而 $a_n=(x_n-1)^2-n^3-2n^2$ 构成公差为 1 的等差数列，所以$(x_n-1)^2=n^3+2n^2+n$，故 $x_n=1+(n+1)\sqrt{n}$.

10.【解】由已知，可得$\frac{x_k}{y_k}\leqslant S$，且 $x_k,y_k,S>0(k=1,2,\cdots,n)$. 从而 $y_k\geqslant\frac{x_k}{S}$.

将这样的 n 个式子相加，即得

$$y_1+y_2+\cdots y_n\geqslant\frac{1}{S},$$

(2)令 $y_0=1$，则 $x_k=y_k-y_{k-1}(k=1,2,\cdots,n)$. 其中，$y_n=2$.

由$\frac{x_k}{y_k}\leqslant S$，得$\frac{y_k-y_{k-1}}{y_k}\leqslant S$，即

$$1-S\leqslant\frac{y_{k-1}}{y_k}(k=1,2,\cdots,n).$$

故$(1-S)^n\leqslant\frac{y_0}{y_1}\cdot\frac{y_1}{y_2}\cdot\cdots\cdot\frac{y_{n-1}}{y_n}=\frac{1}{2}$.

显然 $0<S<1$. 于是，$1-S\leqslant\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$，即 $S\geqslant 1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$.

当且仅当$\frac{y_k}{y_{k-1}}=\frac{1}{1-S}$，即 $y_k=\sqrt[n]{2^k}$，$x_k=\sqrt[n]{2^k}-\sqrt[n]{2^{k-1}}(k=1,2,\cdots,n)$时，上式等号成立.

因此，S 的最小值为 $1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$.

11.【解】显然 $c=m$，由 $e=\frac{1}{2}$得 $a=2m,b^2=3m^2$. 椭圆方程为$\frac{x^2}{4m^2}+\frac{y^2}{3m^2}=1$. 将椭圆方程和抛物线方程联立，解得 $x_P=\frac{2m}{3}$，$y_P=\frac{2\sqrt{6}m}{3}$. 于是

$$|PF_2|=x_P+m=\frac{5m}{3},$$

$$|PF_1|2a-|PF_2|=\frac{7m}{3},$$

$$|F_1F_2|=2m=\frac{6m}{3}.$$

因为$\triangle PF_1F_2$ 边长为三连续自然数，故 $m=3$，此时有 $C_1:y^2=12x$，$P(2,2\sqrt{6})$，$PQ:y=-2\sqrt{6}(x-3)$. 解得 $Q\left(\frac{9}{2},-3\sqrt{6}\right)$，故$|PQ|=\frac{25}{2}$.

设点 $M\left(\frac{t^2}{12},t\right)$，则 m 到直线 PQ 距离为

$$d=\frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{6}t^2+t-6\sqrt{6}\right|}{\sqrt{24+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{30}\left|\left(t+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-\frac{75}{2}\right|.$$

当 $t=-\frac{\sqrt{6}}{2}$时，$d_{\max}=\frac{5\sqrt{6}}{4}$，此时$\triangle MPQ$ 的面积的最大值为

$$\frac{1}{2}\times\frac{25}{2}\times\frac{5\sqrt{6}}{4}=\frac{125\sqrt{6}}{16}.$$

联赛模拟题(9)加试

一、【证明】显然，$PB\neq PC$，否则 B、C 关于直线 AP 对称，$AB=AC$，矛盾. 故而$\angle OPB\neq\angle OCP$. 设$\triangle ABC$ 的

外接圆交 AP 于 E,连 OB,OC,由正弦定理得

$$\frac{OP}{\sin\angle OBP}=\frac{OB}{\sin\angle APB}=\frac{OC}{\sin\angle APC}=\frac{OP}{\sin\angle OCP},$$

所以,$\sin\angle OBP=\sin\angle OCP$, $\angle OBP+\angle OCP=180°$,$O,B,P,C$ 四点共圆.

从而 $OD\cdot DP=BD\cdot DC$,又 $BD\cdot DC=AD\cdot DE$,所以,$OD\cdot DP=AD\cdot DE$,由 $AD=DP$ 得 $OD=DE$,所以,$AD=3OD$,即有

$$\frac{1}{3}=\frac{OD}{AD}=\frac{CO\cdot\sin\angle OCD}{CA\cdot\sin\angle ACD}$$
$$=\frac{R\sin(90°-A)}{2R\sin B\sin C}=\frac{\cos A}{2\sin B\sin C}$$
$$\Rightarrow 3\cos(B+C)+2\sin B\sin C=0$$
$$\Rightarrow 3\cos B\cos C=\sin B\sin C$$
$$\Rightarrow \tan B\tan C=3.$$

二、【解】记所求的立方和为 $S_n(S_1=10,S_2=64)$. 设第 $n-1$ 个数列 $A_{n-1}=(a_0,a_1,\cdots,a_k)$,$a_0=a_k=1$. 则

$$A_n=(a_0,a_0+a_1,a_1,a_1+a_2,\cdots,a_{k-1}+a_k,a_k),$$
$$S_n=S_{n-1}+\sum_{i=0}^{k-1}(a_i+a_{i+1})^3$$
$$=3S_{n-1}-2+3\sum_{i=0}^{k-1}(a_ia_{i+1}^2+a_i^2a_{i+1}).$$

同理,$S_{n+1}=3S_n-2+3\sum\limits_{i=0}^{k-1}[a_i^2(a_i+a_{i+1})+a_i(a_i+a_{i+1})^2+(a_i+a_{i+1})^2a_{i+2}+(a_i+a_{i+1})a_{i+2}^2]$.

由于 $a_i^2(a_i+a_{i+1})+a_i(a_i+a_{i+1})^2+(a_i+a_{i+1})^2a_{i+2}+(a_i+a_{i+1})a_{i+2}^2=2(a_i^3+a_{i+1}^3)+4(a_i^2a_{i+1}+a_ia_{i+1}^2)$,故

$$S_{n+1}=3S_n-2+6(2S_{n-1}-2)+4(S_n-3S_{n-1}+2)=7S_n-6(n\geqslant1).$$

迭代得

$$S_n=7^{n-1}S_1-6(1+7+\cdots+7^{n-2})=9\cdot7^{n-1}+1.$$

三、【解】反设有 S 的 $m+1$ 元子集 A,每个 $x\in A$ 不整除另外 m 个数的乘积 $P(A\backslash\{x\})$. 则有 x 的素因子 p 使得 $\alpha_p(x)>\alpha_p(A\backslash\{x\})$,称这样的 p 为 x 的特异素因子(可有多个).

由于 $|A|=m+1$,所有特异素因子都属于 S,而 S 中的素数只有 m 个,故必有 A 的元素 $x\neq y$ 具有同一特异素因子 p. 由特异性及 $y\in A\backslash\{x\}$,故 $\alpha_p(x)>\alpha_p(A\backslash\{x\})\geqslant\alpha_p(y)$,同理 $\alpha_p(y)>\alpha_p(A\backslash\{y\})\geqslant\alpha_p(x)$,矛盾.

四、【解】记 $T=\{1,2,\cdots,n\}$. 若 $S_A\geqslant\lambda$,则

$$S_{T\backslash A}=\sum_{i=1}^n x_i-S_A=0-S_A\leqslant-\lambda.$$

对于任意正实数 λ,设满足 $S_A\geqslant\lambda$ 的集合 A 的个数为 m,以这些集合为元素组成的集合为 $M=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$,则

$$2m\lambda^2=m\lambda^2+m(-\lambda)^2$$
$$\leqslant\sum_{A\in M}S_A^2+\sum_{A\in M}S_{T\backslash A}^2\leqslant\sum_{A\subseteq T}S_A^2.$$

注意到包含元素 i 的集合 A 有 2^{n-1} 个,而同时包含元素 i 和 $j(i\neq j)$ 的集合 A 有 2^{n-2} 个. 则

$$\sum_{A\subseteq T}S_A^2=2^{n-1}\sum_{i=1}^n x_i^2+2^{n-2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}2x_ix_j$$
$$=2^{n-2}\sum_{i=1}^n x_i^2+2^{n-2}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}2x_ix_j\right)$$
$$=2^{n-2}\sum_{i=1}^n x_i^2+2^{n-2}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2=2^{n-2}.$$

所以 $2m\lambda^2\leqslant2^{n-2}$,解得 $m\leqslant\dfrac{2^{n-3}}{\lambda^2}$.

由前分析知道,等号成立的条件为:对于任意 $S_A\geqslant\lambda$ 的集合 A,都有 $S_A=\lambda$,$S_{T\backslash A}=-\lambda$,且对任意 $-\lambda<S_A<\lambda$,都有 $S_A=0$. 因此,$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $(\lambda,-\lambda,0,0,\cdots,0)$ 或其某个排列. 再由 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 知 $\lambda=\dfrac{\sqrt2}{2}$.

联赛模拟题(10)第一试

一、填空题

1.【答案】$\left(\dfrac{8}{15},\dfrac{6}{5}\right)$.

【解】$f(x,y)=\sqrt{(0+2)^2+(3x-0)^2}+\sqrt{(1-0)^2+(2y-3x)^2}+\sqrt{(3-1)^2+(4-2y)^2}$,它表示由点 $A(-2,0)$,$B(0,3x)$,$C(1,2y)$,$D(3,4)$ 所构成的折线段 $ABCD$ 的长,当且仅当 A,B,C,D 共线时,$f(x,y)$ 最大,此时

$$\frac{3x}{2}=\frac{4}{5},\frac{2y}{3}=\frac{4}{5}\Rightarrow(x,y)=\left(\frac{8}{15},\frac{6}{5}\right).$$

2.【答案】$\dfrac{1}{2}$.

【解】S 是正方形 $-2\leqslant x\leqslant2$, $-2\leqslant y\leqslant2$ 在 $y=|x|$ 图像下方的区域,面积为 $A_S=16-4=12$.

方程 $t^2+(|x|-1)t+|y|-2=0$ 一个根大于 1,一个根小于 1 等价于 $(t_1-1)(t_2-1)<0$,即 $t_1t_2-(t_1+t_2)+1<0$,亦即 $|x|+|y|<2$. 其面积在 S 中的部分的面积为 $A_P=8-2=6$. 故所求概率为 $P=\dfrac{A_P}{A_S}=\dfrac{1}{2}$.

3.【答案】$\sqrt3$.

【解】设内切球球心为 O,D 为 BC 中点,作 $PH\perp$ 面

ABC 于 H,则点 O 在 PH 上. 由条件知,$HD=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{3}=1$,$OH=\sqrt{2}-1$,$\angle PDH=2\angle ODH$. 所以,

$$\tan\angle ODH=\sqrt{2}-1,\tan\angle PDH=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=1,$$

$PH=HD$.

所以三棱锥体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2\times 1=\sqrt{3}$.

4.【答案】3.

【解】由柯西不等式,

$$3(a+b+c)=(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)\geqslant(a+b+c)^2.$$

所以,$a+b+c\leqslant 3$,当 $a=b=c=1$ 时取得等号.

5.【答案】1.

【解】由题设条件,得

$$\frac{\cos\left(x+\frac{y}{2}\right)+\cos\left(x-\frac{y}{2}\right)}{\cos\left(x-\frac{y}{2}\right)}+\frac{\cos\left(y+\frac{x}{2}\right)+\cos\left(y-\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(y-\frac{x}{2}\right)}=2$$

即 $\frac{\cos\left(x+\frac{y}{2}\right)}{\cos\left(x-\frac{y}{2}\right)}=-\frac{\cos\left(y+\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(y-\frac{x}{2}\right)}$.

由合比定理,得 $\frac{\cos x\cos\frac{y}{2}}{\sin x\sin\frac{y}{2}}=\frac{\sin y\sin\frac{x}{2}}{\cos y\cos\frac{x}{2}}\Rightarrow$

$\frac{\cos x}{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}}=\frac{2\sin\frac{y}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos y}\Rightarrow\cos x\cos y=4\sin^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{y}{2}=(1-\cos x)(1-\cos y)\Rightarrow\cos x+\cos y=1$.

6.【答案】120.

【解】因为 $a_{k+1}-a_k=1$ 或 -1,若有 m 个 1,则有 $10-m$ 个 -1,从而有 $4=m-(10-m)$,解得 $m=7$. 从而所求这样的数列个数为 $C_{10}^7=120$.

7.【答案】3.

【解】因为两椭圆有公共焦点,所以

$(t^2+2t-2)-(t^2+t+2)=(2t^2-3t-5)-(t^2+t-7)$
$\Rightarrow t-4=t^2-4t+2\Rightarrow t^2-5t+6=0\Rightarrow t=3$ 或 $t=2$(舍去).

8.【答案】1.

【解】因为 p、q 是不同的质数,所以由费马小定理知 $p^{q-1}\equiv 1(\bmod q)$,又 $q^{p-1}\equiv 0(\bmod q)$,所以

$$p^{q-1}+q^{p-1}\equiv 1(\bmod q).$$

同理, $p^{q-1}+q^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$.

又 $[p,q]=pq$,故 $p^{q-1}+q^{p-1}\equiv 1(\bmod pq)$.

二、解答题

9.【解】令 $g(y)=|y-a|+\frac{a^2}{2}$,

$\therefore g(y)=f(\ln y)$ 在 $\ln y\in[0,\ln 3]$ 时的最值之差为 $\frac{3}{2}$.

$\therefore g(y)$ 在 $y\in[1,3]$ 的最值之差为 $\frac{3}{2}$.

由于平移不改变最值之差,

$\therefore |y-a|$ 在 $y\in[1,3]$ 是的最值之差为 $\frac{3}{2}$.

i)若 $a\in[1,3]$ 则 $|y-a|_{min}=0$

$|y-a|=\max\{3-a,a-1\}$.

由已知 $\frac{3}{2}=\max\{3-a,a-1\}\Rightarrow a=\frac{5}{2}$ 或 $a=\frac{3}{2}$,

经检验,$a=\frac{5}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$ 均符合.

ii)若 $a\notin[1,3]$,则 $|y-a|$ 的最大值分别在 $y=1$,3 取到,$\therefore$ 最值之差为 $2\neq\frac{3}{2}$.

综上所述,a 的值为 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{5}{2}$.

10.(1)【解】AB 所在直线的方程为 $x=t_1(y-n)+m$,其中 $t_1=\frac{1}{k_1}$,代入 $y^2=2px$ 中,得

$$y^2-2pt_1y+2pt_1n-2pm=0.$$

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则有 $y_1+y_2=2pt_1$,从而 $x_1+x_2=t(y_1+y_2-2n)+2m=t_1(2pt_1-2n)+2m$. 则 $M(pt_1^2-nt_1+m,pt_1)$.

CD 所在直线的方程为 $x=t_2(y-n)+m$,其中 $t_2=\frac{1}{k_2}$,同理可得 $N(pt_2^2-nt_2+m,pt_2)$.

当 $n=0$ 时,$E(m,0)$,$M(pt_1^2+m,pt_1)$,$N(pt_2^2+m,pt_2)$,$|EM|=|pt_1|\sqrt{1+t_1^2}$,$|EN|=|pt_2|\sqrt{1+t_2^2}$. 又 $k_1\cdot k_2=-1$,故 $t_1\cdot t_2=-1$ 于是 $\triangle EMN$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}|EM|\cdot|EN|=\frac{1}{2}|p^2t_1t_2|\sqrt{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}=\frac{p^2}{2}\cdot\sqrt{2+t_1^2+t_2^2}\geqslant\frac{p^2}{2}\cdot\sqrt{4}=p^2,$$

当且仅当 $|t_1|=|t_2|=1$ 时等号成立.

所以,$\triangle EMN$ 的面积的最小值为 p^2.

(2)【证明】由(1)有

$$k_{MN}=\frac{p(t_1-t_2)}{p(t_1^2-t_2^2)-n(t_1-t_2)}=\frac{1}{(t_1+t_2)-\frac{n}{p}},$$

MN所在直线的方程为$y-pt_1=\dfrac{1}{(t_1+t_2)-\dfrac{n}{p}}\cdot[x-(pt_1^2-nt_1+m)]$,即

$$y\left(t_1+t_2-\frac{n}{p}\right)-pt_1t_2=x-m.$$

又$k_1+k_2=\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}=\lambda$,即$t_1t_2=\dfrac{t_1+t_2}{\lambda}$,代入上式,得

$$y\left(t_1+t_2-\frac{n}{p}\right)-p\cdot\frac{t_1+t_2}{\lambda}=x-m.$$

即
$$(t_1+t_2)\left(y-\frac{p}{\lambda}\right)=x+\frac{ny}{p}-m.$$

当$y-\dfrac{p}{\lambda}=0$时,有$x+\dfrac{ny}{p}-m=0$,即$\begin{cases}y=\dfrac{p}{\lambda},\\x=m-\dfrac{n}{\lambda}\end{cases}$为方程的一组解,所以直线$MN$恒过定点$\left(m-\dfrac{n}{\lambda},\dfrac{p}{\lambda}\right)$.

11.【证明】记$a_{4k+3}=b_k$,则易得$b_0=5,b_1=\dfrac{21}{4},b_2=\dfrac{85}{4^2},b_3=\dfrac{341}{4^3},\cdots$,一般地,若$b_k=\dfrac{x_k}{4^k}$,则

$$b_{k+1}=\frac{4x_k+1}{4^{k+1}}=\frac{x_k}{4^k}+\frac{1}{4^{k+1}}=b_k+\frac{1}{4^{k+1}},$$

所以,$b_{k+1}-b_k=\dfrac{1}{4^{k+1}}$. 于是

$$\begin{aligned}b_n&=(b_n-b_{n-1})+\cdots+(b_1-b_0)+b_0\\&=\frac{1}{4^n}+\frac{1}{4^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{4}+5=\frac{16}{3}-\frac{1}{3\cdot4^n},\end{aligned}$$

即$a_{4n+3}=\dfrac{16}{3}-\dfrac{1}{3\cdot4^n}$.

所以,数列$\{a_{4n+3}\}$严格单调递增.

由于对每个n,a_{4n+3}是$a_{4n+1},a_{4n+2},a_{4n+3},a_{4n+4},a_{4n+5}$中最大数,故得,当$k\leqslant4n+3$时,$a_k\leqslant a_{4n+3}$,而$a_{4n+3}=\dfrac{16}{3}-\dfrac{1}{3\cdot4^n}<\dfrac{16}{3}$,因此对每个$n\in\mathbf{N}$,$a_n<\dfrac{16}{3}$.

又若c是小于$\dfrac{16}{3}$的任意一数,则$\dfrac{16}{3}-c=a>0$,由于当$n\to+\infty$时,$\dfrac{1}{3\cdot4^n}\to0$,故有$n\in\mathbf{N}$,使$0<\dfrac{1}{3\cdot4^n}<a$,这时,

$$a_{4n+3}=\frac{16}{3}-\frac{1}{3\cdot4^n}>\frac{16}{3}-a=c,$$

即c不是数列的上界,因此数列$\{a_n\}$的最小上界为$\dfrac{16}{3}$.

联赛模拟题(10)加试

一、【证明】只证必要性. 连接AO,BO,CO,DO,EF,FH,EG,HG. 作平行四边形$HSMG$,易知$EFGH$也是平行四边形. 则

$$\angle OEF=\angle OAF=\angle ODA=\angle FHO,$$
$$\angle OEG=\angle OBC=\angle OCB=\angle OHG.$$

所以,$\angle SEG=\angle SHG=\angle SMG$. 从而$E,S,G,M$四点共圆.

易知$EFSM$为平行四边形,则

$$\angle SFH=\angle MEG=\angle MSG=\angle SGH.$$

又$\angle OFG=\angle ODH=\angle OCD=\angle OGH.$

于是$\angle OFS=\angle OGS.$

二、【证明】用数学归纳法证明:存在恰有$k\geqslant2$个不同素因子的好数n,此时对n的所有因子a_i,存在m个整数$b_1,b_2,\cdots,b_m$和$c_1,c_2,\cdots,c_m$,使得

$$n=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{b_i}a_i,0=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{c_i}a_i.$$

当$k=2$时,取$n=6=2\cdot3$,则

$$6=1+2-3+6,0=-1-2-3+6.$$

对$k=3$,取$n=2\cdot3\cdot p_1$,则

$$6p_1=-1-2-3+6-p_1-2p_1+3p_1+6p_1,$$
$$0=-1-2-3+6-p_1-2p_1-3p_1+6p_1.$$

假设结论对$k+2$成立,及对$n=2\cdot3\cdot p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdot p_k$,结论成立. 有

$$n=\sum_{i=1}^{2k+2}(-1)^{b_i}a_i,0=\sum_{i=1}^{2k+2}(-1)^{c_i}a_i.$$

即有则当$n=2\cdot3\cdot p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdot p_k\cdot p_{k+1}$,即$k+3$时,有

$$n\cdot p_{k+1}=\sum_{i=1}^{2k+2}(-1)^{b_i}(a_ip_{k+1})+\sum_{i=1}^{2k+2}(-1)^{c_i}a_i.$$

$$0=\sum_{i=1}^{2k+2}(-1)^{c_i}(a_ip_{k+1})+\sum_{i=1}^{2k+2}(-1)^{c_i}a_i.$$

结论得证.

三、【解】记方程为$P(x,y)$,由$P(0,0)$得到$f(0)^2=2f(0)$,故$f(0)=0$或2.

若$f(0)=2$,由$P(x,0)$得到$f(x)=x+2$,经验证不合原方程. 故必$f(0)=0$.

由$P(1,-1)$得到$f(1)f(-1)=3f(-1)$,故$f(-1)=0$或$f(1)=3$.

(1)若$f(1)=3$. 由$P(x,1)$得到

$$f(x+1)=3(x+1),$$

故$f(x)=3x$,经检验易知这为一组解.

(2)若$f(-1)=0$. 由$P(2,-1)$得到,$f(-2)=f$

(1),由 $P(-2,1)$ 得到

$f(-2)f(1)=3f(-2)-f(1)\Rightarrow f(-2)=f(1)=0$ 或 2.

(i)若 $f(-2)=f(1)=0$.

$P(-x,1)$:　$f(-x+1)=3f(-x)$,　①

$P(x-1,-1)$:　$f(x-2)=f(1-x)$,　②

$P(x-2,1)$:　$f(x-1)=3f(x-2)$,　③

$P(x,-1)$:　$f(x-1)=f(-x)$.　④

所以,$f(-x)=f(x-1)=3f(x-2)=3f(1-x)=9f(-x)$,从而 $f(-x)=0$. 也即 $f(x)=0$,检验知此解满足题设.

(ii))若 $f(-2)=f(1)=2$.

由 $P(x-1,1)$ 及④,得

$$f(x)=f(x-1)+2x=f(-x)+2x,$$

即　$f(-x)=f(x)-2x$,　⑤

从而　$f(-x^2)=f(x^2)-2x^2$.　⑥

由 $P(x,-x)$ 得

$$f(x)f(-x)=f(-x^2)+(1-x)f(x)+(1+x)f(-x).\quad ⑦$$

将⑤、⑥代入⑦,并化简得

$$f(x)^2=f(x^2)+(2x+2)f(x)-2x(1+2x).\quad ⑧$$

由 $P(x,x)$ 得

$$f(2x)+f(x)^2=f(x^2)+(2x+2)f(x).\quad ⑨$$

由⑧、⑨得

$$f(2x)=2x(1+2x)\Rightarrow f(x)=x(1+x)=x^2+x.$$

经检验,此解满足题设.

综上,原方程共有 3 个解 $f(x)=0,3x$ 或 x^2+x.

四、〖证明〗记 M 是选出点的集合,考虑 M 中纵坐标为 k 的点的两两横坐标之和

$$S_k=\{x_1+x_2\mid(x_1,k)\in M,(x_2,k)\in M,且\ x_1\neq x_2\}.$$

注意到 $(x_1,k),(x_2,k),(x_3,k'),(x_4,k')$ 构成等腰梯形,当且仅当 $x_1+x_2=x_3+x_4$. 所以,如果没有 4 点构成等腰梯形,则集合 $S_k(1\leqslant k\leqslant 101)$ 两两不交. 注意到,若我们假设 $x_1<x_2<\cdots<x_n$,我们可以得到 $2n-3$ 个不同的和:

$$x_1+x_2<x_1+x_3<x_2+x_3<x_2+x_4<\cdots<x_{n-2}+x_{n-1}<x_{n-2}+x_n<x_{n-1}+x_n.$$

所以,若在直线 $y=k$ 上有 n_k 个选出的点,则 $|S_k|\geqslant 2n-3$. 另一方面,所有的集合 $S_k(1\leqslant k\leqslant 101)$ 为集合 $T=\{3,4,\cdots,201\}$ 的子集,所以

$$199=|T|\geqslant\left|\bigcup_{k=1}^{101}S_k\right|=\sum_{k=1}^{101}|S_k|\geqslant\sum_{k=1}^{101}(2n_k-3)=2\sum_{k=1}^{101}n_k-303.$$

所以,$M=\sum\limits_{k=1}^{101}n_k\leqslant\dfrac{199+303}{2}=251$.

这样的情形可以取到,标记以下点即可:

$(x,x+1),1\leqslant x\leqslant 100,(y+1,y),1\leqslant y\leqslant 100$ 和点 $(2n-1,2n-2),1\leqslant n\leqslant 51$.

联赛模拟题(11)第一试

一、填空题

1.〖答案〗$\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{7+3\sqrt{13}}{2}\right]$.

〖解〗在坐标系 xOy 中,分别画出曲线 $y=1-x,y=x^2-1$ 及 $y=x+2$ 的图象,它们围成一个曲边三角形 ABC,其中 $A\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\right),B\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right),C(1,0)$.

因此,问题转化为直线系 $u=2x+y$ 与曲边三角形 ABC 有公共点时,直线的纵截距 u 的取值范围. 数形结合易知:过点 A 时,u 取最大值 $\dfrac{7+3\sqrt{13}}{2}$,过点 B 时,u 取最小值 $\dfrac{1}{2}$.

因此 $u(x,y)=2x+y$ 的取值范围是闭区间 $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{7+3\sqrt{13}}{2}\right]$.

2.〖答案〗$\dfrac{1}{5}$.

〖解〗设 p_1,p_2,p_3 分别表示这三个学生通过的概率. 则

$$p(x=0)=(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)=\frac{2}{5},$$

$$p(x=1)=p_1(1-p_2)(1-p_3)+p_2(1-p_3)(1-p_1)+p_3(1-p_1)(1-p_2)=\frac{13}{30},$$

$$p(x=2)=p_1p_2(1-p_3)+p_2p_3(1-p_1)+p_3p_1(1-p_2)=\frac{3}{20},$$

$$p(x=3)=p_1p_2p_3=\frac{1}{60},$$

由上四式展开,解得

$$\{p_1,p_2,p_3\}=\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right\}$$

3.〖答案〗$\dfrac{2\pi}{3}$.

〖解〗由题设,得 $\cos(A+2B)=-1,\cos(B+2C)=0$,可得 $A=\dfrac{2\pi}{3},B=C=\dfrac{\pi}{6}$.

4.〖答案〗$\dfrac{2}{9}$.

〖解〗易知 $A\left(3\sqrt{2},\dfrac{3}{2}\right),B\left(3\sqrt{2},-\dfrac{3}{2}\right)$,由 $\overrightarrow{OP}=m$

$\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$得$P\left(3\sqrt{2}(m+n),\frac{3}{2}(m-n)\right)$,代入双曲线方程得

$$\frac{18(m+n)^2}{16}-\frac{\frac{9}{4}(m-n)^2}{2}=1\Rightarrow mn=\frac{2}{9}.$$

5.【答案】-4895.

【解】由$a=\frac{b+c}{x-2}$得$x-1=\frac{b+c}{a}+1=\frac{a+b+c}{a}$,所以$\frac{1}{x-1}=\frac{a}{a+b+c}$,同理$\frac{1}{y-1}=\frac{b}{a+b+c}$,$\frac{1}{z-1}=\frac{c}{a+b+c}$,从而$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{z-1}=1$,展开整理,得

$$xyz=2(xy+yz+zx)-3(x+y+z)+4=-4895.$$

6.【答案】$\frac{\sqrt{2}}{324}a^3$.

【解】设正四面体$ABCD$的四个面的面积满足$S_1=S_2=S_3=S_4=S$,$x_1+x_2+x_3+x_4=h$,h表示正四面体$ABCD$的高.设O为正四面体$ABCD$的中心,O_1,O_2,O_3,O_4分别是O在四个面上的射影,则有$V_{OO_1O_2O_3}=V_{OO_2O_3O_4}=V_{OO_1O_2O_4}=V_{OO_1O_3O_4}=\frac{1}{4}V$,此处$V=V_{O_1O_2O_3O_4}$.

在正四面体$ABCD$中任取一点X,有

$$\frac{V_{XX_1X_2X_3}}{V_{OO_1O_2O_3}}=\frac{x_1x_2x_3}{r^3},$$

此处$r=\frac{h}{4}=OO_1=OO_2=OO_3=OO_4$,所以

$$V_{XX_1X_2X_3}=\frac{16V}{h^3}x_1x_2x_3.$$

从而可得

$$V_{X_1X_2X_3X_4}=\frac{16V}{h^3}(x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4).$$

令$a=x_1+x_2$,$b=x_3+x_4$,则$a+b=h$,所以

$$\begin{aligned}V_{X_1X_2X_3X_4}&=\frac{16V}{h^3}(x_1x_2b+x_3x_4a)\\&\leqslant\frac{16V}{h^3}\left[b\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+a\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)^2\right]\\&=\frac{16V}{h^3}\cdot\frac{a^2b+ab^2}{4}=\frac{4Vab}{h^2}ab\leqslant V.\end{aligned}$$

当$x_1=x_2$,$x_3=x_4$,即$a=b$时等号成立,此时$X=O$,即所求的点X是正四面体$ABCD$的中心.此时所求最大值为$\frac{1}{3^3}V_{ABCD}=\frac{1}{3^3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=\frac{\sqrt{2}}{324}a^3$.

7.【答案】$\frac{2012}{2013}\sqrt{2013}$.

【解】设$m=x+\sqrt{x^2+1}$,$n=y+\sqrt{y^2+1}$,则$mn=2013$.所以$\frac{1}{m}=\sqrt{x^2+1}-x$,$2x=m-\frac{1}{m}$,同理,$2y=n-\frac{1}{n}$,则

$$\begin{aligned}x+y&=\frac{1}{2}\left(m+n-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{2}(m+n)\left(1-\frac{1}{mn}\right)=\frac{1006}{2013}(m+n)\\&\geqslant\frac{2012}{2013}\sqrt{mn}=\frac{2012}{2013}\sqrt{2013}.\end{aligned}$$

当且仅当$m=n=\sqrt{2013}$时取到等号,所以$x+y$的最小值$\frac{2012}{2013}\sqrt{2013}$.

8.【答案】86400000.

【解】定义:对于每个正整数i,$x^{(i)}=x(x-1)(x-2)\cdots(x-i+1)$,$x^{(0)}=1$.则有当$x\in\mathbf{N}$,$i>x$时,必有$x^{(i)}=0$.易知每个$n$次多项式$f(x)$一定可以惟一的表示为$f(x)=a_nx^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\cdots+a_1x^{(1)}+a_0x^{(0)}$,$a_n\neq0$.设题中$f(x)=a_5x^{(5)}+a_4x^{(4)}+\cdots+a_1x^{(1)}+a_0$,首先对于$a_0$有120种不同的取法;若$a_0,a_1,\cdots a_{i-1}$确定,则对于$a_i$,只要

$$0\leqslant f(i)=a_ix^{(i)}+a_{i-1}x^{(i-1)}+\cdots+a_0<120.$$

从而a_i共有$\frac{120}{i!}$种不同的取法.所以所求不同的函数$f(x)$的个数为$\prod_{i=0}^{5}\frac{120}{i!}=86400000$.

二、解答题

9.【证明】由$a_1=2$,

$$a_2=\min\left\{\lambda\left|\frac{1}{a_1}+\frac{1}{\lambda}<1,\lambda\in\mathbf{N}^*\right.\right\},$$

考虑$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{\lambda}<1$,则$\frac{1}{\lambda}<1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,$\lambda>2$,从而$a_2=3$,即$n=1$时,结论成立.

假设对所有$n\leqslant k-1(k\geqslant2)$,结论成立.

当$n=k$时,由

$$a_{k+1}=\min\left\{\lambda\left|\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}+\frac{1}{\lambda}<1,\lambda\in\mathbf{N}^*\right.\right\},$$

考虑$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}+\frac{1}{\lambda}<1$,即

$$0<\frac{1}{\lambda}<1-\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right),$$

从而$\lambda>\dfrac{1}{1-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\cdots-\frac{1}{a_k}}$.

下面证明:$\dfrac{1}{1-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\cdots-\frac{1}{a_k}}=a_k(a_k-1)$.

由于假设对于$2\leqslant n\leqslant k$,$a_n=a_{n-1}(a_{n-1}-1)+1$,

有

$$\frac{1}{a_n-1}=\frac{1}{a_{n-1}(a_{n-1}-1)}=\frac{1}{a_{n-1}-1}-\frac{1}{a_{n-1}},$$

所以，$\frac{1}{a_{n-1}}=\frac{1}{a_{n-1}-1}-\frac{1}{a_n-1}$，求和得 $\sum_{i=2}^{k}\frac{1}{a_{i-1}}=1-\frac{1}{a_k-1}$，即

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}=1-\frac{1}{a_k-1}+\frac{1}{a_k}=1-\frac{1}{a_k(a_k-1)},$$

于是 $\frac{1}{1-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\cdots-\frac{1}{a_k}}=a_k(a_k-1)$.

所以

$$a_{k+1}=\min\left\{\lambda\ \middle|\ \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}+\frac{1}{\lambda}<1,\lambda\in\mathbf{N}^*\right\}$$

$$=a_k(a_k-1)+1,$$

由数学归纳法知，对所有正整数 n，有 $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$.

10.〖解〗九个编号不同的小球放在圆周的九个等分点上，每点放一个，相当于九个不同元素在圆周上的一个圆形排列，故共有 8！种放法，考虑到旋转因素，则本质不同的放法有$\frac{8!}{2}$种.

下求使 S 达到最小值的放法数：在圆周上，从 1 到 9 有优弧与劣弧两条路径，对其中任一条路径，设 x_1，x_2，…，x_2 是依次排列于这段弧上的小球号码，则 $|1-x_1|+|x_1-x_2|+\cdots+|x_2-9|\geqslant|(1-x_1)+(x_1-x_2)+\cdots+(x_2-9)|=|1-9|=8$. 上式取等号当且仅当 $1<x_1<x_2<\cdots<x_2<9$，即每一弧段上的小球编号都是由 1 到 9 递增排列.

因此 $S_{最小}=2\cdot8=16$.

由上知，当每个弧段上的球号 $\{1,x_1,x_2,\cdots,x_1,9\}$ 确定之后，达到最小值的排序方案便唯一确定.

在 1，2，…，9 中，除 1 与 9 外，剩下 7 个球号 2，3，…，8，将它们分为两个子集，元素较少的一个子集共有 $C_7^0+C_2^1+C_7^2+C_7^3=2^6$ 种情况，每种情况对应有着圆周上使 S 值达到最小的唯一排法，即有利事件总数是 2^6 种，故所求概率 $P=\frac{2^6}{\frac{8!}{2}}=\frac{1}{315}$.

11.〖解〗(1) 直线 MN 的倾斜角为 α，记 $\angle MFO=\theta$，则 $\alpha+\theta=\pi$，

$$|MN|=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\alpha}=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\theta}.$$

而 AB 与 MN 所成的角为$\frac{\pi}{4}+\theta$，则四边形 $MANB$ 面积

$$S_{MANB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|MN|\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$$

$$=\sqrt{2}|OA|\cdot ab^2\cdot\frac{\sin\theta+\cos\theta}{a^2-c^2\cos^2\theta}.$$

而 $a^2=16$，$b^2=11$，$c^2=5$，A 点坐标为 $\left(\frac{4\sqrt{33}}{9},\frac{4\sqrt{33}}{9}\right)$，且 $|OA|=\frac{4\sqrt{66}}{9}$，从而，

$$S_{MANB}=\frac{352\sqrt{33}}{9}\cdot\frac{\sin\theta+\cos\theta}{16-5\cos^2\theta}$$

$$=\frac{352\sqrt{33}}{9}\cdot\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{16-5\cos^2\alpha},$$

其中 $0<\alpha\leqslant\arctan\frac{4\sqrt{33}}{4\sqrt{33}+9\sqrt{5}}$ 或 $\arctan\frac{4\sqrt{33}}{4\sqrt{33}+9\sqrt{5}}\leqslant\alpha<\pi$.

(2) 记 $f(\alpha)=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{16-5\cos^2\alpha}$，而 $f(\alpha)$ 只可能在 $\alpha\in\left[\arctan\frac{4\sqrt{33}}{4\sqrt{33}-9\sqrt{5}},\pi\right)$ 时才可能取到最大值. 对 $f(\alpha)$ 求导数得到：

$f'(\alpha)=[(\cos\alpha+\sin\alpha)(16-5\cos^2\alpha)-(\sin\alpha-\cos\alpha)(10\cos\alpha\sin\alpha)](16-5\cos^2\alpha)^{-2}$.

令 $f'(\alpha)=0$，则有

$(1+\tan\alpha)(16\tan^2\alpha+11)-(\tan\alpha-1)\cdot10\tan\alpha=0$.

化简得到 $16\tan^3\alpha+6\tan^2\alpha+21\tan\alpha+11=0$.

所以 $(2\tan\alpha+1)(8\tan^2\alpha-\tan\alpha+11)=0$.

而 $8\tan^2-\tan\alpha+11=0$ 无实根，则 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$.

经检验 $\tan=-\frac{1}{2}$，符合 $\alpha\in\left[\arctan\frac{4\sqrt{33}}{4\sqrt{33}-9\sqrt{5}},\pi\right)$.

故所求直线 l 的方程为：$y=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{5}}{2}$.

联赛模拟题(11)加试

一、〖证明〗$\because GI/\!/AC$，G 为 $\triangle ABC$ 的重心，

$\therefore\frac{BG}{GM}=\frac{BI}{IE}=2$.

设 $AC=b$，$AB=c$，$BC=a$，因为 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，所以$\frac{CE}{EA}=\frac{a}{c}$，从而 $CE=\frac{ab}{a+c}$，

又 $\frac{BI}{IE}=\frac{BC}{CE}=2$，$\therefore 2b=a+c$

设 BI 的延长线与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 K，连接 KC，KA，则 $KI=KA=KC$，

由托勒密定理知 $AB\cdot KC+BC\cdot KA=AC\cdot BK$.

即
$$KI(a+c)=b\cdot BK.$$
$\therefore BK=2KI$，$\therefore OI\perp BK$.

又 $OM\perp AC$，所以 O,M,E,I 四点共圆.

二、【证明】用数学归纳法证明：

当 $n=1$ 时，待证不等式为
$$1+\frac{1}{a_0}(1+\frac{1}{a_1-a_0})\leqslant(1+\frac{1}{a_0})(1+\frac{1}{a_1})$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{a_0}\cdot\frac{1}{a_1-a_0}\leqslant\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_0a_1}$$
$$\Leftrightarrow a_1\leqslant a_0(a_1-a_0)+(a_1-a_0)$$
$$\Leftrightarrow a_0a_1-a_0^2-a_0\geqslant0\Leftrightarrow a_0(a_1-a_0-1)\geqslant0,$$
最后一式显然成立，故 $n=1$ 时不等式成立.

假设当 $n=k$ 时，不等式成立，即有
$$1+\frac{1}{a_0}\left(\frac{1}{a_1-a_0}\right)\cdots\left(\frac{1}{a_k-a_0}\right)$$
$$\leqslant\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_k}\right).$$
当 $n=k+1$ 时，由归纳假设有
$$\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_k}\right)\left(1+\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$\geqslant\left(1+\frac{1}{a_{k+1}}\right)\left(1+\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_k-a_0}\right)\right).$$
要证明此时不等式成立，只需证明
$$\left(1+\frac{1}{a_{k+1}}\right)\left(1+\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_k-a_0}\right)\right)\geqslant1+\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_k-a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_{k+1}-a_0}\right)$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{a_{k+1}}+\frac{1}{a_{k+1}a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_k-a_0}\right)\geqslant\frac{1}{(a_{k+1}-a_0)a_0}\cdot\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_k-a_0}\right)$$
$$\Leftrightarrow a_{k+1}-a_0\geqslant\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_2-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_k-a_0}\right).\qquad(*)$$
注意到 a_k 题设条件，有 $a_{k+1}-a_0\geqslant k+1,a_i-a_0\geqslant i$. 从而
$$\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_2-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_k-a_0}\right)$$
$$\leqslant\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)$$
$$=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{k+1}{k}=k+1\leqslant a_{k+1}-a_0,$$
即 $(*)$ 成立，从而原不等式对 $n=k+1$ 成立.

综上，原不等式对一切正整数 n 成立.

三【解】不妨设方格表中的红格数目 $L\geqslant$ 白格的数目，则 $L\geqslant\frac{mn}{2}$.

设第 i 行中红格数目为 x_i，第 j 列的红格数目为 y_j，若方格 (i,j) 为红色，则由条件知
$$x_i+y_j-1<(n-x_i)+(m-y_j)\Rightarrow x_i+y_j<\frac{m+n+1}{2}.$$
若 $m+n$ 为偶数，则 $x_i+y_j\leqslant\frac{m+n}{2}$，若 $m+n$ 为奇数，则也有 $x_i+y_j\leqslant\frac{m+n}{2}$，故总有
$$x_i+y_j\leqslant\frac{m+n}{2}.\qquad①$$
将①中不等式对所有的 L 个红格 (i,j) 求和，则每个 x_i 出现 x_i 次，每个 y_j 出现 y_j 次，$\frac{m+n}{2}$ 出现 L 次，得到
$$\sum_{i=1}^{m}x_i^2+\sum_{j=1}^{n}y_j^2\leqslant\frac{m+n}{2}\cdot L.\qquad②$$
另一方面，由柯西不等式知，
$$\text{上式左边}\geqslant\frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m}x_i\right)^2+\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}y_j\right)^2=\frac{L^2}{m}+\frac{L^2}{n}.$$
综合②知，$\frac{L}{m}+\frac{L}{n}\leqslant\frac{m+n}{2}$，故 $L\leqslant\frac{mn}{2}$，因此由 $L\geqslant\frac{mn}{2}$ 知，必有 $L=\frac{mn}{2}$.

从而 mn 为偶数. 上述不等式均化为等式，特别的由①式 $x_i+y_j=\frac{m+n}{2}$ 知 $m+n$ 为偶数，即 m,n 的奇偶性相同. 因为 mn 为偶数，故 m,n 都是偶数，所以 mn 为 4 的倍数.

四、【解】(1) 当 $a=2,b=4$ 时，

$P(1)=(1+2)(1+4)=3\times5$ 为“好数”；

$P(2)=(2+2)(2+4)=2^3\times3$ 为“好数”；

$P(3)=(3+2)(3+4)=5\times7$ 为“好数”.

故 $(a,b)=(2,4)$ 为一组符合要求的正整数.

(2) 若存在 $a<b$，使得对任意正整数 n，$P(n)$ 均为“好数”.

取 $n=k(b-a)-a$，其中 k 为使得 $n>0$ 的足够大的整数，则有
$$P(n)=k(b-a)(k(b-a)-a+b)=k(k+1)(b-a)^2.$$
定义函数正整数集上的函数
$$f(t)=\begin{cases}0 & t\text{ 为“好数”},\\1 & t\text{ 不为“好数”}.\end{cases}$$
若 $P(n)$ 为“好数”，则必有 $k(k+1)$ 为“好数”，从而 $f(k(k+1))=0$，从而 $f(k)=f(k+1)=1$ 或 $f(k)=f(k+1)=0$，也即有对 $t\geqslant k$，$f(t)$ 为常数函数.

取一个大于 k 的素数 p，知 $f(p)=1$，但 $f(p^2)=0$，矛盾！

从而反设不成立,所以,必有 $a=b$.

〖注〗(1)中的 (a,b) 不唯一,如 $(6,11)$,$(8,14)$,$(26,28)$ 等均满足题设.

联赛模拟题(12)第一试

一、填空题

1.〖答案〗$\left[\frac{\sqrt{3}+1}{4},+\infty\right)$.

〖解〗由题意知,对一切实数 x,都有 $ax^2-|x+1|+2a\geqslant 0$,即

$$a\geqslant f(x)=\frac{|x+1|}{x^2+2}.\text{ 故 } a\geqslant \max f(x).$$

令 $t=x+1$,则 $f(x)=\frac{|t|}{(t-1)^2+2}=\frac{|t|}{t^2-2t+3}$.

(1)当 $x\geqslant -1$,即 $t\geqslant 0$ 时,有

$$f(x)=\frac{t}{t^2-2t+3}\leqslant\frac{t}{2\sqrt{3}t-2t}=\frac{\sqrt{3}+1}{4}.$$

当且仅当 $t=\sqrt{3}$,即 $x=\sqrt{3}-1$ 时,等号成立.

(2)当 $x<-1$,即 $t<0$ 时,有

$$f(x)=\frac{-t}{t^2-2t+3}\leqslant\frac{-t}{-2\sqrt{3}t-2t}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

当且仅当 $t=-\sqrt{3}$,即 $x=-\sqrt{3}-1$ 时,等号成立.

综上,$\max\limits_{x\in\mathbf{N}}=\frac{\sqrt{3}+1}{4}$. 故 a 的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{3}+1}{4},+\infty\right)$.

2.〖答案〗$(0,\sqrt{6})$.

〖解〗线段 PF_1 的垂直平分线过点 F_2,等价于 $|F_2P|=|F_1F_2|$.

设椭圆的右准线 $x=\frac{9}{c}$ 交 x 轴于点 K,则在椭圆的右准线上存在一点 P,使得 $|F_2P|=|F_1F_2|$,等价于 $|F_2K|\leqslant|F_1F_2|$. 所以 $\frac{9}{c}-c\leqslant 2c\Rightarrow c^2\geqslant 3\Rightarrow b^2=9-c^2\leqslant 6$. 故 b 的取值范围是 $(0,\sqrt{6})$.

3.〖答案〗$\frac{3}{2}$.

〖解〗$y=f^{-1}(x)$ 的图象向左移一个单位,得 $f=f^{-1}(x+1)$ 的图象. $y=f(x)$ 的图象与 $y=f^{-1}(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称,$y=f^{-1}(x+1)$ 的图象与 $y=g(x)$ 的图象也关于直线 $y=x$ 对称,所以 $y=f(x)$ 的图象向下平移一个单位得 $y=g(x)$ 的图象,即 $g(x)=f(x)-1$.

所以,$g(11)=f(11)-1=\frac{25}{10}-1=\frac{3}{2}$.

4.〖答案〗1.

〖解〗由归纳法易知,$|a_n|=\sqrt{n+1}$. 故

$$|a_n-a_{n+1}|=|a_n|\cdot\left|1-\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n+1}}\right)\right|$$

$$=|a_n|\cdot\left|\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n+1}}\right|=1.$$

5.〖答案〗8.

〖解〗$f(2013)=19$,$f_2(2013)=f(19)=11$,$f_3(2013)=f(11)=5$,

$f_4(2013)=f(5)=8$,$f_5(2013)=f(8)=13$,$f_6(2013)=f(13)=8$,$\cdots$

所以 $f_{2012}(2013)=8$.

6.〖答案〗$\sqrt{6}-\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$ 且 $a\neq 2$.

〖解〗分 a,a 为邻边和对边两种情况讨论.

7.〖答案〗$2+4\sqrt{2}+\pi$.

〖解〗$\left(x-\frac{x_1}{2}-3\right)^2+\left(y-\frac{y_1}{2}\right)^2=\left(\frac{x_2}{2}-3\right)^2+\left(\frac{y_2}{2}\right)^2\leqslant 1$ 表示以 $P\left(\frac{x_1}{2}+3,\frac{y_1}{2}\right)$ 为圆心,半径为 1 的圆及其内部;而 P 点在 $A'=\{(x,y)\mid |x-3|+|y|\leqslant 1\}$ 内运动,由图像可知,面积为 $2+4\sqrt{2}+\pi$.

8.〖答案〗50.

〖解〗考虑相同数码的 30 位数,1 ~ 9 各要 30 个,0 要 29 个,故数码总数应不少于 299 个,从而立方体个数不少于 $\left[\frac{299}{6}\right]=50$.

另一方面,记 10 种立方体 $(i,i+1,i+2,i+3,i+4,i+5)$ $(i=0,1,2,\cdots,9)$(数字为两位数,只取个位数)为一套,取 5 套这样的立方体,由于每个数码在同一套中出现 6 次且不在同一立方体上,故任一 6 位数可由一套立方体拼出,从而任一 30 位数可由 5 套拼出.

综上,立方体的个数的最小值为 50.

二、解答题

9.〖解〗(1)由条件知,l_1、l_2 的方程分别为 $y=k(x+2)$,$y=-\frac{1}{k}(x-2)$.

由 $\begin{cases}3x^2-y^2=3,\\ y=k(x+2)\end{cases}$ 得 $(3-k^2)x^2-4k^2x-4k^2=0$.

由于 l_1 交双曲线的左、右两支分别于 A、C 两点,所以 $x_A\cdot x_C=\frac{-4k^2-3}{3-k^2}<0$,解得 $k^2<3$.

注意到对称性,可由直线 l_2 交双曲线的左、右两支分别于 D、B 两点得 $\left(-\frac{1}{k}\right)^2<3\Rightarrow k^2>\frac{1}{3}$.

因此，$\frac{1}{3}<k^2<3$，k 的取值范围是

$$\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right).$$

(2) $\because |AC|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_A-x_C|$

$$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{4k^2}{3-k^2}\right)^2-\frac{4(-4k^2-3)}{3-k^2}}$$

$$=\frac{6(1+k^2)}{3-k^2}.$$

$$\therefore |BD|=\frac{6\left(1+\left(-\frac{1}{k}\right)^2\right)}{3-\left(-\frac{1}{k}\right)^2}=\frac{6(1+k^2)}{3k^2-1}.$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|=\frac{18(k^2+1)^2}{(3-k^2)(3k^2-1)}.$$

由于 $S=\frac{18(k^2+1)^2}{(3-k^2)(3k^2-1)}=\frac{18}{\frac{3-k^2}{k^2+1}\times\frac{3k^2-1}{k^2+1}}$

$$\geqslant\frac{18}{\frac{1}{4}\times\left(\frac{3-k^2}{k^2+1}+\frac{3k^2-1}{k^2+1}\right)^2}.$$

当且仅当 $\frac{3-k^2}{k^2+1}=\frac{3k^2-1}{k^2+1}$，即 $k=\pm1$ 时，等号成立.

所以，四边形 $ABCD$ 面积的最小值为 18.

10.〖解〗$\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos 2z\leqslant|\cos y|+|\sin y|\leqslant\sqrt{2}$，$\sin z\cdot\cos 4x\leqslant1$，故原式 $\leqslant\sqrt{2}+1$，当 $x=z=\frac{\pi}{2}$，$y=-\frac{\pi}{4}$ 时达到最大值 $\sqrt{2}+1$.

11.〖解〗先证 $a_n<1$.

易知 $a_n>0$，$a_n-1=\frac{a_{n-1}^2-a_{n-1}}{a_{n-1}+1}=\frac{a_{n-1}(a_{n-1}-1)}{a_{n-1}+1}$.

$\therefore a_{n-1}-1$ 与 a_n-1 同号.

由 $a_0=\frac{1}{2}$ 可得，$a_n<1$，$\therefore 0<a_n<1$.

再证 $a_n>\frac{2^n}{2^n+1}$.

因为 $a_n-\frac{2a_{n-1}}{a_{n-1}+1}>0$，所以 $\frac{1}{a_n}<\frac{1}{2a_{n-1}}+\frac{1}{2}$. 从而有

$$0<\frac{1}{a_n}-1<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}}-1\right)$$

$$<\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{a_{n-2}}-1\right)<\cdots<\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{a_0}-1\right)=\frac{1}{2^n}.$$

所以 $\frac{1}{a_n}-1<\frac{1}{2^n}$，即有 $a_n>\frac{2^n}{2^n+1}$. 故结论成立.

联赛模拟题(12)加试

一、〖证明〗(1) 过点 T 作圆 O 和圆 K 的公切线 MN，由弦切角定理，有

$$\angle TEF=\angle FTN=\angle GTN=\angle GAT=\angle IAT.$$

所以，A、E、T、I 四点共圆.

(2) 联结 TI，TB. 由 A、E、T、I 四点共圆知

$$\angle AIT=\angle AET=\angle EFT，则\angle GIT=\angle GFI，$$

从而 $\triangle GIT\backsim\triangle GFI$，$\frac{GI}{GF}=\frac{GT}{GI}$，$GI^2=GF\cdot GT$.

又由 MN，BC 均于圆 K 相切，得

$$\angle BFG=\angle CFT=\angle NTF=\angle NTG=\angle TBG，$$

从而 $\triangle GBT\backsim\triangle GFB$，$\frac{GB}{GT}=\frac{GF}{GB}$，$GB^2=GF\cdot GT$.

所以，$GI^2=GB^2$，$GB=GI$.

二、〖解〗设 $\deg(f_k)=\alpha_k(\alpha_k\in\mathbf{N}^*,1\leqslant k\leqslant n)$. 由题中等式得

$$\alpha_k+\alpha_{k+1}=\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\Rightarrow\alpha_{k+1}\mid\alpha_k.$$

因此，$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=2$.

设 $f_k(x)=a_kx^2+b_kx+c_k(1\leqslant k\leqslant n,a_k\neq0)$. 代入题中等式，比较两边 x^4 的系数，得

$$a_ka_{k+1}=a_{k+1}a_{k+2}^2\Rightarrow a_k=a_{k+2}^2.$$

若 $n=2m$ 为偶数，则

$$a_1=a_3^2=a_5^{2^2}=\cdots=a_{2m-1}^{2^{m-1}}=a_1^{2^m}.$$

因此，$a_1=a_3=\cdots=a_{2m-1}=1$. 同理，$a_2=a_4=\cdots=a_{2m}=1$.

若 n 为奇数，也可由类似的讨论知 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$.

再比较两边 x^3 的系数，得 $b_k+b_{k+1}=2b_{k+2}$.

设 $\min\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}=b_s=b$. 则由 $b_{s-2}+b_{s-1}=2b$，知 $b_{s-2}=b_{s-1}=b_s=b$. 如此进行下去，可得 $b_1=b_2=\cdots=b_n=b$.

最后再比较两边 x^2 的系数，得 $c_k+c_{k+1}=2c_{k+2}+b$. 将这 n 个等式相加，得 $nb=0$，即 $b=0$. 则又由类似对 b_k 的讨论知 $c_1=c_2=\cdots=c_n=c$.

因此，$f_k(x)=x^2+c$. 代入原方程得

$$(x^2+c)^2=(x^2+c)^2+c\Rightarrow c=0.$$

从而 $f_1(x)=f_2(x)=\cdots=f_n(x)=x^2$.

三、〖证明〗只需考虑卡总数等于 n^2+3n+1 的情况. 我们采取如下策略：

如果有某个点 A_i 处的卡片数不少于 3，则对点 A_i 处的卡片进行操作(1). 这样的一次操作使得点 O 处卡片数增加 1，于是经过有限次操作(1)后，将不能再进行操作(1). 这时每个点 A_i 处的卡片数不超过 2，点 O 处的卡片数不少于 n^2+n+1. 然后对点 O 处的卡片进行 $n+1$ 次操作(2)，这样每个点 A_i 处的卡片数不少于 $n+1$.

下面我们在保持每个点 A_i 处的卡片数不少于 $n+1$ 的情况下，使点 O 处的卡片数增加到至少 $n+1$.

设想 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 顺次排列在以 O 为圆心的圆周上. 连续相邻的若干个点的集合 $G=\{A_i,A_{i+1}\cdots A_{i+l-1}\}$，$1\leqslant i\leqslant n$，$1\leqslant l\leqslant n$ 称为一个团，这里若有下标 $j>n$，则 $A_j=A_{j-n}$.

一个团 G 称为好团，如果对 G 中每个点处的卡片都做一次操作(1)后，G 中每点处的卡片数仍然不少于 $n+1$.

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 分别为点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 处的卡片数，$a_i\geqslant n+1$，$i=1,2,\cdots,n$. 好团需要满足如下充要条件：

一个点的团 $G=\{A_i\}$ 是好团当且仅当 $a_i\geqslant n+4$；

两个点的团 $G=\{A_i,A_{i+1}\}$ 是好团当且仅当 $a_i,a_{i+1}\geqslant n+3$；

l 个点的团 $(3\leqslant l\leqslant n-1)$ $G=\{A_i,A_i+1,\cdots,A_{i+l-1}\}$ 是好团当且仅当 $a_i,a_{i+l-1}\geqslant n+3$ 且 $a_j\geqslant n+2$，$i+1\leqslant j\leqslant i+l-2$；

全部 n 个点的团 $G=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 是好团当且仅当 $a_j\geqslant n+2$，$1\leqslant j\leqslant n$.

下面证明当点 O 处的卡片数少于 $n+1$ 时，或等价地，当 $a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n^2+2n+1$ 时，必存在好团.

假设不存在好团，于是每个 $a_i\in\{n+1,n+2,n+3\}$，否则会有某个点 A_i 处的卡片数 $a_i\geqslant n+4$，$G=\{A_i\}$ 是一个好团，设 $a_1,a_2\cdots,a_n$ 中有 x 个 $n+1$，y 个 $n+2$，z 个 $n+3$. 下面说明一定有 $x\geqslant z$. 由于 $n^2+2n+1>n(n+2)$，故 $z\geqslant 1$. 若 $z=1$，则有 $x\geqslant 1$，否则所有 $a_i\geqslant n+2$，$G\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 是一个好团. 若 $z\geqslant 2$，有 $n+3$ 张卡片的 z 个点将圆周分成 z 段圆弧，由于不存在好团，这 z 个点没有两点相邻，且每段圆弧上都存在一个点只有 $n+1$ 张卡片. 故 $x\geqslant z$. 这样点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 处的卡片总数为

$$x(n+1)+y(n+2)+z(n+3)$$
$$\leqslant(x+y+z)(n+2)=n(n+2)<n^2+2n+1.$$

矛盾. 这样我们证明了当点 O 处的卡片数少于 $n+1$ 时，点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中总存在好团. 于是每次对一个好团中的每个点作操作(1)，直至点 O 处的卡片数不少于 $n+1$，而点 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 处的卡片数也不少于 $n+1$. 结论证毕.

四、〖解〗对任意正整数 p，设 $t(p)$ 表示能将 p 用题中形式表示时正整数 n 的最小值，并称这种表示为 p 的“最小表示”.

(1) p 是偶数.

则任意能得到 p 的表示中 $b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 中应包含偶数个 0. 若 $b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 中 0 的个数不为 0，则至少有两个 $b_i=0$，同时将这两项去掉（当相应的 a_i 奇偶性相反时）或将这两项用一个 $b_i=1$ 的项进行替换（当相应的 a_i 奇偶性相同时），就可以减少和式中的项数. 因此，p 的最小表示中不能含有 $b_i=0$ 的项. 此时，将和式中各项同时除以 2，得 $t(2m)=t(m)$.

(2) p 是奇数.

在和式中至少有一项 $b_i=0$，将这项去掉后得 $p-1$ 或 $p+1$ 的一个表示，从而

$$t(2m-1)=1+\min(t(2m-2),t(2m))$$
$$=1+\min(t(m-1),t(m)).$$

令 $d_n=\dfrac{2^{2n+1}+1}{3}$，$c_n=\dfrac{2^{2n}-1}{3}$，则 $d_0=c_1=1$. 故 $t(d_0)=t(c_1)=1$，且

$$t(d_n)=1+\min(t(d_{n-1}),t(c_n)),$$
$$t(c_n)=1+\min(t(d_{n-1}),t(c_{n-1})).$$

从而由数学归纳法知 $t(c_n)=n$，$t(d_n)=n+1$.

这表明 d_n 不能表示成 n 项的和.

下面对 n 应用数学归纳法证明：小于 d_n 的数均可表示成不超过 n 项的和.

当 $n=1$ 时，结论显然成立.

假设小于 d_n 的数均可表示成不超过 n 项的和. 由归纳假设，只需证明在某个整数 $q\in(-d_{n-1},d_{n-1})$ 的基础上加上一个被加数即得到区间 $[d_{n-1},d_n)$ 内的任意整数 p.

若 $c_n+1\leqslant p\leqslant d_{n-1}$，考虑被加数 2^{2n-2} 得 $t(p)\leqslant 1+t(|p-2^{2n-1}|)$.

又 $d_n-1-2^{2n-1}=2^{2n-1}-(c_n+1)=d_{n-1}-1$，结合归纳假设知 $t(p)\leqslant n$.

若 $d_{n-1}\leqslant p\leqslant c_n$，考虑被加数 2^{2n-2} 得 $t(p)\leqslant 1+t(|p-2^{2n-2}|)$.

又 $c_n-2^{2n-2}=2^{2n-2}-d_{n-1}=c_{n-1}<d_{n-1}$，同理 $t(p)\leqslant n$.

综上，所求的最小正整数 $d_n=\dfrac{2^{2n+1}+1}{3}$.

联赛模拟题(13)第一试

一、填空题

1.〖答案〗〖答案〗$(-\frac{5}{3},-1]\cup[2,3)$.

〖解〗由题设可得

$$\begin{cases}\log_3(3x+5)<2,\\ x^2-x-2\geqslant 0\end{cases} \text{或} \begin{cases}\sqrt{x^2-x-2}<2,\\ 3x+5>0.\end{cases}$$

$\Rightarrow\begin{cases}-\frac{5}{3}<x<\frac{4}{3},\\ x\geqslant 2 \text{ 或 } x\leqslant -1\end{cases}$

或 $\begin{cases}-2<x\leqslant -1 \text{ 或 } 2\leqslant x<3,\\ x>-\frac{5}{3}.\end{cases}$

$\Rightarrow -\frac{5}{3}<x\leqslant -1$ 或 $2\leqslant x<3$.

故 x 的取值范围为 $\left(-\frac{5}{3},-1\right]\cup[2,3)$.

2.【**答案**】2:3.

【**提示**】两几何体体积比为1:2,故内切球半径之比为2:3.

3.【**答案**】$2\sqrt{3}$.

【**解**】易得 $\lambda\leqslant\frac{1-(a^2+b^2+c^2)}{\sqrt{abc}}$ 恒成立,结合题设,有 $\lambda\leqslant\frac{2(ab+bc+ca)}{\sqrt{abc}}$ 恒成立.

又
$$\frac{(ab+bc+ca)^2}{abc}\geqslant\frac{3(ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab)}{abc}=3(a+b+c)=3.$$

所以,$\left.\frac{2(ab+bc+ca)}{\sqrt{abc}}\right|_{\min}=2\sqrt{3}$.

从而 λ 的最大值为 $2\sqrt{3}$.

4.【**答案**】$\frac{15\sqrt{7}}{16}$.

【**解**】由角平分线定理,知 $\frac{AB}{BC}=\frac{AK}{CK}$,设 $AK=x$,则 $AB=\frac{BC\cdot AK}{CK}=2x$.

注意到 $\angle AKB+\angle BKC=180°$,则 $\cos\angle AKB+\cos\angle BKC=0$,即有

$$\frac{x^2+(\frac{3\sqrt{2}}{2})^2-(2x)^2}{2\cdot x\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}}+\frac{1^2+(\frac{3\sqrt{2}}{2})-2^2}{2\cdot 1\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}}=0$$

$\Rightarrow\frac{9}{2}-3x^2+\frac{3}{2}x=0\Rightarrow 2x^2-x-3=0$

$\Rightarrow x=\frac{3}{2}$ 或 $x=-1$(舍去).

从而,$\triangle ABC$ 中,$a=2,b=\frac{5}{2},c=3$,故

$$S_\triangle=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{\frac{15}{4}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{15}{16}\sqrt{7}.$$

5.【**答案**】28 068.

【**解**】用逆序求和法,先把0-1 999共2 000个数分成1 000组:(0,1 999),(1,1 998),…,(999,1 000),易知,这1 000组中,每组的两数各位数字之和均为28,故1-1 999的各数字之和为28×1 000=28 000.又2 000,2 001,…,2 010的各位数字之和为2+3+…+11+3=68,故所求和为28 000+68=28 068.

6.【**答案**】22.

【**解**】因为 $m\neq n$,n 为 m 的倍数,所以,$n\geqslant 2m$.又 m 为不小于100的正整数,则有 $n-m\geqslant m\geqslant 100$.易知 n 和 m 仅百位数字不同,则 $n-m=100k(1\leqslant k\leqslant 8)$.由 $2m\leqslant n\leqslant 999$,得 $m\leqslant 499$.从而 m 的可能取值必为以下各数之一:

100,120,125,140,150,160,175,200,250,300,350,400.

它们对应的 n 值分别有8,1,1,1,2,1,1,3,1,2,0,1种可能的取值,综上,三位整数对 (m,n) 共有22种不同的可能值.

7.【**答案**】$\sqrt{10}$.

【**解**】由题设求得 $k=-1$.

此时对应 PQ 方程为 $y=x-1$.

8.【**答案**】150.

【**解**】同时抛这两枚骰子,没有一个出现3点的或4点的概率为 $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$,所以抛掷一次为"好点"的概率为 $1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$.抛270次出现"好点"的次数的随抛机变量服从二项分布,因此 $E\xi=270\times\frac{5}{9}=150$.

二、解答题

9.【**解**】不妨设 $\alpha\in[0,2\pi)$.由已知 $\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha=\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha$,得到

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin2\alpha=2\cos2\alpha\cdot\cos\alpha+\cos2\alpha$,

即 $\sin2\alpha\cdot(2\cos\alpha+1)=\cos2\alpha(2\cos\alpha+1)$.所以 $\sin2\alpha=\cos2\alpha$ 或 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$.

若 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$,则 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3}$,代入原题,矛盾.

若 $\sin2\alpha=\cos2\alpha$,则

$$0=\sin2\alpha-\cos2\alpha=\sin2\alpha-\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

于是 $\alpha=\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8},\frac{9\pi}{8},\frac{13\pi}{8}$.

又 $\cos4\alpha=\cos^2 2\alpha-\sin^2\alpha=0$，所以 $\alpha=\frac{(2k-1)\pi}{8}$，$k=1,2,\cdots,8$.

经验证，$\alpha=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$满足题意.

10.〖解〗设 $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}$. 分别令 $x=\omega$ 和 ω^2，代入题中条件式，得

$$2\omega P(\omega^3)+Q(-\omega-\omega^2)=(1+\omega+\omega^2)R(\omega).$$

$$2\omega^2P(\omega^6)+Q(-\omega^2-\omega^4)=(1+\omega^2+\omega^4)R(\omega^2).$$

由 $1+\omega+\omega^2=1+\omega^2+\omega^4=0,\omega^3=1$，得

$$2\omega P(1)+Q(1)=0, \quad ①$$

$$2\omega^2P(1)+Q(1)=0. \quad ②$$

①+②，并化简得 $P(1)-Q(1)=0$. 也即 $x=1$ 为方程 $P(x)-Q(x)=0$ 的一个根，从而多项式 $P(x)-Q(x)$必有一个因式 $x-1$，命题得证.

11.（1）〖解〗设椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，由题意得$\begin{cases}a^2-b^2=6,\\ \frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=8,\\ b^2=2.\end{cases}$

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.

因为直线 l 平行于 OM，设直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+m$，与椭圆$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ 联立得

$$x^2+2mx+2m^2-4=0.$$

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则

$$x_1+x_2=-2m,x_1x_2=2m^2-4.$$

因为直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 A,B，所以 $\Delta=(2m)^2-4(2m^2-4)>0$，所以 $m\in(-2,2)$，且 $m\neq0$. 从而

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|m|\cdot|x_1-x_2|$$

$$=\frac{1}{2}|m|\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$=|m|\cdot\sqrt{4-m^2}=\sqrt{m^2(4-m^2)}\leqslant2,$$

当且仅当 $m^2=4-m^2$，即 $m=\pm\sqrt{2}$时等号成立.

所以$\triangle OAB$ 面积的最大值为 2.

（2）〖证明〗设直线 MA,MB 的斜率分别为 k_1,k_2. 又 $M(2,1)$，则 $k_1=\frac{y_1-1}{x_1-2},k_2=\frac{y_2-1}{x_2-2}$，只需证明 $k_1+k_2=0$ 即可. 而

$$k_1+k_2=\frac{y_1-1}{x_1-2}+\frac{y_2-1}{x_2-2}$$

$$=\frac{(y_1-1)(x_2-2)+(y_2-1)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}$$

$$=\frac{(\frac{1}{2}x_1+m-1)(x_2-2)+(\frac{1}{2}x_2+m-1)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}$$

$$=\frac{x_1x_2+(m-2)(x_1+x_2)-4(m-1)}{(x_1-2)(x_2-2)}$$

$$=\frac{2m^2-4-(m-2)(-2m)-4(m-1)}{(x_1-2)(x_2-2)}$$

$$=\frac{2m^2-4-2m^2+4m-4m+4}{(x_1-2)(x_2-2)}=0.$$

故直线 MA,MB 与 x 轴围成一个等腰三角形.

联赛模拟题(13)加试

一、〖证明〗记 $M=AD\cap BE,N=CF\cap AD,K=BE\cap CF$，并设 $AD=x,BE=y,CF=z$，六边形 $ABCDEF$ 的周长为 p，三组对边间的距离为 h. 因为 $h=BE\sin\angle BEF=BE\sin\angle BED$，所以 $\angle BEF=\angle BED$，类似地，我们可以得到

$$\angle CBE=\angle BEF=\angle BED=\angle ABE=\alpha,$$

$$\angle BCF=\angle DCF=\angle AFC=\angle CFE=\beta,$$

$$\angle CDA=\angle ADE=\angle BAD=\angle DAF=\gamma,$$

其中 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

因此，$\sin\angle MNK=\sin\alpha=\frac{h}{y}$，$\sin\angle NMK=\sin\beta=\frac{h}{z}$，$\sin\angle MKN=\sin\gamma=\frac{h}{x}$.

又 $S_{ABDE}+S_{BCEF}+S_{CDFA}$

$=\frac{1}{2}(AB+DE)h+\frac{1}{2}(AF+CD)h+\frac{1}{2}(BC+EF)h=\frac{1}{2}ph=\frac{1}{2}AD\cdot BE\cdot\sin\angle NMK+\frac{1}{2}BE\cdot CF\cdot\sin\angle MKN+\frac{1}{2}CF\cdot AD\cdot\sin\angle MNK$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{xyh}{z}+\frac{yzh}{x}+\frac{zxh}{y}\right)=\frac{1}{2}h\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right),$$

所以，$p=\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}=\frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{xyz}$

$$\geqslant\frac{xyz(x+y+z)}{xyz}=x+y+z.$$

二、〖证明〗由原方程得

$3p^n=4m^3+m^2+12m+3=(m^2+3)(4m+1)$.

从而 $3\mid m^2+3$，或 $3\mid4m+1$，下分类讨论.

（1）当 $3\mid m^2+3$ 时，注意到 $m^2+3>3$，则可设 $m^2+3=3p^x,4m+1=p^y,x,y\in\mathbf{N}^*$，且 $x+y=n$. ①

所以，$3p^x+p^y=m^2+3+4m+1=(m+2)^2$，即有 $p\mid(m+2)^2$，$p\mid m+2$，则 $m\equiv-2\pmod p$，$m^2+3\equiv7\pmod p$，从而 $p\mid7$，则 $p=7$. 代入①，得

$$m^2+3=3\cdot7^x,4m+1=7^y.$$

消去 m，得

$$7^{2y}-2\cdot7^y+49=48\cdot7^x.$$

注意到 $y\neq1$，则上式左边能被 7^2 整除，但不能被 7^3 整除，从而必有

$$x=2,m^2+3=147,m=12,y=2,n=4.$$

(2)当 $3\mid4m+1$ 时，注意到 $4m+1>3$，则可设

$$m^2+3=p^x,4m+1=3p^y,x,y\in\mathbf{N}^*,且\ x+y=n. \quad ②$$

同上处理，可得 $p=7$，从而 $m^2+3=7^x$，$4m+1=3\cdot7^y$. 消去 m，得

$$9\cdot7^{2y}-6\cdot7^y+49=16\cdot7^x.$$

注意到 $y\neq1$，则上式左边能被 7^2 整除，但不能被 7^3 整除，从而必有 $x=2$，$m^2=46$，无解.

综上，该方程仅有一组解 $(m,n,p)=(12,4,7)$.

三、〖解〗由 Abel 变换，得

$c_1a_1^k+c_2a_2^k+\cdots c_na_n^k$

$=(c_1+c_2+\cdots+c_n)a_n^k+(c_1+c_2+\cdots+c_{n-1})(a_{n-1}^k-a_n^k)+\cdots+(c_1+c_2)(a_2^k-a_3^k)+c_1(a_1^k-a_2^k)$

$\leqslant n^ka_n^k+(n-1)^k(a_{n-1}^k-a_n^k)+\cdots+2^k(a_2^k-a_3^k)+1^k(a_1^k-a_2^k)=(n^k-(n-1)^k)a_n^k+\cdots+(2^k-1^k)a_2^k+1^k\cdot a_1^k=\sum\limits_{i=1}^{n}(i^k-(i-1)^k)a_i^k.$

注意到 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$，则有

$(a_1+a_2)^k\geqslant a_1^k+(2^k-1^k)a_2^k$；

$(a_1+a_2+a_3)^k\geqslant(a_1+a_2)^k+(3^k-2^k)a_3^k$；

…

$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^k\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})^k+(n^k-(n-1)^k)a_n^k$.

上述各式相加，得

$$1=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^k\geqslant\sum_{i=1}^{n}(i^k-(i-1)^k)a_i^k.$$

从而

$$c_1a_1^k+c_2a_2^k+\cdots+c_na_n^k\leqslant\sum_{i=1}^{n}(i^k-(i-1)^k)a_i^k\leqslant1.$$

显然，当 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(c_1,c_2,\cdots,c_n)=(1,0,\cdots,0)$ 时，等号成立，故所求最大值为1.

四、〖解〗引理　*在 2×10 的长方形内选定 $n\leqslant9$ 个两两不相邻方格，则在未选定的方格中有多于 n 个方格与选定的方格相邻.*

引理的证明　将长方形分为10个长与大长方形的短边平行的 1×2 的长方形. 由于被选定的方格两两不相邻，所以在每个小长方形中最多有一个方格被选定. 并且如果其中有一个方格被选定，则另一个方格当然和它相邻. 这样就已有 n 个方格与选定的方格相邻. 又由于 $n\leqslant9$，故存在空的 1×2 长方形，我们找一个与选定的方格相邻的空的 1×2 长方形，其中必有一个方格与选定的方格相邻. 因此，有多于 n 个方格与选定的方格相邻.

原题解：从左下角开始将方格表间隔染成黄色，从左到右、从下到上在黄格中依次填入 $1,2,\cdots,50$；再从左到右、从下到上在白格中依次填入 $100,99,98,\cdots,51$，这样任意相邻两数之和 $\geqslant S=96$.

假设有一种填写方式使得 $S\geqslant97$，将大正方形分割为5个 2×10 水平的长方形，也分割为5个 2×10 垂直的长方形. 我们从空白的 10×10 的正方形开始从小到大填回数字 $1,2,\cdots,100$，则必有一个时刻，当我们填上数 n_0 之后，或者5个水平的 2×10 长方形都不空，或者5个垂直的 2×10 长方形都不空，我们称这样的第一个数 n_0 为临界数.

假设在填写完 $1,2,\cdots,33$ 这33个数时，仍然有空的水平 2×10 长方形和空的垂直 2×10 长方形. 除去这两个 2×10 长方形后剩下的64个方格可以被分为32个 1×2 的长方形，因此这33个数必有两个相邻，它们的和 $\leqslant32+33=65$，矛盾.

因此临界数 $n_0\leqslant33$，所以当 n_0 填好时，还没有任何两个数相邻.

当 n_0 填好时，任取一个水平的 2×10 长方形，如果其中有10个数，则其中每列都填写了数，因此在 n_0 填入之前，所有的垂直 2×10 长方形中都已经有了数，与 n_0 是临界数矛盾.

因此 n_0 填好时每个水平的 2×10 长方形中最多有9个数，这5个 2×10 的长方形都符合引理的条件.

此时已经填了 n_0 个数，因此这些填好的数至少有 n_0+5 个邻格，这些邻格中所填的最小数 $\leqslant101-(n_0+5)=96-n_0$，而与它相邻的之前填好的数 $\leqslant n_0$，两者之和 $\leqslant96$，与假设矛盾.

因此，S 的最大值为96.

联赛模拟题(14)第一试

一、填空题

1.〖**答案**〗$m\leqslant2$.

〖**解**〗在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上，

$$f'(x)=\frac{-2\cos x\cdot\cos x-(-\sin x)(m-2\sin x)}{\cos^2x}$$

$=\frac{m\sin x-2}{\cos^2 x}\leqslant 0$

恒成立，上式等价于 $m\sin x\leqslant 2$ 恒成立，即 $m\leqslant\frac{2}{\sin x}$.

又 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\frac{2}{\sin x}$的最小值为 2，可知 $m\leqslant 2$.

2.【答案】$\{a\mid 6\leqslant a\leqslant 9\}$.

【解】由交集定义可知，$(A\cap B)\subseteq A$，联系已知条件 $A\subseteq(A\cap B)$ 可得 $A=A\cap B$. 由此可推出 $A\subseteq B$.

要使 $A\subseteq B$ 成立，应满足条件

$$\begin{cases}2a+1\geqslant 3,\\3a-5\geqslant 22,\\3a-5\geqslant 2a+1\end{cases}\Rightarrow 6\leqslant a\leqslant 9.$$

3.【答案】$\frac{\sqrt{23}}{3}$.

【解】设 AB 的中点为 P. 则顶点 V 在底面的射影 O 在 CP 上，且是底面的中心. 所以，

$CP=\sqrt{3}$，$CO=\frac{2}{3}CP=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$VO=\sqrt{VC^2-OC^2}=\sqrt{\frac{23}{3}}$.

为使$\triangle ABD$ 的面积最小，即 PD 最小，于是，PD 为异面直线 AB、VC 的公垂线.

$$PD\cdot VC=2S_{\triangle VPC}=VO\cdot PC\Rightarrow PD=\frac{\sqrt{23}}{3}.$$

所以，$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot PD=\frac{\sqrt{23}}{3}$.

4.【答案】9.

【解】① $\Leftrightarrow \frac{1}{\log_{2009}\frac{x_0}{x_1}}+\frac{1}{\log_{2009}\frac{x_1}{x_2}}+\frac{1}{\log_{2009}\frac{x_2}{x_3}}>\frac{k}{\log_{2009}\left(\frac{x_0}{x_1}\cdot\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\right)}=\frac{k}{\log_{2009}\frac{x_0}{x_1}+\log_{2009}\frac{x_1}{x_2}+\log_{2009}\frac{x_2}{x_3}}$.

又由柯西不等式有

$$\left(\frac{1}{\log_{2009}\frac{x_0}{x_1}}+\frac{1}{\log_{2009}\frac{x_1}{x_2}}+\frac{1}{\log_{2009}\frac{x_2}{x_3}}\right)\left(\log_{2009}\frac{x_0}{x_1}+\log_{2009}\frac{x_1}{x_2}+\log_{2009}\frac{x_2}{x_3}\right)\geqslant 9,$$

且等号可以取到，故 $k_{\max}=9$.

5.【答案】$3n$.

【解】P 的所有棱仍是 Q 的棱. Q 中新的棱由切去的棱锥的底面形成. 每个棱锥新增加棱的条数，等于从顶点出发的棱的条数. 所以 Q 的棱有 $n+2n=3n$ 条.

6.【答案】$\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

【解】抛物线 $C:y^2=8x$ 的准线为 $l:x=-2$，直线 $y=k(x+2)(k>0)$恒过顶点 $P(-2,0)$.

过点 A、B 分别作 $AM\perp l$ 点 M，$BN\perp l$ 于点 N，由 $FA=2FB$，则 $AM=2BN$，点 B 为 AP 的中点. 连接 OB，则 $OB=\frac{1}{2}AF=BF$，点 B 的横坐标为 1，故点 B 的坐标为 $(1,2\sqrt{2})$. $\therefore k=\frac{2\sqrt{2}-0}{1-(-2)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

7.【答案】31.

【解】8 个数的和为 36. 将 $1,2,\cdots,8$ 这 8 个数平均分成两组，共有$\frac{C_8^4}{2}=35$ 种分法. 当两组数之和不等时，设和较小的 4 个球为红球的序号和较大的 4 个数为蓝球的序号对应着一个符合要求的排列. 所以，只需要除去两组数之和等于 18 的情形.

设 $a_i(i=1,2,3,4)$表示所选出的 4 个数，且 $a_i\in\{1,2,\cdots,8\}$，不妨设 $a_1<a_2<a_3<a_4$.

下讨论方程 $a_1+a_2+a_3+a_4=18$ 的解的组数.

易知必有 $a_1\leqslant 3$，否则 $a_1+a_2+a_3+a_4\geqslant 4+5+6+7=22>18$. 矛盾. 同理 $a_2\leqslant 4$，这样我们可以写出方程的 8 组解：

$(1,2,7,8)$，$(1,3,6,8)$，$(1,4,5,8)$，$(1,4,6,7)$，$(2,3,5,8)$，$(2,3,6,7)$，$(2,4,5,7)$，$(3,4,5,6)$.

因此，符合条件的排列有$\frac{C_8^4}{2}-\frac{8}{2}=31$ 个.

8.【答案】76 和 24.

【解】设这两个两位数分别为 x，y，则存在正整数 r 使得$\begin{cases}x-y=52,\\x^2-y^2=100r\end{cases}$且 $10\leqslant x\leqslant 99$，$10\leqslant y\leqslant 99$. 从而 $52(x+y)=(x-y)(x+y)=100r$，即 $13(x+y)=25r$，于是 $13\mid r$. 而由 $x+y=x-y+2y=52+2y$ 为偶数得 $2\mid r$，因此 $26\mid r$. 设 $r=26t$，t 为正整数，则 $x+y=50t$，从而

$$\begin{aligned}52+20&\leqslant x-y+2y=x+y=50t\\&=2x-(x-y)\leqslant 2\times 99-52,\end{aligned}$$

即 $36\leqslant 25t\leqslant 73$，解之得 $t=2$（因为 t 为整数），于是，$x-y=52$，$x+y=100$，因此 $x=76$，$y=24$. 故所求两个两位数分别是 76 和 24.

二、解答题

9.【解】(1)记方程 $2x^2+4x-30=0$ 的两根为 α、β. 则 $|f(\alpha)|\leqslant 0$. 从而，$f(\alpha)=0$. 同理，$f(\beta)=0$. 所以，$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$.

由韦达定理得 $a=-(\alpha+\beta)=2$，$b=\alpha\beta=-15$.

(2)由(1)知 $f(x)=x^2+2x-15$. 从而，

$$2a_{n+1}=a_n(a_n+2)，即\ a_{n+1}=\frac{a_n^2}{2}+a_n.$$

$b_n=\frac{1}{2+a_n}=\frac{a_n}{2a_{n+1}}=\frac{a_n^2}{2a_{n+1}a_n}=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$;

$T_n=b_1b_2\cdots b_n=\frac{a_1}{2a_2}\cdot\frac{a_2}{2a_3}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{2a_{n+1}}=\frac{1}{2^{n+1}a_{n+1}}$;

$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$=2-\frac{1}{a_{n+1}}$.

故 $2^{n+1}T_n+S_n=\frac{1}{a_{n+1}}+\left(2-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=2$(定值).

(3)因为 $a_1>0,a_{n+1}=\frac{a_n^2}{2}+a_n$,所以,$a_{n+1}>a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$,即$\{a_n\}$为单调递增的正数数列.

又 $b_n=\frac{1}{2+a_n}(n=1,2,\cdots)$,则$\{b_n\}$为单调递减的正数数列,且 $b_1=\frac{2}{5}$. 于是,$T_n\leqslant b_1^n=\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

因为 $S_n=2-\frac{1}{a_{n+1}}=2-2^{n+1}T_n$,所以,

$$2\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]\leqslant S_n<2.$$

10.〖证明〗记 $p=a^2b+b^2c+c^2a,q=ab^2+b^2c+ca^2,r=3abc$,则由基本不等式有 $p\geqslant r,q\geqslant r$,从而原不等式等价于

$$\frac{1}{r}+\frac{2}{p+q}\geqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\Leftrightarrow\frac{p+q+2r}{(p+q)r}\geqslant\frac{p+q}{pq}$$

$$\Leftrightarrow pq(p+q+2r)\geqslant(p+q)^2r$$

$$\Leftrightarrow pq(p+q)\geqslant(p^2+q^2)r$$

$$\Leftrightarrow p^2(q-r)+q^2(p-r)\geqslant0.$$

最后一式由 $q\geqslant r,p\geqslant r$,立得,故原不等式成立.

11.〖解〗设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$,$BD$ 与 x 轴交点为 E,内切圆与 AB 的切点为 T.

设 KA 方程:$y=k(x-1)$. 与抛物线方程联立得

$k^2x^2+2(k^2-2)x+k^2=0,\therefore x_1x_2=1,\therefore x_2>1$.

AD 的方程:$y=\frac{y_1}{x_1-1}(x-1)$与 $y^2=4x$ 联立得

$\frac{y_1^2}{(x_1-1)^2}(x-1)^2=4x,\because y_1^2=4x_1$

$\therefore x_1x^2-(x_1^2+1)x+x_1=0\Rightarrow(x_1x-1)(x-x_1)=0$

$\therefore x=x_1$ 或 $x=\frac{1}{x_1}\therefore x_3=\frac{1}{x_1}=x_2\therefore BD\perp x$ 轴.

由$\triangle KTI\backsim\triangle KEB$ 得 $\frac{r}{|y_2|}=\frac{x_2+1-r}{\sqrt{(x_2+1)^2+y_2^2}}$

$\therefore r=\frac{(x_2+1)|y_2|}{\sqrt{(x_2+1)^2+y_2^2}+|y_2|}$

$=\frac{x_2+1}{\sqrt{(\frac{x_2+1}{|y_2|})^2+1}+1}=\frac{x_2+1}{\sqrt{\frac{1}{2}(x_2+\frac{1}{x_2}+2)+1}}$

设 $t=x_2+1,t\in(2,+\infty)$.

$$r=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t^2})}+\frac{1}{t}}=f(t)$$

$f(t)$在$(2,+\infty)$上单调递增. $\therefore r\in(\frac{2}{\sqrt{2}+1},+\infty)$.

联赛模拟题(14)加试

一、〖证明〗易知

$$S_{\triangle ODC}=\frac{1}{2}R\sin A\cdot R\cos A=\frac{1}{4}R^2\sin 2A,\quad ①$$

$$S_{\triangle HEA}=\frac{AE\cdot EH}{2}=\frac{AE\cdot AE\cot C}{2}$$

$$=\frac{(AB\cos A)^2\cot C}{2}=R^2\cos^2A\sin 2C,\quad ②$$

$$S_{\triangle GFB}=\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}R^2\sin A\sin B\sin C.\quad ③$$

记 $\tan A=x,\tan B=y,\tan C=z$,则

$$x+y+z=xyz.\quad ④$$

由 $S_{\triangle ODC}=S_{\triangle GFB}$,将①、③代入,并化简得

$3\cos A=2\sin B\sin C\Rightarrow3\cos(B+C)+2\sin B\sin C=0$

$\Rightarrow3\cos B\cos C=\sin B\sin C\Rightarrow yz=3.$ ⑤

由 $S_{\triangle ODC}=S_{\triangle HEA}$,将①、②代入,并化简得

$\sin A=2\cos A\sin 2C\Rightarrow x=\frac{4z}{1+z^2}\Rightarrow4z=x(1+z^2).$ ⑥

由④、⑤得 $y+z=2x,\frac{3}{z}+z=2x$,代入⑥,得

$8z=\left(\frac{3}{z}+z\right)(1+z^2)\Rightarrow8z^2=(z^2+3)(z^2+1)$

$\Rightarrow z^4-4z^2+3=0\Rightarrow z^2=1$ 或 3

$\Rightarrow z=1$ 或 $\sqrt{3}\Rightarrow C=45°$或 $60°$.

二、〖证明〗易知 a,b,c 中至少有两数非负或非正,从而 ab,bc,ca 中至少有一数非负,不妨设 $ab\geqslant0$,注意到 $c\in[-1,1]$,则由柯西不等式,有

$$L=(\sum_{k=0}^{n-1}(ab)^{n-1-k}c^k)^2\leqslant(\sum_{k=0}^{n-1}(ab)^{n-1-k})^2$$

$$=(\sum_{k=0}^{n-1}(ab)^k)^2\leqslant(\sum_{k=0}^{n-1}a^{2k})(\sum_{k=0}^{n-1}b^2k)=R.$$

又由题设不等式,有

$$(ab-c)^2=a^2b^2+c^2-2abc$$

$$\leqslant a^2b^2+1-a^2-b^2=(1-a^2)(1-b^2).$$

所以,$((ab)^n-c^n)^2=(ab-c)^2L$

$$\leqslant(1-a^2)(1-b^2)R=(1-a^{2n})(1-b^{2n}).$$

从而，$1+2(abc)^n\geqslant a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}$.

三〖解〗首先证明一个引理：记 $n=2t+1$，从集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中挑选任意 $t+2$ 个数，则必有两数之和能被 n 整除.

引理的证明 将 $\{1,2,\cdots,n\}$ 分成 $t+1$ 组：$\{1,n-1\},\{2,n-2\},\cdots,\{t,t+1\},\{n\}$. 若从中挑选 $t+2$ 个不同的数，则必有两数来自于同一组，其和能被 n 整除. 引理证毕.

回到原题. 将题设改写为：对任意正整数 $k(1\leqslant k\leqslant n)$，$n\mid a_k^2-a_{k+1}+\epsilon_k(\epsilon_k=-1$ 或 $1)$.

记 $A=\{k\mid\epsilon_k=1\}$，$B=\{k\mid\epsilon_k=-1\}$，由引理，若集合 A 的元素个数大于等于 $t+2$，则存在 A 中不同的两数 i,j，使得 $n\mid a_i+a_j$，从而有

$$(a_i^2-a_{i+1}+\epsilon_i)-(a_j^2-a_{j+1}+\epsilon_j)$$
$$=(a_i+a_j)(a_i-a_j)+(a_{i+1}-a_{j+1})$$

能被 n 整除，即 $a_{i+1}\equiv a_{j+1}\pmod n$. 矛盾！

从而集合 A 的元素个数 $\leqslant k+1$，同理集合 B 的元素个数 $\leqslant k+1$. 所以要么集合 A 的元素个数等于 $k+1$，集合 B 的元素个数等于 k；要么集合 B 的元素个数等于 $k+1$，集合 A 的元素个数等于 k. 从而有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\epsilon_i=1$ 或 -1.

又由题设，$n\mid\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^2-a_{k+1}+\epsilon_k)$，而

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k^2-a_{k+1}+\epsilon_k)=\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{i=1}^{n}\epsilon_k$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}+\sum_{i=1}^{n}\epsilon_k$$
$$=\frac{n(n+1)(n-1)}{3}+\sum_{i=1}^{n}\epsilon_k,$$

所以，$n\mid 3\sum\limits_{i=1}^{n}\epsilon_k$，即 $n\mid 3$，所以 $n=3$.

易知当 $n=3$ 时，排列 $\{1,2,3\}$ 就满足要求.

四、〖证明〗(1)我们指出，如果往所给黑格集合 M 中增添黑格，则改染后只会出现更多的新黑格.

现在往 M 中增添黑格，使之成为 $m\times m$ 矩形，则只要经过 $2m-1$ 次改染，就不再剩下黑格，可见对原来的黑格集合 M 也只需改染有限次，就可使所有黑格都消失.

(2)将原来的黑格集合 M 记作 M_0，将经过 t 次改染后得到的黑格集合记作 M_t. 下面我们用归纳法证明：如果 $|M_0|=n$，则只需经过 n 次改染就可使所有黑格消失，即 $M_n=\varnothing$.

$n=1$ 时结论显然成立. 假设 $|M_0|<n$ 时结论已成立，我们来看 $|M_0|=n$ 的情形. 可以假设 M_0 位于第一象限中，即在平面直角坐标系 Oxy 中位于 $x\geqslant0,y\geqslant0$ 的部分中，并假设在带状区域 $0\leqslant x\leqslant1$ 和 $0\leqslant y\leqslant1$ 中至少各有 M_0 中的一个黑格.

此时，记 $M_0'=M_0\cap\{(x,y):x\geqslant0,y\geqslant1\}$，则 $|M_0'|\leqslant n-1$，由归纳假设，$M_{n-1}'=\varnothing$. 从而 M_{n-1} 只能位于带状区域 $0\leqslant y\leqslant1$ 中. 同理可证：M_{n-1} 只能位于带状区域 $0\leqslant x\leqslant1$，因而 M_{n-1} 只含有一个黑格，故 $M_n=\varnothing$.

联赛模拟题(15)第一试

一、填空题

1.〖答案〗$\begin{cases}1 & 当0<a\leqslant1时,\\ a & 当a>1时.\end{cases}$

〖解〗$f(x,y)$ 的最大值即通过区域 $|x|+|y|\leqslant1$ 的直线 $y=-ax+b$ 的截距的最大值，当 $0<a\leqslant1$ 时，$f_{\max}(x,y)=f(0,1)=a$.

2.〖答案〗0.

〖解〗原式 $=\tan70^\circ(\cos10^\circ+\sqrt3\sin10^\circ)-2\cos40^\circ-2=2\tan70^\circ\sin40^\circ-2\cos40^\circ-2$

$$=-2\cdot\frac{\cos70^\circ\cos40^\circ-\sin70^\circ\sin40^\circ}{\cos70^\circ}-2$$
$$=-2\cdot\frac{\cos110^\circ}{\cos70^\circ}-2=2-2=0.$$

3.〖答案〗无数条.

〖解〗取 B_1B 中点 B_2，D_1D 中点 D_2，则平面 EB_2FD_2 过 EF 且与平面 $ABCD$、平面 $A_1B_1C_1D_1$ 都平行. 设 P 为 EF 上任意一点，过 P 作直线 $MN/\!/ED_2$，交 EB_2 于点 M，交 FD_2 于点 N，则 $MN/\!/A_1D_1$. 连 D_1N 并延长交直线 CD 于点 Q，则 QP 与直线 A_1D_1 必相交，故直线 QP 与直线 A_1D_1、EF、CD 都相交.

因此，符合条件的直线有无数条.

4.〖答案〗n^2+2.

〖解〗记第 $n(n\geqslant2)$ 行的第二个数为 a_n，由题设条件，知

$$a_n-a_{n-1}=2(n-1)-1(n\geqslant3),$$
$$a_{n-1}-a_{n-2}=2(n-2)-1,$$
$$a_{n-2}-a_{n-3}=2(n-3)-1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_3-a_2=2\times2-1,$$

以上各式相加，得

$$a_n-a_2=2[2+3+\cdots+(n-1)]-(n-2)$$
$$=n(n-2),$$

又 $a_2=3$,故 $a_n=n(n-2)+3=(n-1)^2+2$,从而 $a_{n+1}=n^2+2$.

5.〖答案〗61.

〖解〗设 $x=[x]+\alpha,0\leqslant\alpha<1$.

当 $0\leqslant\alpha<\frac{1}{4}$ 时,$f(x)=10[x]$;

当 $\frac{1}{4}\leqslant\alpha<\frac{1}{3}$ 时,$f(x)=10[x]+1$;

当 $\frac{1}{3}\leqslant\alpha<\frac{1}{2}$ 时,$f(x)=10[x]+2$;

当 $\frac{1}{2}\leqslant\alpha<\frac{2}{3}$ 时,$f(x)=10[x]+4$;

当 $\frac{2}{3}\leqslant\alpha\frac{3}{4}$ 时,$f(x)=10[x]+5$;

当 $\frac{3}{4}\leqslant\alpha<1$ 时,$f(x)=10[x]+6$.

所以,在 $0\leqslant x\leqslant10$ 时,若 $[x]=0,1,2,\cdots,9$,由上知 $f(x)$ 可取 $6\times10=60$ 个不同的值. 若 $[x]=10$ 则 $f(x)$ 只取 1 个值,共有 61 个不同的值.

6.〖答案〗$f(x)=x+1$.

〖解〗取 $x=y=0$,得

$f(0)=f^2(0)\Rightarrow f(0)=1$ 或 $f(1)=0$(舍去).

取 $y=x$,得

$f(0)=f^2(x)-2xf(x)+x^2=(f(x)-x)^2$

$\Rightarrow f(x)=x\pm1$.

若存在 x_0,使得 $f(x_0)=x_0-1$,则取 $x=x_0,y=0$,得

$$f(x_0^2)=f^2(x_0)-2x_0$$
$$=(x_0-1)^2-2x_0=x_0^2-4x_0+1,$$

又取 $x_0=0,y=x_0$,得

$$f(x_0^2)=f^2(0)+x_0^2=1+x_0^2,$$

从而有 $x_0^2-4x_0+1=1+x_0^2\Rightarrow x_0=0$.

但是 $f(0)=-1$ 与 $f(0)=1$ 矛盾,故不存在使得 $f(x_0)=x_0-1$ 的 x_0,也即对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x)=x+1$.

7.〖答案〗$\frac{1}{2}$.

〖解〗设 $z=a+bi$,由题设得

$$a^2+b^2+\sqrt{(a^2-b^2-1)^2+4a^2b^2}=7.$$

两边移项,平方并化简得

$$3a^2+4b^2=12.$$

从而 z 表示椭圆,其离心率 $e=\frac{1}{2}$.

8.〖答案〗5.

〖解〗不妨设 $a=\max\{a,b,c\}$,由 $a+b+c=12$ 得 $a\geqslant4$. 又由 $(a-b)(a-c)\geqslant0$ 得 $a^2-ab-ac+bc\geqslant0$.

即有 $a^2-a(12-a)+bc\geqslant0$

$\Rightarrow bc\geqslant12a-2a^2$.

由 $45=ab+bc+ac=bc+a(12-a)\geqslant12a-2a^2+a(12-a)\Rightarrow(a-5)(a-3)\geqslant0\Rightarrow a\geqslant5$.

当 $a=b=5,c=2$ 时满足题设条件,所以 $\max\{a,b,c\}$ 的最小值为 5.

二、解答题

9.〖解〗由已知,得

$$\begin{cases}x+(-y)=z-1,\\x(-y)=z^2-7z+14.\end{cases}$$

所以,x 和 $-y$ 为关于 t 的方程 $t^2-(z-1)t+z^2-7z+14=0$ 的两实根. 从而有

$$\Delta=(z-1)^2-4(z^2-7z+14)\geqslant0$$
$$\Rightarrow\frac{11}{3}\leqslant z\leqslant5.$$

所以,
$$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$$
$$=(z-1)^2-2(z^2-7z+14)$$
$$=-(z-6)^2+9,$$

从而,$(x^2+y^2)_{\max}=f(5)=8$,$(x^2+y^2)_{\min}=f\left(\frac{11}{3}\right)=\frac{32}{9}$.

10.〖解〗易知,圆 M 的圆心在圆 $x^2+y^2=25$ 上,设 $|PE|=|PF|=d$,在 $\mathrm{Rt}\triangle PEO$ 中,易知 $4\leqslant|PO|\leqslant6$,$|OE|=2$,故 $2\sqrt{2}\leqslant d\leqslant4\sqrt{2}$.

又 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=|\overrightarrow{PE}|\cdot|\overrightarrow{DF}|\cos\angle EPF=d^2\cos\angle EPF$.

设 $\angle OPE=\theta$,则 $\tan\theta=\frac{|OE|}{|PE|}=\frac{2}{d}$,从而

$$\cos\angle EPF=\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$
$$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{d^2-4}{d^2+4},$$

故 $$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=d^2\cdot\frac{d^2-4}{d^2+4}=(d^2+4)+\frac{32}{d^2+4}-12.$$

令 $d^2+4=x$,则 $d^2+4=x\in[16,36]$,利用函数 $f(x)=x+\frac{32}{x}$ 在区间 $[16,36]$ 上单调递增知,当 $d^2+4=16$ 时,$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$ 取得最小值 6.

11.〖证明〗

$$\sum_{i\neq j}\frac{a_i}{a_j}=\sum_{i\neq j}\frac{a_i^2}{a_ia_j}\geqslant\frac{\left((n-1)\sum\limits_{i\neq j}a_i\right)^2}{\sum\limits_{i\neq j}a_ia_j}$$
$$=\frac{(n-1)^2t^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\right)}$$
$$=\frac{(n-1)^2t^2}{t^2-t}=\frac{(n-1)^2t}{t-1}.$$

联赛模拟题(15)加试

一、〖证明〗令 R,r 分别为三角形 ABC 的外接圆与内切圆半径,先证明$\frac{OP}{PD}=\frac{R}{r}$.

延长 AP 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 A'. 因为 AI 平分 $\angle BAC$,故 A'为弧 $BA'C$ 的中点,从而 $OA'\perp BC$.

又 BC 与内切圆切于 D,故 $ID\perp BC$,$ID/\!/OA'$. 故 $\triangle IPD\backsim\triangle A'PO$. 因此$\frac{OP}{PD}=\frac{OA'}{ID}=\frac{R}{r}$.

从而,$\frac{OP}{PD}=\frac{OQ}{QE}=\frac{OR}{RF}=\frac{R}{r}$.

故$\triangle PQR$ 是$\triangle DEF$ 在以 O 为位似中心,位似比为$\frac{OP}{OD}=\frac{R}{R+r}$下进行位似变换的结果,故位似中心 O,$\triangle DEF$ 的外心 I 与$\triangle PQR$ 的外心 M 三点共线.

二、〖证明〗记 p 为区间$[n^2,2n^2]$中完全平方数的个数,则这些平方数为:

$$n^2,(n+1)^2,\cdots,(n+p-1)^2.$$

从而有$(n+p-1)^2<2n^2<(n+p)^2$.

解得 $n(\sqrt{2}-1)<p<n(\sqrt{2}-1)+1$.

则$f(n)=p=[n(\sqrt{2}-1)+1]$. 显然f单调不减.

下证对任意正整数 q,存在正整数 n,使得$f(n)=q$. 而

$$f(n)=q\Leftrightarrow q=[n(\sqrt{2}-1)+1]$$
$$\Leftrightarrow n(\sqrt{2}-1)<q<n(\sqrt{2}-1)+1$$
$$\Leftrightarrow (q-1)(\sqrt{2}+1)<n<(\sqrt{2}+1)q.$$

而$(\sqrt{2}+1)q-(q-1)(\sqrt{2}+1)=\sqrt{2}+1>2$. 故这样的正整数 n 存在,命题得证.

三、〖解〗易知,函数 $y=|P(x)|$的最大值不可能在 x_i 处达到,因为$|P(x_i)|=0$. 对于 $i<n-1$,我们来考察任意一点 $a\in(x_i,x_{i+1})$. 令 $t=a-x_i$,$b=x_n-t$,则 $b\in(x_{n-1},x_n)$. 这是因为

$$x_n>b=x_n+x_i-a>x_n+x_i-x_{i+1}$$
$$=x_n-(x_{i+1}-x_i)>x_n-(x_n-x_{n-1})=x_{n-1}.$$

我们来证明$|P(b)|>|P(a)|$. 由此显然可得题中结论. 由题意可知,对于 $1\leqslant k<l\leqslant n-m$,有 $x_{k+m}-x_k<x_{l+m}-x_l$. 由于 n 次多项式 $P(x)$有 n 个不同实数根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,所以

$$P(x)=p(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$

其中,p 是 $P(x)$的首项系数. 注意到,若 $i+1\leqslant s\leqslant n-1$,则$|b-x_s|=x_n-x_s-t>x_{i+n-s}-x_i-t\,|x_{i+n-s}-a|$;

而若 $1\leqslant r\leqslant i-1$,则有

$|b-x_r|=b-x_r>x_{n-1}-x_r>a-x_r=|a-x_r|$.

将所有这些不等式相乘,再乘上等式

$$p|b-x_n||b-x_i|=pt(x_n-x_i-t)$$
$$=p|a-x_i||a-x_n|,$$

即得 $\quad|P(b)|=p|b-x_1||b-x_2|\cdots|b-x_n|$
$>p|a-x_1||a-x_2|\cdots|a-x_n|=|P(a)|$,

此即为所证.

四、〖解〗构做一个图 G,它的顶点是该国的各个城市,顶点之间有边相连,当且仅当相应的两个城市之间有航线相连. 于是根据题意,图 G 是一个连通图,而只要去掉其中任何一个奇圈上的所有的边,那么就成为不连通的图. 我们只需证明,可以将 G 中的所有顶点正确地染为 4 种不同颜色(即任何两个同色点之间都无边相连). 为此,我们需要如下的著名引理:

引理 如果图中没有长度为奇数的圈,则可将它的所有顶点正确地染为两种不同颜色.

证明 显然只需对连通图证明引理. 将连接两个顶点 X 与 Y 的道路的最短长度称为它们之间的距离.

取定一个顶点 A,把所有到 A 的距离为奇数的顶点都染为红色,把其余顶点都染为蓝色. 我们来证明,这种染色就是符合要求的. 假设不然,有某条边连接着两个同色顶点,不妨设为两个红色顶点 B 和 C. 考察由 A 连向 B 的最短道路 $A=B_0,B_1,\cdots,B_{2n-1}=B$ 和由 A 连向 C 的最短道路 $A=C_0,C_1,\cdots,C_{2m-1}=C$. 取出使得 $B_i=C_i$ 成立的最小脚 i,我们就得到了奇圈 $B_i,B_{i+1},\cdots,B_{2n-1}=B,C=C_{2m-1},\cdots,C_{i+1},C_i=B_i$,导致矛盾. 引理证毕.

回到原来的图 G. 如果图中有圈,就从圈上去掉一条边,由题意知,此时图还是连通的. 如果图中还有圈,就在继续做下去,一直到图中没有圈为止. 以 V 表示所有去掉的边的集合,以 W 表示所有剩下的边的集合. 我们注意,此时的图仍然是连通的. 这就表明,图 G 中不存在所有的边都属于集合 V 的奇圈,这是因为所有剩下的边都在 W 中,而图仍然连通着.

现在来观察图 G_V 和图 G_W,它们的顶点集合均与图 G 的顶点集合相同,而边集分别为 V 和 W. 由于在图 G_W 中没有圈,所以可用 0 号色和 1 号色为它的各个顶点正确染色. 而由上所说,图 G_V 没有奇圈,所以可用 0 号色和 2 号色为它的各个顶点正确染色. 我们再将每个顶点两次所染颜色的号码相加,根据所加得的和数将各个顶点分别染为 0,1,2,3 号色. 由于两个顶点之间有边相连,当且仅当,它们之间在图 G_V 和图 G_W 之一中有边相连,不难看出,它们的颜色不同. 所以所得的染色方式满足要求.

2013 年全国高中数学联赛冲刺模拟卷(1)第一试

（考试时间:80 分钟　满分:120 分）

学校____________姓名__________编号________得分________

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 已知三个实数 a,b,c 成等比数列,且 $\log_c a,\log_b c,\log_a b$ 构成公差为 d 的等差数列,则 $d=$____________.

2. 已知锐角$\triangle ABC$ 中,$\angle A=30°$,$BC=3$,H 为$\triangle ABC$ 的垂心,则 AH 等于__________.

3. 正整数 n 满足下述两个条件:(1)n 分别被 14,15,16 整除;(2)存在三个整数 $0<x<y<z<14$,使得 n 除以 x,y,z 的余数都是 3. 则 n 的最小值为____________.

4. 已知 F_1,F_2 分别是双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点,P 为双曲线右支上一点(除去右顶点),$\odot A$ 与$\triangle PF_1F_2$ 的边 PF_2 相切,与边 F_1F_2,F_1P 的延长线也都相切,当点 P 在双曲线右支上运动时,圆心 A 的轨迹方程是__________.

5. 已知实系数多项式 $P(x)$,使得$(x+1)P(x-1)-(x-1)P(x)$是常数,则 $P(x)=$____________.

6. 设函数$f(x)=\ln x$ 的定义域为$(M,+\infty)(M>0)$,对所有满足 $M<a\leqslant b\leqslant c$,且 $a^2+b^2=c^2$ 的实数 a,b,c,均有$f(a)+f(b)>f(c)$,则 M 的最小值为____________.

7. 设平行四边形 $ABCD$ 中,$AB=4$,$AD=2$,$BD=2\sqrt{3}$,则平行四边形 $ABCD$ 绕直线 AC 旋转所得的旋转体的体积为____________.

8. 设 $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,则使得$f(f(x))$为常值的映射$f:A\to A$ 的个数为________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 设$x_1,x_2(x_1<x_2)$是方程$a^2x^2+bx+1=0$的两个实根,$x_3,x_4(x_3<x_4)$是方程$ax^2+bx+1=0$的两个实根.若$x_3<x_1<x_2<x_4$,求实数a的取值范围.

10. 已知长为4的线段AB,两端点分别在双曲线$x^2-4y^2=1$的两条渐近线上.求证:若AB的中点M在双曲线上,则直线AB与双曲线相切.

11. 已知正实数a,b,c满足$a+b+c=1$,求证:

$$\frac{1-a^2}{a+bc}+\frac{1-b^2}{b+ca}+\frac{1-c^2}{c+ab}\geq 6.$$

2013 年全国高中数学联赛冲刺模拟卷(1)加试

（考试时间:150 分钟　满分:180 分）

学校＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿编号＿＿＿＿＿得分＿＿＿＿＿

一、(本题满分 40 分)

已知梯形 $ABCD$ 中,$AD/\!/BC$,且 $\angle ABC>90°$. M 为边 AB 上一点,$\triangle MAD$ 和 $\triangle MBC$ 的外心分别与 O_1 和 O_2,$\triangle MO_1D$ 和 $\triangle MO_2C$ 的外接圆的另一交点为 N. 证明:直线 O_1O_2 经过点 N.

二、(本题满分 40 分)

称整数 a 为友好数,若方程 $(m^2+n)(n^2+m)=a(m-n)^3$ 有正整数解 (m,n).

(1)求证:集合 $\{1,2,\cdots,2012\}$ 中有不少于 500 个友好数;

(2)判断 $a=2$ 是否为友好数.

三、(本题满分50分)

设$\{a_n\}$是有下列性质的实数列:

$$1=a_0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots \quad ①$$

又$\{b_n\}$是由下式定义的数列:

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}},n=1,2,3,\cdots \quad ②$$

证明:对任意$0\leqslant c<2$,总存在一个具有性质①的数列$\{a_n\}$,使得由②导出的数列$\{b_n\}$中有无穷多个下标n,满足$b_n>c$.

四、(本题满分50分)

$n(\geqslant4)$人的班级中一些学生是朋友.已知,任意$n-1$人可以围圆桌就坐,使得每人的两旁都是他的朋友,但n人不能.求n的最小值.

2013 年全国高中数学联赛冲刺模拟卷(1)第一试解答

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 已知三个实数 a,b,c 成等比数列,且 $\log_c a,\log_b c,\log_a b$ 构成公差为 d 的等差数列,则 d = ________.

【答案】0 或 $\frac{3}{2}$.

【解】【解】因为 a,b,c 成等比数列,所以 $b^2=ac$,所以 $\log_b a+\log_b c=2$,设 $\log_b a=x,\log_b c=y$,则

$$x+y=2. \quad ①$$

又因为 $\log_c a,\log_b c,\log_a b$ 构成等差数列,所以 $\log_c a+\log_a b=2\log_b c$,注意到 $\log_c a=\frac{x}{y},\log_a b=\frac{1}{x}$,所以

$$\frac{x}{y}+\frac{1}{x}=2y. \quad ②$$

由①得,$y=2-x$,代入②后整理,得 $2x^3-9x^2+9x-2=0$,分解因式,得

$$(x-1)(2x^2-7x+2)=0.$$

解得 $x_1=1,x_2=\frac{7+\sqrt{33}}{4},x_3=\frac{7-\sqrt{33}}{4}$.

当 $x_1=1$ 时,$a=b=c$,此时 $d=\log_b c-\log_c a=0$;

当 $x_2=\frac{7+\sqrt{33}}{4}$时,解得 $y=\frac{1-\sqrt{33}}{4}$,此时公差 $d=\log_b c-\log_c a=y-\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$;

当 $x_2=\frac{7-\sqrt{33}}{4}$时,解得 $y=\frac{1+\sqrt{33}}{4}$,此时公差 $d=\log_b c-\log_c a=y-\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$.

因此,所求公差 $d=0$ 或$\frac{3}{2}$.

2. 已知锐角$\triangle ABC$ 中,$\angle A=30°,BC=3,H$ 为$\triangle ABC$ 的垂心,则 AH 等于________.

【答案】$3\sqrt{3}$.

【解】设 AD、BE 分别为$\triangle ABC$ 的高,则由 D,H,E,C 四点共圆,得

$$AH\cdot AD=AE\cdot AC.$$

所以,

$$AH=\frac{AE\cdot AC}{AD}=\frac{AB\cdot\cos A\cdot AC}{AC\cdot\sin C}=\frac{AB\cdot\cos A}{\sin C}=\frac{BC\cdot\cos A}{\sin A}=3\sqrt{3}.$$

3. 正整数 n 满足下述两个条件:(1)n 分别被 14,15,16 整除;(2)存在三个整数 $0<x<y<z<14$,使得 n 除以 x,y,z 的余数都是 3. 则 n 的最小值为________________.

【答案】$2^4\cdot3\cdot5\cdot7\cdot131$.

【解】由条件(1),设 $n=2^4\cdot3\cdot5\cdot7\cdot k$,由条件(2),$x,y,z$ 分别整除 $n-3=3(2^4\cdot5\cdot7\cdot k-1)$,故与2,5,7互素,又 $x\geqslant4$,满足条件的 x,y,z 只有9,11,13. 故得同余式组

$$2^4\cdot5\cdot7\cdot k\equiv1(\bmod 3),(\bmod 11),(\bmod 13),$$

即

$$k\equiv-1(\bmod 3),-1(\bmod 11),1(\bmod 13).$$

设 $k=33m-1\equiv1(\bmod 13)$,则 $7m\equiv2$,$m\equiv4(\bmod 13)$,$m=13s+4$,$k=429s+131$. 故最小的 $k=131$,给出最小的 $n=2^4\cdot3\cdot5\cdot7\cdot131$.

4. 已知 F_1,F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点,P 为双曲线右支上一点(除去右顶点),$\odot A$ 与 $\triangle PF_1F_2$ 的边 PF_2 相切,与边 F_1F_2,F_1P 的延长线也都相切,当点 P 在双曲线右支上运动时,圆心 A 的轨迹方程是____________.

【答案】$\frac{x^2}{25}-\frac{9y^2}{25}=1(x>5)$.

【解】连接 PA 并延长交 x 轴于点 B,由角平分线性质、等比定理以及双曲线定义得

$$\frac{|PA|}{|AB|}=\frac{|PF_1|}{|F_1B|}=\frac{|PF_2|}{|F_2B|}=\frac{|PF_1|-|PF_2|}{|F_1B|-|F_2B|}=\frac{2a}{2c}=\frac{4}{5}.$$

设 $A(x,y)$,$P(x_0,y_0)(x_0>4)$,由定比分点公式得 $x_0=\frac{9x-4x_B}{5}$,$y_0=\frac{9}{5}y$,由焦半径公式得 $|PF_2|=\frac{5}{4}x_0-4$,又 $|F_2B|=x_B-5$,所以 $\frac{\frac{5}{4}x_0-4}{x_B-5}=\frac{4}{5}$,解得 $x_B=\frac{25}{16}x_0$,于是 $P\left(\frac{4}{5}x,\frac{9}{5}y\right)$,代入 $\frac{x_0^2}{16}-\frac{y_0^2}{9}=1$ 得圆心 A 的轨迹方程是 $\frac{x^2}{25}-\frac{9y^2}{25}=1(x>5)$.

5. 已知实系数多项式 $P(x)$,使得 $(x+1)P(x-1)-(x-1)P(x)$ 是常数,则 $P(x)=$____________.

【答案】$P(x)=a(x^2+x)+c$(其中 a,c 为常数).

【解】若 $P(x)$ 为常数函数,设 $P(x)=c$,则 $(x+1)P(x-1)-(x-1)P(x)=2c$ 为常数,满足题设要求.

设 $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n(a_n\neq0)$,代入 $(x+1)P(x-1)-(x-1)P(x)$,得

$$(x+1)[a_0+a_1(x-1)+\cdots+a_n(x-1)^n]-(x-1)(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)\qquad①$$

为常数.

①式中 x^n 项系数为 $(-na_n+a_n+a_{n-1})+(a_n-a_{n-1})=(2-n)a_n=0$,从而 $n=2$.

①式即 $(x+1)[a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2]-(x-1)(a_0+a_1x+a_2x^2)=(a_1-a_2)x+a_2$. 由①式为常数,知 $a_1=a_2$. 此时 $P(x)=a_0+a_1(x+x^2)$,其中 a_1 为非零常数. 检验知上式满足题设要求.

综上,所求实系数多项式 $P(x)=a(x^2+x)+c$(其中 a,c 为常数).

6. 设函数 $f(x)=\ln x$ 的定义域为 $(M,+\infty)(M>0)$,对所有满足 $M<a\leqslant b\leqslant c$,且 $a^2+b^2=c^2$ 的实数 a,b,c,均有 $f(a)+f(b)>f(c)$,则 M 的最小值为____________.

【答案】$\sqrt{2}$.

【解】当 $M<\sqrt{2}$ 时,取 $a=b=\sqrt{2}, c=2$,满足题设要求,但 $f(a)+f(b)=\ln 2=f(c)$,不合要求.

若 $\sqrt{2}<a\leqslant b\leqslant c$,且 $a^2+b^2=c^2$,则 $b^2\geqslant a^2>2$,从而

$$f(a)+f(b)>f(c)\Leftrightarrow \ln a+\ln b>\ln c\Leftrightarrow ab>c$$
$$\Leftrightarrow a^2b^2>c^2=a^2+b^2\Leftrightarrow (a^2-1)(b^2-1)>1,$$

由 $b^2\geqslant a^2>2$ 知 $b^2-1\geqslant a^2-1>1$,从而上式成立,从而 M 的最小值为 $\sqrt{2}$.

7. 设平行四边形 $ABCD$ 中,$AB=4, AD=2, BD=2\sqrt{3}$,则平行四边形 $ABCD$ 绕直线 AC 旋转所得的旋转体的体积为__________.

【答案】$\frac{25\sqrt{7}\pi}{14}$.

【解】由题设条件,易知 $AD\perp BD$, $\angle ABD=30°$, $AO^2=2^2+\sqrt{3}^2=7$, $AO=\sqrt{7}$, $AC=2\sqrt{7}$.

记 AC、BD 交点为 O, D 在 AC 上射影为 P,则 $DP=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$,过 O 作 AC 的垂线交 CD 于 Q,从而 $OQ=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 又所得旋转体体积 V 等于 $ADQO$ 绕 AC 旋转所得旋转体体积的两倍,分别记 ADN, CDN, COQ 绕 AC 旋转所得旋转体体积为 V_1, V_2, V_3,则

$$V=2(V_1+V_2-V_3)=\frac{2\pi}{3}(DP^2\cdot AP+DP^2\cdot CP-OQ^2\cdot CO)$$
$$=\frac{2\pi}{3}\left(\frac{(2\sqrt{3})^2}{7}\cdot 2\sqrt{7}-\frac{3\sqrt{7}}{4}\right)=\frac{25\sqrt{7}\pi}{14}.$$

8. 设 $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,则使得 $f(f(x))$ 为常值的映射 $f:A\to A$ 的个数为________.

【答案】7399.

【解】常值 a 有 7 种取法, $f(a)=f(f(f(x)))=a$,其它 x 依到达 a 的步数分为 A_1, A_2, A_1 不空而映 A_2 到 A_1 的方法数为 $|A_1|^{|A_2|}$,故依 $|A_1|$ 分类得 f 的个数为

$$7\sum_{k=1}^{6}C_6^k k^{6-k}=7(6\cdot 1+15\cdot 2^4+20\cdot 3^3+15\cdot 4^2+6\cdot 5+1)=7399.$$

二、解答题(本大题共 3 小题,第 9 题 16 分,第 10、11 题 20 分,共 56 分)

9. 设 $x_1, x_2(x_1<x_2)$ 是方程 $a^2x^2+bx+1=0$ 的两个实根, $x_3, x_4(x_3<x_4)$ 是方程 $ax^2+bx+1=0$ 的两个实根. 若 $x_3<x_1<x_2<x_4$,求实数 a 的取值范围.

【解】由韦达定理,得

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a^2}, x_1x_2=\frac{1}{a^2}, x_3+x_4=-\frac{b}{a}, x_3x_4=\frac{1}{a}.$$

前后两式分别相除,得 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-b=\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$. ①

注意到 $x_1x_2=\frac{1}{a^2}>0$,所以 x_1,x_2 同号.

若 $x_3<0<x_1<x_2<x_4$,则 $\frac{1}{x_3}<\frac{1}{x_4}<\frac{1}{x_2}<\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$,矛盾.

若 $x_3<x_1<x_2<0<x_4$,则 $\frac{1}{x_2}<\frac{1}{x_1}<\frac{1}{x_3}<\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$,矛盾.

所以,x_1,x_2,x_3,x_4 同号,且有 $x_3x_4=\frac{1}{a}>0$,即 $a>0$.

又由 $x_3<x_1<x_2<x_4$,得 $\frac{1}{x_4}<\frac{1}{x_2}<\frac{1}{x_1}<\frac{1}{x_3}$,从而

$$\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_4}>\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}>0.$$

结合①,得
$$\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)^2-\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)^2>\left(\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)^2-\left(\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_4}\right)^2$$
$$\Rightarrow\frac{1}{x_1x_2}>\frac{1}{x_3x_4}\Rightarrow a^2>a\Rightarrow a>1.$$

综上,实数 a 的取值范围为 $a>1$.

10. 已知长为4的线段 AB,两端点分别在双曲线 $x^2-4y^2=1$ 的两条渐近线上.求证:若 AB 的中点 M 在双曲线上,则直线 AB 与双曲线相切.

〖解〗设 $M(x_0,y_0)$,直线 AB 的切斜角为 α,则点 $A(x_0+2\cos\alpha,y_0+2\sin\alpha)$ 在 $x=2y$ 上,点 $B(x_0-2\cos\alpha,y_0-2\sin\alpha)$ 在 $x=-2y$ 上,代入解得 $x_0=4\sin\alpha,y_0=\cos\alpha$.

代入双曲线方程,得 $16\sin^2\alpha-4\cos^2\alpha=1$,解得 $\sin^2\alpha=\frac{1}{4},\cos^2\alpha=\frac{3}{4}$.

不妨设 M 在第一象限,此时 $M\left(2,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$AB$ 倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$,斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,AB 方程为

$$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2),\text{即 }2x-2\sqrt{3}y-1=0.$$

容易验证此时 AB 为双曲线的切线.

11. 已知正实数 a,b,c 满足 $a+b+c=1$,求证:

$$\frac{1-a^2}{a+bc}+\frac{1-b^2}{b+ca}+\frac{1-c^2}{c+ab}\geqslant 6. \qquad ①$$

〖证明〗由 $a+b+c=1$,得

$$a+bc=a(a+b+c)+bc=(a+b)(a+c),$$
$$1-a^2=(a+b+c)^2-a^2=(2a+b+c)(b+c).$$

设 $a+b=x,b+c=y,c+a=z$,则

$$\frac{1-a^2}{a+bc}=\frac{(2a+b+c)(b+c)}{(a+b)(a+c)}=\frac{y}{z}+\frac{y}{x}.$$

从而
$$\frac{1-a^2}{a+bc}+\frac{1-b^2}{b+ca}+\frac{1-c^2}{c+ab}=\frac{y}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\geqslant 6.$$

2013 年全国高中数学联赛冲刺模拟卷(1)加试解答

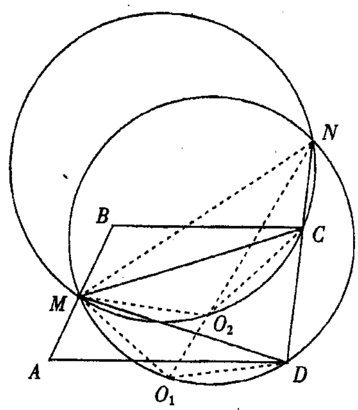
（考试时间:150 分钟　满分:180 分）

一、(本题满分 40 分)

已知梯形 $ABCD$ 中,$AD//BC$,且 $\angle ABC>90°$. M 为边 AB 上一点,$\triangle MAD$ 和 $\triangle MBC$ 的外心分别为 O_1 和 O_2,$\triangle MO_1D$ 和 $\triangle MO_2C$ 的外接圆的另一交点为 N. 证明:直线 O_1O_2 经过点 N.

〖证明〗如图,连 $MN,O_1N,O_2N,O_2M,O_2C,O_1M,O_1D$,因为 $\angle ABC>90°$,则圆心 O_2 在 $\triangle MBC$ 外,从而

$$\angle O_2NM=\angle O_2CM=\frac{1}{2}(180°-\angle MO_2C)$$
$$=90°-\frac{1}{2}\angle MO_2C=90°-(180°-\angle MBC)$$
$$=\angle ABC-90°,$$
$$\angle O_1NM=\angle O_1DM=\frac{1}{2}(180°-\angle MO_1D)$$
$$=90°-\frac{1}{2}\angle MO_1D=90°-\angle MAD=90°-\angle BAD.$$



第一题图

注意到 $AD//BC$,则 $\angle ABC=180°-\angle BAD$,故有

$$\angle O_2NM=\angle ABC-90°=180°-\angle BAD-90°$$
$$=90°-\angle BAD=\angle O_1NM,$$

即有 O_1,O_2,N 三点共线.

二、(本题满分 40 分)

称整数 a 为友好数,若方程 $(m^2+n)(n^2+m)=a(m-n)^3$ 有正整数解 (m,n).

(1)求证:集合 $\{1,2,\cdots,2012\}$ 中有不少于 500 个友好数;

(2)判断 $a=2$ 是否为友好数.

(1)〖证明〗令 $m=n+k$,则 $(m^2+n)(n^2+m)=(k^2+n(2k+n+1))(k+n(n+1))$,取 $n=k-1$ 得到

$$(m^2+n)(n^2+m)=k^3(4k-3)=(4k-3)(m-n)^3,$$

故所有 $a=4k-3(k\geqslant 2)$ 都是友好数. 因此 $1\sim 2012$ 中有不少于 $\frac{2012}{4}-1=502$ 个友好数.

(2)〖解〗设 $a=2$ 是友好数,则

$$8(m-n)^3=4(m^2+n)(n^2+m)=(m^2+n+n^2+m)^2-(m^2+n-n^2-m)^2.$$

由 $m^2+n-n^2-m=(m-n)(m+n-1)$ 得

$$(m^2+n+n^2+m)^2=(m-n)^2(8(m-n)+(m+n-1)^2).$$

由唯一分解定理,$8(m-n)+(m+n-1)^2$ 是完全平方数. 再由 $m>n$,存在正整数 k 使得

$$8(m-n)+(m+n-1)^2=(m+n-1+2k)^2,$$

从而
$$2(m-n)=k(m+n-1+k).$$
由 $m+n-1+k\geqslant m+n>m-n$,得 $k=1$,故 $m+n=2(m-n)$,$m=3n$. 代入原方程,左边大于 $m^3=27n^3$,而右边等于 $16n^3$,矛盾. 因此 $a=2$ 不是友好数.

三、(本题满分50分)

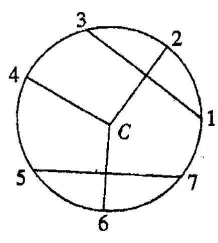
设 $\{a_n\}$ 是有下列性质的实数列:
$$1=a_0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots \quad ①$$
又 $\{b_n\}$ 是由下式定义的数列:
$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}},n=1,2,3,\cdots \quad ②$$
证明:对任意 $0\leqslant c<2$,总存在一个具有性质①的数列 $\{a_n\}$,使得由②导出的数列 $\{b_n\}$ 中有无穷多个下标 n,满足 $b_n>c$.

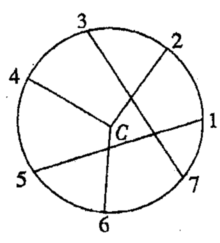
【**证明**】令 $a_k=d^{-2k}$,则 $\frac{1}{\sqrt{a_k}}=d^k$,当 $0<d<1$ 时,满足性质①. 此时
$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}}=\sum_{k=1}^{n}(1-d^2)d^k=(1-d^2)\sum_{k=1}^{n}d^k$$
$$=(1-d^2)\cdot\frac{d-d^{n+1}}{1-d}=d(1+d)(1-d^n).$$
先要求对无穷多个 n,$d(1+d)(1-d^n)>c$,则
$$d^n<1-\frac{c}{d(1+d)}. \quad ③$$
为此,只要选择 d,满足 $\sqrt{\frac{c}{2}}<d<1$.

事实上,这时有 $d(1+d)>c$,故③右端为一正数. 因为 $0<d<1$ 时,$d^n\to 0$,所以存在一个确定的自然数 $N=\left[\frac{\ln\frac{d(1+d)-c}{d(1+d)}}{\ln d}\right]$,使得当 $n>N$ 时,③成立. 命题得证.

四、(本题满分50分)

$n(\geqslant 4)$ 人的班级中一些学生是朋友. 已知,任意 $n-1$ 人可以围圆桌就坐,使得每人的两旁都是他的朋友,但 n 人不能. 求 n 的最小值.





第四题图1

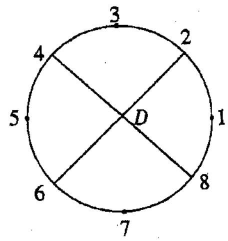
【**解**】由围坐条件(每人有二邻座)知,每人的朋友数不少于3(若 A 的朋友数不多于2,去掉 A 的一个朋友后余下的 $n-1$ 人无法围坐).

(1)若 $n\leqslant 6$,设 $n-1$ 人圈为 $A_1\sim A_{n-1}$. 另一人 B 与其中3人为朋友,必与两个相邻者同为朋友. 将 B 插入二人之间得到 n 人圈,矛盾.

(2)若 $n=7$ 或8. 同上,每人的朋友数都应等于3. 故 $n=7$ 不可能(度数和为奇数).

$n=8$ 时任取一人 C,不妨设另外7人的圈为$(1,2,\cdots,7)$,C 认识2,4,6. 则这4人无别的朋友. 而1,3,5,7各还有一个朋友,只能是$(1-3,5-7)$或$(1-5,3-7)$. 分别得到8人圈$(1,2,C,6,7,5,4,3)$,$(1,2,C,6,7,3,4,5)$. 矛盾(图1).

(3) $n=9$. 每人的度数等于3或4,由于度数总和为偶数,至少有一点度为4. 得图2.



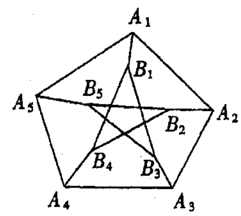
第四题图2

在$\{D,1,3,5,7,2,4,6\}$的圈中 D,1,3,5,7间必有连线,但 D 没有别的连线. 故1,3,5,7间必有连线,不妨设是1与$2i+1(i=1,2,3)$,则有9人圈$(1,2,\cdots,2i,D,8,7,\cdots,2i+1)$,矛盾.

因此 $n\geqslant10$. 如下的 Pertersen 图(图3)无 Hamilton 圈. 10个9人圈是(序号 mod 5)

$(A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}B_{i+3}B_{i+1}B_{i-1}B_{i-3}B_i)$,$(B_iB_{i+2}B_{i+4}B_{i+1}A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}A_{i+4}A_i)$,$i=1,2,3,4,5$.

故 n 的最小值是10.



第四题图3

2013年全国高中数学联赛冲刺模拟卷(2)第一试

(考试时间:80分钟 满分:120分)

学校____________姓名__________编号________得分________

一、填空题(本大题共8小题,每小题8分,共64分)

1. 设 $a,b\in\mathbf{R}$,若 $x>0$ 时恒有 $0\leqslant x^4-ax^3-x+b\leqslant(x^2-1)^2$,则 $a+b=$__________.

2. 已知3个正整数 x,y,z 的最小公倍数为2100,则 $x+y+z$ 的最小值为__________.

3. 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,侧棱 $AA_1\perp$ 底面 $ABCD$,$AB/\!/CD$,$AA_1=1$,$AB=3k$,$AD=4k$,$BC=5k$,$DC=6k(k>0)$. 将与四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 形状和大小完全相同的两个四棱柱拼接成一个新棱柱,在这些拼接成的新棱柱中,其中表面积最小的是一个四棱柱,则 k 的取值范围是__________.

4. 设多项式 $(x+1)^3(x+2)^3(x+3)^3$ 的展开式中 x^k 的系数为 a_k,则 $a_2+a_4+a_6+a_8$ 的值为__________.

5. F 为双曲线 $x^2-y^2=1$ 的右焦点,l 为双曲线的右准线,A、B 是双曲线右支上两个动点,且满足 $AF\perp BF$,线段 AB 的中点 M 在 l 上的投影为 N,则 $\frac{|MN|}{|AB|}$ 的最大值为__________.

6. 方程 $4\sin x(1+\cos x)=3\sqrt{3}$ 的解集为__________.

7. 非负实数 x,y,z 满足 $x^2+y^2+z^2+x+2y+3z=\frac{13}{4}$,则 $x+y+z$ 的最小值为__________.

8. 将 5×1 板分割为一些 $m\times1$ 块(各块的 m 可不同,但均为整数),每块染红色、蓝色或绿色. 则三色都出现的分割染色方案数为__________.

例如,(红 1×1,绿 2×1,蓝 2×1)是一个允许的方案,注意若将蓝 2×1 再分为两个蓝 1×1,得到的方案视为不同.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 数列$\{a_n\}(n\geqslant 1)$满足$a_1=1,a_2=2,a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n$,求$\{a_n\}$的前$n$项和$S_n$.

10. 已知$a,b,c\in[-1,2]$,求证:

$$abc+4\geqslant ab+bc+ca.$$

11. 已知P是以椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的长轴为直径的圆上任一点(异于椭圆顶点),$PA$、$PB$分别与椭圆相切于点$A$和$B$,求$\triangle OAB$面积的最大值(其中$O$为坐标原点).

2013 年全国高中数学联赛冲刺模拟卷(2)加试

（考试时间:150 分钟　满分:180 分）

学校____________________姓名_____________编号___________得分___________

一、(本题满分 40 分)

已知 $ABCD$ 是圆 ω 的内接四边形,P 是 AC 延长线上一点,并使得 PB,PD 是圆 ω 的切线. 过 C 点作圆 ω 的切线与直线 PD,AD 分别交于 Q,R. 若 E 是 AQ 与圆 ω 的另一个交点. 求证:B,E,R 三点共线.

二、(本题满分 40 分)

称整数集 A 为合格的:若对任意 $x,y\in A$(允许 $x=y$)和任意整数 k 均有

$$x^2+kxy+y^2\in A.$$

求所有非零整数对(m,n),使得包含 m 及 n 的合格集只有全体整数集 $\mathbf{Z}$.

三、(本题满分50分)

设二次函数$f(x)=x^2+ax+b$,若方程$f(f(x))=0$有4个不同的实根,且其中两个根的和等于-1,求b的最大可能值.

四、(本题满分50分)

给定正整数n,由一些区间$I=[i,j]$(i,j为整数,$0\leqslant i<j\leqslant n$)组成的区间族$F$称为友好族:若当$I_1=[i_1,j_1]$,$I_2=[i_2,j_2]\in F$满足$I_1\subseteq I_2$时,总有$i_1=i_2$或$j_1=j_2$.

(1)求友好族中区间个数的最大值;

(2)求最大友好族的个数.

2013 年全国高中数学联赛冲刺模拟卷(2)第一试解答

(考试时间:80 分钟 满分:120 分)

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 设 $a,b\in\mathbf{R}$,若 $x>0$ 时恒有 $0\leqslant x^4-ax^3-x+b\leqslant(x^2-1)^2$,则 $a+b=$________.

〖答案〗2.

〖解 1〗当 $x=1$ 时,有 $0\leqslant b-a\leqslant 0$,故 $b=a$.

令 $f(x)=x^4-ax^3-x+b$,则 $f'(x)=4x^3-3ax^2-1$,故 $f'(1)=4-3a-1=0$,所以 $a=1$,则

$$a+b=1+1=2.$$

〖解 2〗由 $x=1$,得 $0\leqslant b-a\leqslant 0$,从而 $b=a$,则对 $x>0$,恒有

$$0\leqslant x^4-ax^3-x+a\Leftrightarrow 0\leqslant(x^3-1)(x-a)\Leftrightarrow(x-a)(x-1)(x^2+x+1)\geqslant 0.$$

从而,对任意 $x>0$,均有 $(x-a)(x-1)\geqslant 0$,必有 $a=1$. 所以 $a+b=2$.

2. 已知 3 个正整数 x,y,z 的最小公倍数为 2100,则 $x+y+z$ 的最小值为________.

〖答案〗44.

〖解〗因为 $2100=2^2\cdot 5^2\cdot 3\cdot 7$,而欲使 $x+y+z$ 取最小值,则应使 x,y,z 两两互素且 x,y,z 尽量接近,简单验证知

$$(x+y+z)_{\min}=25+12+7=44.$$

3. 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,侧棱 $AA_1\perp$ 底面 $ABCD$,$AB/\!/CD$,$AA_1=1$,$AB=3k$,$AD=4k$,$BC=5k$,$DC=6k(k>0)$. 将与四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 形状和大小完全相同的两个四棱柱拼接成一个新棱柱,在这些拼接成的新棱柱中,其中表面积最小的是一个四棱柱,则 k 的取值范围是____________.

〖答案〗$\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$.

〖解〗注意到 $(6k-3k)^2+(4k)^2=(5k)^2$,所以 $AD\perp CD$.

将两个相同柱体的表面积相加扣除两倍重叠面面积即得新棱柱的表面积,因此只需比较重叠面的面积大小就能得到最小的情形,条件转化为 $18k^2,5k,4k,4k,6k,3k$ 中最大的是 $18k^2,5k,4k$ 中的一个,因此只需 $18k^2>6k$,即有 $k>\dfrac{1}{3}$.

4. 设多项式 $(x+1)^3(x+2)^3(x+3)^3$ 的展开式中 x^k 的系数为 a_k,则 $a_2+a_4+a_6+a_8$ 的值为____________.

〖答案〗6696.

〖解 1〗因为 $(x+1)^3(x+2)^3(x+3)^3$

$$=x^9+18x^8+141x^7+630x^6+1767x^5+3222x^4+3815x^3+2826x^2+1188x+216,$$

故
$$a_2+a_4+a_6+a_8=2826+3222+630+18=6996.$$

〖解 2〗记 $f(x)=(x+1)^3(x+2)^3(x+3)^3$,则

$$f(1)=24^3=13824=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_7+a_8,$$
$$f(-1)=0=a_8+a_6+a_4+a_2+a_0-a_1-a_3-a_5-a_7.$$

从而
$$a_8+a_6+a_4+a_2+a_0=\frac{f(1)+f(-1)}{2}=6912.$$

又因为 $a_0=f(0)=6^3=216$,所以 $a_2+a_4+a_6+a_8=6912-216=6696.$

5. F 为双曲线 $x^2-y^2=1$ 的右焦点,l 为双曲线的右准线,A、B 是双曲线右支上两个动点,且满足 $AF\perp BF$,线段 AB 的中点 M 在 l 上的投影为 N,则 $\frac{|MN|}{|AB|}$ 的最大值为________.

〖答案〗$\frac{1}{2}$.

〖解〗设 A、B 在准线 l 上的射影分别为 A_1,B_1,则由双曲线第二定义知 $|AA_1|=\frac{|AF|}{\sqrt{2}}$, $|BB_1|=\frac{|BF|}{\sqrt{2}}$,从而

$$\frac{|MN|}{|AB|}=\frac{|AA_1|+|BB_1|}{2|AB|}=\frac{|AF|+|BF|}{2\sqrt{2}|AB|}\geqslant\frac{\sqrt{2}\sqrt{|AF|^2+|BF|^2}}{2\sqrt{2}|AB|}=\frac{1}{2}.$$

6. 方程 $4\sin x(1+\cos x)=3\sqrt{3}$ 的解集为________.

〖答案〗$x=2k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

〖解〗原方程两边平方,得

$$27=16\sin^2x(1+\cos x)^2=16(1-\cos^2x)(1+2\cos x+\cos^2x)$$
$$\Rightarrow 16\cos^4x+32\cos^3x-32\cos x+11=0$$
$$\Rightarrow(2\cos x-1)^2(4\cos^2x+12\cos x+11)=0.$$

解得,$\cos x=\frac{1}{2}$,$x=2k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

7. 非负实数 x,y,z 满足 $x^2+y^2+z^2+x+2y+3z=\frac{13}{4}$,则 $x+y+z$ 的最小值为________.

〖答案〗$\frac{\sqrt{22}-3}{2}$.

〖解〗猜测最小值在边界 $x=y=0$,$z=\frac{\sqrt{22}-3}{2}$ 时取到,我们用局部调整法来求解.

固定 z,并记 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{27}{4}-\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=A$ 为常数,则

$$\left(x+\frac{1}{2}+y+1\right)^2=A+2\left(x+\frac{1}{2}\right)(y+1).$$

将 x,y 调整为 $0,x+y$,因为 $2\left(x+\frac{1}{2}\right)(y+1)\geq 2\left(0+\frac{1}{2}\right)(x+y+1)$,所以,调整后 $\left(x+\frac{1}{2}+y+1\right)^2$ 不增,即 $x+y$ 不增. 于是可令 $x=0$,则由题设知 $(y+1)^2+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{26}{4}$. 类似地,再将 y,z 调整为 $0,y+z$,仍可得 $y+z$ 不增.

故当 $x=y=0,z=\frac{\sqrt{22}-3}{2}$ 时,$x+y+z$ 取最小值 $\frac{\sqrt{22}-3}{2}$.

8. 将 5×1 板分割为一些 $m\times1$ 块(各块的 m 可不同,但均为整数),每块染红色、蓝色或绿色. 则三色都出现的分割染色方案数为______________.

例如,(红 1×1,绿 2×1,蓝 2×1)是一个允许的方案,注意若将蓝 2×1 再分为两个蓝 1×1,得到的方案视为不同.

〖答案〗330.

〖解〗一般的情形,$n\times1$ 板先沿内部格线割 k 刀($k\geq2$),有 C_{n-1}^k 种割法,得到的 $k+1$ 块染 3 色且每色都用到的染色方案数依容斥原理为 $3^{k+1}-3\cdot2^{k+1}+3$,故分割染色方案总数为:

$$\begin{aligned}S&=\sum_{k=2}^{n-1}C_{n-1}^k(3^{k+1}-3\cdot2^{k+1}+3)=3\sum_{k=2}^{n-1}C_{n-1}^k3^k-6\sum_{k=2}^{n-1}C_{n-1}^k2^k+3\sum_{k=2}^{n-1}C_{n-1}^k\\&=3(3+1)^{n-1}-6(2+1)^{n-1}+3(1+1)^{n-1}-(3-6+3+(n-1)(3^2-6\cdot2+3))\\&=3\cdot4^{n-1}-2\cdot3^n+3\cdot2^{n-1}.\end{aligned}$$

本题中 $n=5,S=3\cdot4^4-2\cdot3^5+3\cdot2^4=330.$

二、解答题(本大题共 3 小题,第 9 题 16 分,第 10、11 题 20 分,共 56 分)

9. 数列 $\{a_n\}(n\geq1)$ 满足 $a_1=1,a_2=2,a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n$,求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

〖解 1〗由 $a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n$ 得

$$a_{n+2}+a_{n+1}=3(a_{n+1}+a_n).$$

所以 $\{a_{n+1}+a_n\}$ 是首项为 $a_2+a_1=3$,公比为 3 的等比数列,从而 $a_{n+1}+a_n=3^n$. 即有

$$a_{n+1}-\frac{3^{n+1}}{4}=-\left(a_n-\frac{3^n}{4}\right).$$

从而 $\left\{a_n-\frac{3^n}{4}\right\}$ 是以 $a_1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ 为首项,-1 为公比的等比数列,即有

$$a_n-\frac{3^n}{4}=\frac{(-1)^{n-1}}{4}\Rightarrow a_n=\frac{3^n-(-1)^n}{4}.$$

所以,
$$S_n=\frac{3}{4}\cdot\frac{1-3^n}{1-3}-\frac{-1}{4}\cdot\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}=\frac{3^{n+1}-2-(-1)^n}{8}.$$

〖解 2〗数列 $\{a_n\}$ 的递推关系对应的特征方程为 $\lambda^2=2\lambda+3$,特征根为 $\lambda=3$ 或 -1. 故

$$a_n=A\cdot3^n+B\cdot(-1)^n.$$

结合 $a_1=1,a_2=2$,解得 $A=\frac{1}{4},B=-\frac{1}{4}$,从而

$$a_n=\frac{3^n-(-1)^n}{4}.$$

所以，
$$S_n=\frac{3}{4}\cdot\frac{1-3^n}{1-3}-\frac{-1}{4}\cdot\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}=\frac{3^{n+1}-2-(-1)^n}{8}.$$

10. 已知 $a,b,c\in[-1,2]$，求证：
$$abc+4\geqslant ab+bc+ca.$$

〖**证明**〗构造一次函数 $f(x)=(bc-b-c)x-bc+4, x\in[-1,2]$. 根据一次函数的单调性，只需证明 $f(2)\geqslant 0$ 和 $f(-1)\geqslant 0$ 即可.
$$f(-1)=-(bc-b-c)-bc+4=-\frac{1}{2}(2b-1)(2c-1)+\frac{9}{2}.$$
由题设，$(2b-1),(2c-1)\in[-3,3]$，所以 $(2b-1)(2c-1)\leqslant 9$，从而 $f(-1)\geqslant 0$.

又
$$f(2)=2(bc-b-c)-bc+4=(b-2)(c-2)\geqslant 0.$$
所以，原不等式成立.

11. 已知 P 是以椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的长轴为直径的圆上任一点（异于椭圆顶点），PA、PB 分别与椭圆相切于点 A 和 B，求 $\triangle OAB$ 面积的最大值（其中 O 为坐标原点）.

〖**解**〗设 $P(x_0,y_0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 AB 的斜率为 k，则切线 PA，PB 方程分别为
$$\frac{x_1x}{4}+\frac{y_1y}{3}=1 \text{ 和 } \frac{x_2x}{4}+\frac{y_2y}{3}=1.$$

注意到 $P(x_0,y_0)$ 为两直线交点，所以直线 AB 方程为：$\frac{x_0x}{4}+\frac{y_0y}{3}=1$，与椭圆方程联立，得
$$\left(3+\frac{9x_0^2}{4y_0^2}\right)x^2-\frac{18x_0}{y_0^2}x+\frac{36}{y_0^2}-12=0.$$

注意到 $x_0^2+y_0^2=4$，则
$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{\dfrac{18x_0}{y_0^2}}{3+\dfrac{9x_0^2}{4y_0^2}}=\dfrac{24x_0}{4y_0^2+3x_0^2}=\dfrac{24x_0}{y_0^2+12}, \\ x_1x_2=\dfrac{\dfrac{36}{y_0^2}-12}{3+\dfrac{9x_0^2}{4y_0^2}}=\dfrac{16(3-y_0^2)}{4y_0^2+3x_0^2}=\dfrac{16(3-y_0^2)}{y_0^2+12}. \end{cases}$$

又 O 到直线 AB 的距离为 $d=\dfrac{\dfrac{3}{|y_0|}}{\sqrt{1+k^2}}$，$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|$，所以
$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{3}{2|y_0|}\cdot|x_1-x_2|=3\sqrt{\frac{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}{4y_0^2}}$$

$$=3\sqrt{\frac{\left(\frac{24x_0}{y_0^2+12}\right)^2-\frac{64(3-y_0^2)}{y_0^2+12}}{4y_0^2}}=12\sqrt{\frac{(3x_0)^2-(3-y_0^2)(y_0^2+12)}{y_0^2(y_0^2+12)^2}}$$

$$=12\sqrt{\frac{9x_0^2+y_0^4+9y_0^2-36}{y_0^2(y_0^2+12)^2}}=\frac{12|y_0|}{(y_0^2+12)}=\frac{12}{|y_0|+\frac{12}{|y_0|}}.$$

易知此函数在$(0,2]$上单调递增,故当$|y_0|=2$时,$S_{\triangle OCD}$取最大值$\frac{3}{2}$.

2013 年全国高中数学联赛冲刺模拟卷(2)加试解答

（考试时间:150 分钟　满分:180 分）

一、(本题满分 40 分)

已知 $ABCD$ 是圆 ω 的内接四边形,P 是 AC 延长线上一点,并使得 PB,PD 是圆 ω 的切线.过 C 点作圆 ω 的切线与直线 PD,AD 分别交于 Q,R. 若 E 是 AQ 与圆 ω 的另一个交点. 求证:B,E,R 三点共线.

〖证明〗证明 B,E,R 三点共线,这与证明 AD,BE,CQ 三线共点等价.

设 CQ 交 AD 于 R,BE 交 AD 于 R',下面我们证明$\frac{RD}{RA}=\frac{R'D}{R'A}$,从而 $R=R'$.

由于$\triangle PAD\backsim\triangle PDC$,$\triangle PAB\backsim\triangle PBC$,从而

$$\frac{AD}{DC}=\frac{PA}{PD}=\frac{PA}{PB}=\frac{AB}{BC}.$$

所以,　$AB\cdot DC=AD\cdot BC$.

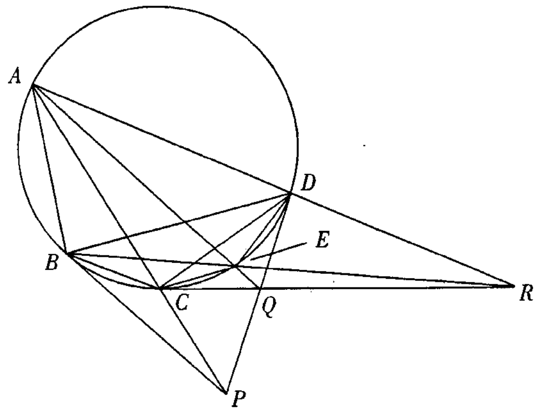
由 Ptolemy 定理,得

$$AB\cdot DC=AD\cdot BC=\frac{1}{2}CA\cdot DB.$$

类似的,有

$$CA\cdot ED=CE\cdot AD=\frac{1}{2}AE\cdot DC.$$

所以,　$$\frac{DB}{AB}=\frac{2DC}{CA},\ \frac{DC}{CA}=\frac{2ED}{AE}.\qquad ①$$



第一题图

又由$\triangle RDC\backsim\triangle RCA$,得$\frac{RD}{RC}=\frac{DC}{CA}=\frac{RC}{RA}$. 从而有

$$\frac{RD}{RA}=\frac{RD\cdot RA}{RA^2}=\left(\frac{RC}{RA}\right)^2=\left(\frac{DC}{CA}\right)^2=\left(\frac{2ED}{AE}\right)^2.\qquad ②$$

由$\triangle ABR'\backsim\triangle EDR'$,我们有$\frac{R'D}{R'B}=\frac{ED}{AB}$,由$\triangle DBR'\backsim\triangle EAR'$,我们有$\frac{R'A}{R'B}=\frac{EA}{DB}$,结合①,得

$$\frac{R'D}{R'A}=\frac{ED\cdot DB}{AB\cdot EA}=\left(\frac{2ED}{AE}\right)^2. \qquad ③$$

由②、③得,$R=R'$. 从而命题得证.

二、(本题满分40分)

称整数集A为合格的:若对任意$x,y\in A$(允许$x=y$)和任意整数k均有

$$x^2+kxy+y^2\in A.$$

求所有非零整数对(m,n),使得包含m及n的合格集只有全体整数集$\mathbf{Z}$.

〖**解**〗若m,n有大于1的公因数d,则集合

$$A=\{\cdots,-2d,-d,0,d,2d,\cdots\}$$

为合格. 这是因为对任意$x,y\in A$和任意k总有$d\mid x^2+kxy+y^2$. 但这个$A\neq\mathbf{Z}$,故m,n满足要求的必要条件是m与n互素.

设$\gcd(m,n)=1$,A是包含m及n的合格集. 对任意$x,y\in A$和任意k,由题设条件得

$$kx^2=x^2+(k-2)x\cdot x+x^2\in A,\quad (x+y)^2=x^2+2xy+y^2\in A.$$

由于$\gcd(m^2,n^2)=1$,存在整数a,b使$am^2+bn^2=1$,由$m,n\in A$得$am^2,bn^2\in A$,故

$$1=(am^2+bn^2)^2\in A,$$

于是对任意整数k,有$k=k\cdot 1^2\in A$,即$A=\mathbf{Z}$.

因此(m,n)满足题设要求当且仅当$\gcd(m,n)=1$.

三、(本题满分50分)

设二次函数$f(x)=x^2+ax+b$,若方程$f(f(x))=0$有4个不同的实根,且其中两个根的和等于-1,求b的最大可能值.

〖**解**〗设u、v为方程$f(f(x))=0$的两不同实根,且$u+v=-1$. 易知方程$f(x)=0$有两实根,记为x_1,x_2. 故u、v为方程$f(x)=x_1$或$f(x)=x_2$的实根. 我们分两种情况进行讨论:

(1)若u、v是以上同一方程的两实根,不妨设u、v是$f(x)=x_1$的两实根,即u、v为方程$x^2+ax+b=x_1$的实根,故$a=-(u+v)=1$. 且方程$f(x)=x_1$或$f(x)=x_2$都有两实根,故

$$\min\{f(x)\}=f\left(-\frac{1}{2}\right)=b-\frac{1}{4}<x_1. \qquad ①$$

且

$$\Delta_1=1-4b+4x_1>0,\Delta_2=1-4b+4x_2>0.$$

将以上两式相加,并由$x_1+x_2=-a=-1$得到$b<-\frac{1}{4}$. 故有$f\left(b-\frac{1}{4}\right)>0$. 即

$$\left(b-\frac{1}{4}\right)^2+\left(b-\frac{1}{4}\right)+b>0\Rightarrow b^2+\frac{3}{2}b-\frac{3}{16}>0.$$

结合$b<-\frac{1}{4}$,可得$b<-\frac{3+2\sqrt{3}}{4}$.

(2)若u、v是以上不同方程的两实根,不妨设$f(u)=x_1$,$f(v)=x_2$,即有

$$u^2+au+b=x_1,v^2+av+b=x_2.$$

将两式相加,并注意到$x_1+x_2=-a$,$u+v=-1$,有

$$b=-\frac{u^2+v^2}{2}<-\frac{(u+v)^2}{4}=-\frac{1}{4}$$

且
$$uv=\frac{(u+v)^2-(u^2+v^2)}{2}=b+\frac{1}{2}.$$

注意到 $x_1x_2=b$，则有 $(u^2+au+b)(v^2+av+b)=b$，即

$$u^2v^2+auv(u+v)+b(u^2+v^2)+a^2uv+ab(u+v)+b^2=b,$$

将 $uv=b+\frac{1}{2}$，$u+v=-1$ 代入并整理得

$$(4b+2)a^2-(8b+2)a+1=0.$$

该关于 a 的方程有解，故

$$\Delta=(8b+2)^2-4(4b+2)\geqslant 0,$$

结合 $b<-\frac{1}{4}$ 可得 $b\leqslant-\frac{1+\sqrt{5}}{8}$.

综上，b 的最大可能值为 $-\frac{1+\sqrt{5}}{8}$.

四、(本题满分 50 分)

给定正整数 n，由一些区间 $I=[i,j]$（i,j 为整数，$0\leqslant i<j\leqslant n$）组成的区间族 F 称为友好族：若当 $I_1=[i_1,j_1]$，$I_2=[i_2,j_2]\in F$ 满足 $I_1\subseteq I_2$ 时，总有 $i_1=i_2$ 或 $j_1=j_2$.

(1)求友好族中区间个数的最大值；

(2)求最大友好族的个数.

(1)〖**解**〗记区间 $I=[i,j]$ 的权数 $f(I)=i+j$，由 $0\leqslant i<j\leqslant n$ 得 $1\leqslant f(I)\leqslant 2n-1$.

若 $f(I_1)=f(I_2)$ 且 $i_1\leqslant i_2$，则 $j_1\geqslant j_2$，故或者 $I_1=I_2$ 或者 $i_1<i_2<j_2<j_1$，不合题给的覆盖条件. 因此友好族中各区间的权数互不同，而权数只有 $2n-1$ 种不同值，故 $|F|\leqslant 2n-1$.

显然所有长为 1 的区间（n 个）和长为 2 的区间（$n-1$ 个）共 $2n-1$ 个构成友好族，达到最大值 $2n-1$.

(2)〖**解**〗每个区间 $I=[i,j]$ 对应于坐标点 (j,i)，依 $f(I)$ 递增相连给出从 $(1,0)$ 到 $(n,n-1)$ 且不越过直线 $y=x-1$ 的一条棋盘路线，反之，每条这样的棋盘路线的各段端点给出一个最大友好族，故最大友好族的个数就等于 Catalan 数

$$T_{n-1}=\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}.$$

2013年全国高中数学联赛冲刺模拟卷(3)第一试

（考试时间:80分钟　满分:120分）

学校__________姓名__________编号__________得分__________

一、填空题(本大题共8小题,每小题8分,共64分)

1. 函数$f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\cdots+\frac{1}{x+2013}$图象的对称中心是__________.

2. 正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,M为棱C_1D_1的中点,则A_1D和平面A_1MC所成角的余弦值为__________.

3. 已知复数x,y,z满足$x+y+z=x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3=3$,则$(x,y,z)=$__________.

4. 正方形$ABCD$中,M为AB中点,E、F分别为边AD和BC上的点,则$\angle EMF$为钝角的概率为__________.

5. 设三个不同的正整数a,b,c成等差数列,且以a^5,b^5,c^5为三边长可以构成一个三角形,则a的最小可能值为__________.

6. 已知抛物线$y^2=2px(p>0)$的准线与x轴交于点A,过A作抛物线的一条割线交抛物线于B、C两点,过焦点F作平行于AC的直线,交抛物线于M、N两点,则$\frac{|FM|\cdot|FN|}{|AB|\cdot|AC|}=$__________.

7. 已知函数$f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$满足$f(-2)=-2$,且对任意整数$x,y$均有$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy+1$,则$f(x)=$__________.

8. 两队进行个人对抗赛,每队3个选手,任两个不同队的选手各赛2场.全部18场比赛安排在6天进行,每天3场同时比赛.有__________种不同的赛程安排.

二、解答题(本大题共 3 小题,第 9 题 16 分,第 10、11 题 20 分,共 56 分)

9. 在等腰$\triangle ABC$中,设$BC=a$,$AB=AC=b$,已知$a^6-6a^4b^2+9a^2b^4-b^6=0$.求等腰$\triangle ABC$的顶角$A$的度数.

10. A、B分别是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右顶点和上顶点,点$M$在线段$AB$上运动,直线$OM$交椭圆于$C$,$D$两点,其中$D$、$O$在$AB$同侧.$\triangle ABC$和$\triangle ABD$的面积分别记为$S_1$,$S_2$,求$\frac{S_1}{S_2}$的取值范围.

11. 已知数列$\{a_n\}$满足:$\frac{1}{12}<a_1<1$,且对任意正整数n,均有

$$a_{n+1}=\sqrt{(n+2)a_n+1}.$$

求证:(1)$a_n>n-\frac{2}{n}$;

(2)数列$b_n=2^n\left(\frac{a_n}{n}-1\right)(n=1,2,\cdots)$为单调数列.

2013 年全国高中数学联赛冲刺模拟卷(3)加试

（考试时间:150 分钟　满分:180 分）

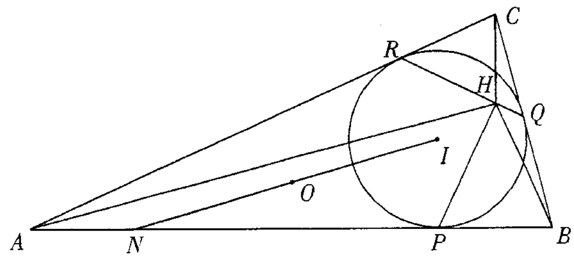
学校________________姓名__________编号_________得分_________

一、(本题满分 40 分)

如图,不等边锐角三角形 ABC 的内切圆与三边 AB、BC、CA 分别切于点 P、Q、R,垂心 H 在线段 QR 上.

(1)证明:$PH\perp QR$;

(2)设 O、I 分别为三角形 ABC 的外心和内心,直线 OI 交 AB 边于点 N,求证:$AP=BN$.



第一题图

二、(本题满分 40 分)

求所有整数 $m\geqslant 2$,使得区间 $\left[\dfrac{m}{3},\dfrac{m}{2}\right]$ 中的每个整数 n 都满足 $n\mid C_n^{m-2n}$.

三、(本题满分50分)

已知实数 x,y,z,p,q 和正整数 n,满足方程组

$$\begin{cases} y=x^{2n}+px+q, \\ z=y^{2n}+py+q, \\ x=z^{2n}+pz+q. \end{cases}$$

求证:$x^2y+y^2z+z^2x \geqslant x^2z+y^2x+z^2y$.

四、(本题满分50分)

一个 10×10 的表格包含了100个方格. 定义一个 2×2 方格组为一个"块". 已知由 n 个"块"组成的集合 C 可以覆盖整个表格(即表格中的每一个单元格都被 C 中的某一块覆盖),但是 C 中任意 $n-1$ 个"块"均不能覆盖表格. 试求 n 的最大值.

2013 年全国高中数学联赛冲刺模拟卷(3)第一试解答

（考试时间:80 分钟　满分:120 分）

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 函数$f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\cdots+\frac{1}{x+2013}$图象的对称中心是_______________.

〖答案〗$(-1007,0)$.

〖解〗设$g(x)=f(x-1007)=\frac{1}{x-1006}+\frac{1}{x-1005}+\cdots+\frac{1}{x+1005}+\frac{1}{x+1006}$,则

$$g(-x)=\frac{1}{-x-1006}+\frac{1}{-x-1005}+\cdots+\frac{1}{-x+1005}+\frac{1}{-x+1006}=-g(x).$$

所以,$g(x)$为奇函数,其图象关于原点$(0,0)$对称,从而$f(x)$的图象关于点$(-1007,0)$对称.

2. 正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,M为棱C_1D_1的中点,则A_1D和平面A_1MC所成角的余弦值为____________________.

〖答案〗$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

〖解〗设N为AB中点,则A_1MCN为棱形,注意到$\angle NA_1D=\angle MA_1D$,则$D$在平面$A_1MCN$上的射影在$AC$上,记为$H$. 从而$\angle DA_1H=\angle DA_1C$即为$A_1D$和平面$A_1MC$所成角.

由$A_1D=\sqrt{2}CD$,$A_1C=\sqrt{3}CD$,得$\cos\angle DA_1C=\frac{\sqrt{2}CD}{\sqrt{3}CD}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

3. 已知复数x,y,z满足$x+y+z=x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3=3$,则$(x,y,z)=$____________.

〖答案〗$(1,1,1)$.

〖解〗因为

$$xy+yz+zx=\frac{(x+y+z)^2-(x+y+z)^2}{2}=3,$$

$$xyz=\frac{(x+y+z)^3-3(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)+2(x^3+y^3+z^3)}{6}=1.$$

所以,x,y,z是关于t的方程$t^3-3t^2+3t-1=0$,即$(t-1)^3=0$的三个根,从而$x=y=z=1$.

4. 正方形$ABCD$中,M为AB中点,E、F分别为边AD和BC上的点,则$\angle EMF$为钝角的概率为________________________.

〖答案〗$\frac{1+2\ln 2}{4}$.

〖解〗设$AB=2$,$AE=x$,$AF=y(0<x,y<2)$,以E为坐标原点,EA为x轴正方向建立直角坐标

系，则$\overrightarrow{ME}=(1,x)$，$\overrightarrow{MF}=(-1,y)$，由$\angle EMF$为钝角得

$$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}=-1+xy<0\Rightarrow y<\frac{1}{x}.$$

从而$\angle EMF$为钝角的概率对应着直角坐标平面上由x轴、y轴、直线$y=2$，曲线$y=\frac{1}{x}$围成的部分和边长为 2 的正方形的面积比，即有

$$P=\frac{2\times\frac{1}{2}+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x}}{2\times 2}=\frac{1+\ln 2-\ln\frac{1}{2}}{4}=\frac{1+2\ln 2}{4}.$$

5. 设三个不同的正整数a,b,c成等差数列，且以a^5,b^5,c^5为三边长可以构成一个三角形，则a的最小可能值为____________.

〖答案〗10.

〖解〗设$a=b-k$，$c=b+k$，k为正整数. 由于以a^5,b^5,c^5为三边长可以构成一个三角形，所以

$$(b-k)^5+b^5>(b+k)^5\Leftrightarrow b^5>10b^4k+20b^2k^3+2k^5.$$

从而，$b^5>10b^4k$，$b>10k$，$a=b-k>9k$，即有$a\geqslant 9k+1\geqslant 10$.

取$a=10$，$b=11$，$c=12$，容易验证知符合题设要求，故所求a的最小值为 10.

6. 已知抛物线$y^2=2px(p>0)$的准线与x轴交于点A，过A作抛物线的一条割线交抛物线于B、C两点，过焦点F作平行于AC的直线，交抛物线于M、N两点，则$\frac{|FM|\cdot|FN|}{|AB|\cdot|AC|}=$____________.

〖答案〗1.

〖解〗易知，$A\left(-\frac{p}{2},0\right)$，$F\left(\frac{p}{2},0\right)$. 设割线$AC$的倾斜角为$\theta$，则$AC$的参数方程为$\begin{cases}x=-\frac{p}{2}+t\cos\theta,\\ y=t\sin\theta.\end{cases}$（$t$为参数），将其代入$y^2=2px$中，化简得$t^2\sin^2\theta-2pt\cos\theta+p^2=0$.

由参数t的几何意义可知　$|AB|\cdot|AC|=t_1\cdot t_2=\frac{p^2}{\sin^2\theta}$.

又MN的倾斜角也为θ，则MN的参数方程为$\begin{cases}x=\frac{p}{2}+t\cos\theta,\\ y=t\sin\theta.\end{cases}$（$t$为参数），将其代入$y^2=2px$中，化简得$t^2\sin^2\theta-2pt\cos\theta-p^2=0$. 由参数$t$的几何意义可知

$$|AB|\cdot|AC|=|t_1\cdot t_2|=\frac{p^2}{\sin^2\theta}=|AB|\cdot|AC|,$$

所以，$\frac{|FM|\cdot|FN|}{|AB|\cdot|AC|}=1$.

7. 已知函数$f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$满足$f(-2)=-2$，且对任意整数$x,y$均有$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy+1$，则$f(x)=$____________.

【答案】$f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}-1$.

【解】令 $x=y=0$,得 $f(0)=-1$;令 $x=y=-1$,由 $f(-2)=-2$,得 $f(-1)=-2$;令 $x=1,y=-1$,得 $f(1)=1$. 再令 $y=0$,得

$$f(x+1)=f(x)+x+2\Rightarrow f(x+1)-f(x)=x+2.$$

当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=\sum_{n=1}^{x}(f(n)-f(n-1))+f(0)=\frac{(x+1+2)x}{2}-1=\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}-1$.

当 $x<0$ 时,由题设,$-1=f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x)-x^2+1=f(x)+\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}-1-x^2+1$,从而 $f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}-1$.

综上,对任意整数 x,均有 $f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}-1$.

8. 两队进行个人对抗赛,每队 3 个选手,任两个不同队的选手各赛 2 场. 全部 18 场比赛安排在 6 天进行,每天 3 场同时比赛. 有________种不同的赛程安排.

【答案】900.

【解】设一队三人为 a,b,c,另一队三人为 x,y,z. a 的 6 天比赛安排对手 x,y,z 各 2 次,排法数是 $\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}=90$. 由于每天每人出场一次;$b$ 的每天对手应与 a 不同,b 的安排有两种类型(a,b 排定后 c 的对手随之确定):

(1)a 与某个同一对手比赛的 2 天,b 也与(另一)同一对手比赛,例如 a 对 x,x 时,b 对 y,y,则 a 对 z,z 时 b 只能对 x,x,从而 a 对 y,y 时 b 对 z,z. b 的同对手组是 a 的同对手组的轮换,故排法数是 $(3-1)!=2$.

(2)a 与每个同一对手比赛的 2 天,b 分别与另两个对手比赛,交换先后次序共有 $2\cdot 2\cdot 2=8$ 种排法.

由加法,乘法原理,排法总数是 $90(2+8)=900$.

二、解答题(本大题共 3 小题,第 9 题 16 分,第 10、11 题 20 分,共 56 分)

9. 在等腰△ABC 中,设 $BC=a,AB=AC=b$,已知 $a^6-6a^4b^2+9a^2b^4-b^6=0$. 求等腰△$ABC$ 的顶角 A 的度数.

【解】对已知条件 $a^6-6a^4b^2+9a^2b^4-b^6=0$,因式分解得

$$0=a^6-6a^4b^2+9a^2b^4-b^6=(a^3-3ab^2)^2-b^6=(a^3-3ab^2+b^6)(a^3-3ab^2-b^6),$$

所以,

$$a^3-3ab^2+b^3=0 \text{ 或 } a^3-3ab^2-b^3=0.$$

设等腰△ABC 的顶角 $A=2\theta(0<\theta<\frac{\pi}{2})$. 则有 $\sin\theta=\frac{a}{2b}$. 根据三倍角公式及题设条件

$$\begin{aligned}\sin 3\theta&=\sin(\theta+2\theta)=\sin\theta\cos 2\theta+\sin 2\theta\cos\theta\\&=\sin\theta(1-2\sin^2\theta)+2\sin\theta(1-\sin^2\theta)\\&=3\sin\theta-4\sin^3\theta=\frac{3a}{2b}-\frac{a^3}{2b^3}=\frac{3ab^2-a^3}{2b^3}.\end{aligned}$$

当 $a^3-3ab^2+b^3=0$ 时，$\sin 3\theta=\frac{1}{2}$，因为 $0<3\theta<\frac{3\pi}{2}$，所以 $A=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$. 因此，$A=\frac{\pi}{9}$ 或 $\frac{5\pi}{9}$.

当 $a^3-3ab^2-b^3=0$ 时，$\sin 3\theta=-\frac{1}{2}$，因为 $0<3\theta<\frac{3\pi}{2}$，所以 $3\theta=\frac{7\pi}{6}$. 因此，$A=\frac{7\pi}{9}$.

综上，顶角 $A=\frac{\pi}{9}$ 或 $\frac{5\pi}{9}$ 或 $\frac{7\pi}{9}$.

10. A、B 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点和上顶点，点 M 在线段 AB 上运动，直线 OM 交椭圆于 C,D 两点，其中 D、O 在 AB 同侧. $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 的面积分别记为 S_1,S_2，求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的取值范围.

〖解〗易知 $A(a,0)$，$B(0,b)$，设 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{MA}$，则 $M\left(\frac{\lambda a}{1+\lambda},\frac{b}{1+\lambda}\right)$，故直线 OM 方程为 $y=\frac{b}{\lambda a}x$，与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 联立，解得 $x^2=\frac{\lambda^2a^2}{1+\lambda^2}$，于是 $C\left(\frac{\lambda a}{\sqrt{1+\lambda^2}},\frac{b}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)$，$D\left(-\frac{\lambda a}{\sqrt{1+\lambda^2}},-\frac{b}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)$. 记 d_C、d_D 分别表示 C、D 到直线 AB:$bx+ay-ab=0$ 的距离，则

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{d_C}{d_D}=\frac{\left|\frac{\lambda ab}{\sqrt{1+\lambda^2}}+\frac{ab}{\sqrt{1+\lambda^2}}-ab\right|}{\left|-\frac{\lambda ab}{\sqrt{1+\lambda^2}}-\frac{ab}{\sqrt{1+\lambda^2}}-ab\right|}=\frac{\left|\frac{1+\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}-1\right|}{\left|\frac{1+\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}+1\right|}$$

$$=\frac{1+\lambda-\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}}=1-\frac{2\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}}=1-\frac{2}{\sqrt{\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda^2+1}}+1}$$

$$=1-\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2\lambda}{\lambda^2+1}}+1}\leqslant 1-\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2\lambda}{2\lambda}}+1}=1-\frac{2}{\sqrt{2}+1}=3-2\sqrt{2},$$

等号成立，当且仅当 $\lambda=1$.

另一方面，$\frac{S_1}{S_2}=1-\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2\lambda}{\lambda^2+1}}+1}>1-\frac{2}{1+1}=0$，所以，$\frac{S_1}{S_2}\in(0,3-2\sqrt{2}]$.

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$\frac{1}{12}<a_1<1$，且对任意正整数 n，均有

$$a_{n+1}=\sqrt{(n+2)a_n+1}.$$

求证：(1) $a_n>n-\frac{2}{n}$；　(2) 数列 $b_n=2^n\left(\frac{a_n}{n}-1\right)(n=1,2,\cdots)$ 为单调数列.

(1)〖**证明**〗注意到

$$a_1>\frac{1}{12}>\frac{19}{243},a_2>\sqrt{3\times\frac{19}{243}+1}>\frac{10}{9},a_3>\sqrt{4\times\frac{10}{9}+1}>\frac{7}{3},$$

均满足 $a_n > n - \frac{2}{n}(n=1,2,3)$.

假设当 $n \geq 3$ 时,有 $a_n > n - \frac{2}{n}$,则 $a_{n+1} > \sqrt{(n+2)\left(n-\frac{2}{n}\right)+1}$. 欲证 $a_{n+1} > (n+1) - \frac{2}{n+1}$,只需证明

$$\sqrt{(n+2)\left(n-\frac{2}{n}\right)+1} > (n+1) - \frac{2}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2},$$

当 $n \geq 3$ 时,上式显然成立,也即对 $n \geq 3$,结论也成立. 综上,对任意正整数 n,均有 $a_n > n - \frac{2}{n}$.

(2)〖证明〗因为 $a_1 < 1$,由数学归纳法易证 $a_n < n$. 从而 $b_n < 0$,下面我们证明 $b_n < b_{n+1}$. 即证

$$\frac{a_n - n}{2n} < \frac{a_{n+1} - (n+1)}{n+1}.$$

因为右式 $= \frac{a_{n+1}^2 - (n+1)^2}{(n+1)(a_{n+1}+n+1)} = \frac{(n+2)a_n + 1 - (n+1)^2}{(n+1)(a_{n+1}+n+1)} = \frac{(n+2)(a_n - n)}{(n+1)(a_{n+1}+n+1)}$,所以只需证明

$$\frac{1}{2n} > \frac{n+2}{(n+1)(a_{n+1}+n+1)} \Leftrightarrow (n+1)(a_{n+1}+n+1) > 2n(n+2)$$

$$\Leftrightarrow (n+1)a_{n+1} > (n+1)^2 - 2 \Leftrightarrow a_{n+1} > n+1-\frac{2}{n+1}.$$

最后一式即为(1)中结论,故数列 $b_n = 2^n\left(\frac{a_n}{n} - 1\right)(n=1,2,\cdots)$ 为单调数列.

2013 年全国高中数学联赛冲刺模拟卷(3)加试解答

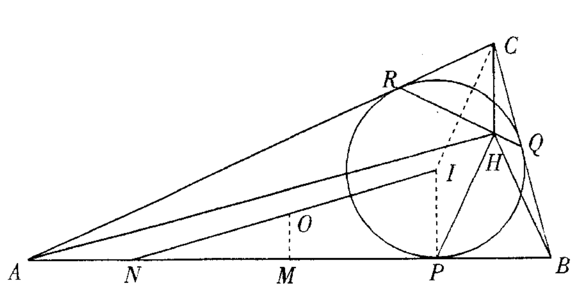
(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

一、(本题满分 40 分)

如图,不等边锐角三角形 ABC 的内切圆与三边 AB、BC、CA 分别切于点 P、Q、R,垂心 H 在线段 QR 上.

(1)证明:$PH \perp QR$;

(2)设 O、I 分别为三角形 ABC 的外心和内心,直线 OI 交 AB 边于点 N,求证:$AP = BN$.



第一题图

(1)〖证明〗因为 $\angle RAH = \angle QBH$, $\angle ARH = \angle BQH$,所以 $\triangle ARH \backsim \triangle BQH$,于是 $\frac{AH}{BH} = \frac{AR}{BQ} = \frac{AP}{BP}$,从而可知 HP 平分 $\angle AHB$. 则

$$\angle RHP = \angle RHA + \angle AHP = \angle QHB + \angle BHP = \angle QHP,$$

所以,$PH \perp QR$.

(2)〖证明〗因为 $PH \perp QR$, $CI \perp QR$,所以 $HP /\!/ CI$,又 $CH /\!/ IP$,所以 $CHPI$ 是平行四边形,从而 $CH = IP$.

取 AB 中点 M,则 $OM /\!/ IP$,又由熟知的结论,有 $OM = \frac{1}{2}IP$,所以,$MN = MP$,从而 $AP = BN$.

二、(本题满分 40 分)

求所有整数 $m\geqslant 2$,使得区间$\left[\frac{m}{3},\frac{m}{2}\right]$中的每个整数 n 都满足 $n\mid C_n^{m-2n}$.

〖解〗当 $m=2,3$ 时区间$\left[\frac{m}{3},\frac{m}{2}\right]$中只有一个整数 $n=1$,满足整除条件.

当 $m=p>3$ 为素数时,由 $n\geqslant 2,p-2n\geqslant 1$,知

$$C_n^{p-2n}=\frac{n}{p-2n}C_{n-1}^{p-2n-1},nC_{n-1}^{p-2n-1}=(p-2n)C_n^{p-2n}.$$

因为 $\gcd(n,p-2n)=\gcd(n,p)=1$,故 $n\mid C_n^{p-2n}$. 即所有素数 m 都满足整除条件.

若 m 为合数.

当 m 为偶数时,取 $n=\frac{m}{2}(>1)$,则 $C_n^{m-2n}=C_n^0=1$ 不被 n 整除.

而当 m 为奇数时,设 $m=kp$(p 为素数,k 为大于 1 的奇数). 此时$\frac{k-1}{2}$为正整数,$\frac{k}{3}\leqslant\frac{k-1}{2}<\frac{k}{2}$,故 $n=\frac{k-1}{2}p\in\left[\frac{m}{3},\frac{m}{2}\right]$. $C_n^{m-2n}=C_n^p=n\cdot\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p!}$,分子$(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$不被 p 整除,更不被 $p!$整除,故 C_n^{m-2n} 不被 n 整除,即所有合数 m 都不满足整除条件.

因此满足条件的所有 m 是全体素数.

三、(本题满分 50 分)

已知实数 x,y,z,p,q 和正整数 n,满足方程组

$$\begin{cases}y=x^{2n}+px+q,\\z=y^{2n}+py+q,\\x=z^{2n}+pz+q.\end{cases}$$

求证:$x^2y+y^2z+z^2x\geqslant x^2z+y^2x+z^2y$.

〖证明〗注意到

$$\begin{aligned}&x^2y+y^2z+z^2x\geqslant x^2z+y^2x+z^2y\\\Leftrightarrow&x^2y-x^2z+y^2z-z^2y+z^2x-x^2z\geqslant 0\\\Leftrightarrow&x^2(y-z)-x(y+z)(y-z)+yz(y-z)\geqslant 0\\\Leftrightarrow&(x^2-x(y+z)+yz)(y-z)\geqslant 0\\\Leftrightarrow&(x-y)(x-z)(y-z)\geqslant 0.\end{aligned}\qquad ①$$

若 x,y,z 中有两个相等,则不等式①成立. 下设 x,y,z 互不相等,不妨设 x 为三数中最小的数,我们只需证明 $z<y$ 即可.

记$f(t)=t^{2n}+pt+q$,令$f'(t)=2nt^{2n-1}+p=0$,得 $t_0=\sqrt[2n-1]{\frac{-p}{2n}}$. 当 $t>t_0$ 时,$f'(t)>0$,此时$f(t)$为增函数. 当 $t<t_0$ 时,$f'(t)<0$,此时$f(t)$为减函数.

若 $y_0\leqslant t$,则 $x<y\leqslant t_0$,从而 $y=f(x)>f(y)=z$,此时不等式①成立.

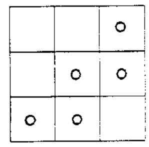
若 $z>y\geqslant t_0$,则 $x=f(z)>f(y)=z>t_0$,与 x 的最小性矛盾.

综上,原不等式得证.

四、(本题满分 50 分)

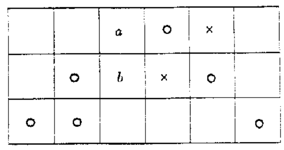
一个 10×10 的表格包含了 100 个方格. 定义一个 2×2 方格组为一个“块”. 已知由 n 个“块”组成的集合 C 可以覆盖整个表格(即表格中的每一个单元格都被 C 中的某一块覆盖), 但是 C 中任意 $n-1$ 个“块”均不能覆盖表格. 试求 n 的最大值.

〖**证明**〗由题设,知 n 块中任去掉一块都不能覆盖全表,从而知每一个块中均有不属于其它块的特征方格. 由于 4 个角方格只被角块覆盖,故 4 个角块必定取到.



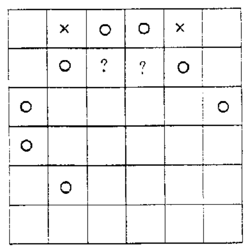
第四题图 1

(1)先考虑覆盖边界方格的块(它们在宽为 2 的边框中,称之为边块). 每行中只有 9 个边块,但任意 3 个接连边块不能同取到(否则中间一块被旁边两块覆盖,无特征方格),故每行的边块不多于 6 个,除去两角块,每行的内部边块不多于 4 个. 因此边块总数不多于 $4+4\cdot4=20$. 注意到,由于边块覆盖了所有边界方格,故它们也覆盖了整个宽为 2 的边框,于是每个内部块的特征方格都不在边框中.



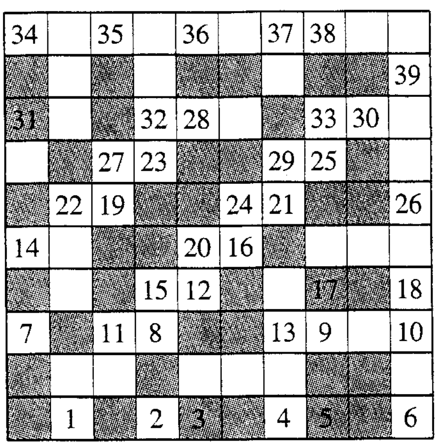
第四题图 2

(2)中央的 6×6 正方形被内部块覆盖,每个内部块取一个特征方格染红色,它们全在 6×6 正方形中. 任意两个红色方格不同块,故三个红色方格不可能接连(否则中间一格必与旁边一格同块). 将中央 6×6 正方形分成 4 个 3×3 正方形,其中心方格所在的块整个在此 3×3 正方形中,余下的 5 格中至多有 4 个红色(否则有三连红),故每个 3×3 正方形中至多有 5 个红格,且有 5 个红格时只能如图 1 的模式,称为满的 3×3 正方形(可旋转成 4 种方位). 此时由红格不同块,中心方格为特征方格,取之为红色. 则满的 3×3 正方形中的 5 个红格构成如图 1 的梯形,其中有两个红色角格.



第四题图 3

若有一个红色角格 a 在 6×6 正方形中央,而与 ab 相邻的 3×3 正方形也是满的,由 b 的占位,后者的一个红色角格必与 a 相邻,它的次对角线给出三连红(图 2),矛盾. 因此若四个 3×3 正方形都是满的,则它们的红色角格都不在 6×6 正方形中央,必如图 3. 此时次对角线又给出三连红,亦矛盾.



于是至少有一个 3×3 正方形不满,故红色方格个数(也就是内部块的个数)不多于 $5\cdot3+4=19$,从而紧覆盖的 $n\leqslant20+19=39$. 下表给出 39 块的紧覆盖,其中红色表示各块的右下方格,数字表示各块的特征方格.

因此最大的 $n=39$.

2013年全国高中数学联赛冲刺模拟卷(4)第一试

(考试时间:80分钟　满分:120分)

学校____________姓名__________编号_________得分________

一、填空题(本大题共8小题,每小题8分,共64分)

1. 将1,2,…,260按以下两种方式填入13×20的方格表中:

(1)第一行从左到右依次填入1,2,…,13;第二行从左到右依次填入14,15,…,26;…;最后一行从左到右依次填入248,249,…,260.

(2)最右列从上往下依次填入1,2,…,20;右边第二列从上往下依次填入21,22,…,40;…;最左列从上往下依次填入241,242,…,260.

在两种填法中被填在方格表的同一格中的数为__________.

2. 已知函数$f(x)=x^2-2x+3$,若当$1<x<2$时,不等式$|f(x)-a|<2$恒成立,则实数a的取值范围是__________.

3. 在正四面体$ABCD$中,M、N分别为AB、AD的三等分点,其中$AM=\frac{1}{3}AB$,$AN=\frac{2}{3}AD$,O为$\triangle BCD$的中心,则AO与MN所成角的正弦值为__________.

4. 在$\triangle ABC$中,$\sin A\cdot\sin B\cdot\sin\frac{C}{2}$的最大值为__________.

5. 任作椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的一条切线与椭圆两条对称轴分别交于点$A$、$B$,若线段$AB$长度的最小值为$3b$,则椭圆的离心率为__________.

6. 设EF是边长为$2\sqrt{6}$的正三角形ABC的外接圆的一条动弦,其长度为$2\sqrt{2}$,点P为$\triangle ABC$三边上的动点,则$\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{PF}$的最大值为__________.

7. 已知非空集合$X\subseteq M=\{1,2,\cdots,2013\}$,用$f(X)$表示集合$X$中最大数和最小数的和,则所有这样的$f(X)$的和为__________..

8. 满足等式$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{25}^2=2+x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{24}x_{25}$的非负整数解$(x_1,x_2,\cdots,x_{25})$有__________组.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 已知 a,b 为互不相等的正实数,求证:

$$\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}.$$

10. 已知椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F,上顶点为 M. 问:是否存在直线 l 交椭圆于 P,Q 两点,且使得 F 是 $\triangle MPQ$ 的内心? 若存在,求直线 l 的方程,若不存在,请说明理由.

11. 设 r 为正整数,定义数列 $\{a_n\}$ 如下:

$$a_1=1,a_{n+1}=\frac{na_n+2(n+1)^{2r}}{n+2},(n=1,2,\cdots).$$

证明:对任意正整数 n,a_n 均为整数.

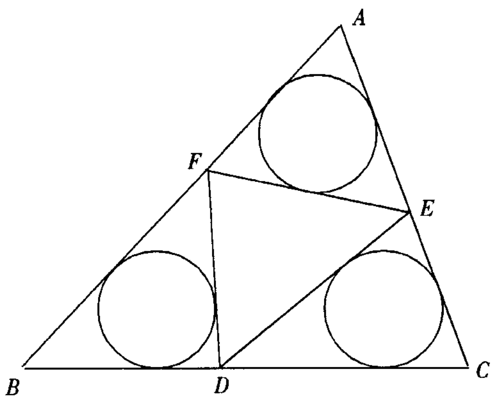
2013 年全国高中数学联赛冲刺模拟卷(4)加试

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

学校____________姓名__________编号________得分________

一、(本题满分 40 分)

设 D、E、F 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上的点,且 $\triangle AEF$、$\triangle BFD$、$\triangle CDE$ 的内切圆有相同的半径 r_1,又 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 的内切圆半径分别为 r_0 和 r,求证:$r=r_0+r_1$.



第一题图

二、(本题满分 40 分)

平面上任给 n 个不同的矩形. 求证:它们的 $4n$ 个直角中互不重合的直角个数不少于 $4\sqrt{n}$ 个.

三、(本题满分 50 分)

已知自然数 $n\geqslant 3$, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为非负实数,记 $A=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$, $B=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$, $C=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3$. 求证:

$$(n+1)A^2B+(n-2)B^2\geqslant A^4+(2n-2)AC.$$

四、(本题满分 50 分)

已知集合 S 由所有形如

$$\frac{(a_1^2-a_1+1)(a_2^2-a_2+1)\cdots(a_n^2-a_n+1)}{(b_1^2-b_1+1)(b_2^2-b_2+1)\cdots(b_n^2-b_n+1)}$$

的有理数组成,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 均为正整数. 求证:S 中包含无穷多个素数.

2013 年全国高中数学联赛冲刺模拟卷(4)第一试解答

(考试时间:80 分钟 满分:120 分)

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 将 1,2,…,260 按以下两种方式填入 13×20 的方格表中:

(1)第一行从左到右依次填入 1,2,…,13;第二行从左到右依次填入 14,15,…,26;…;最后一行从左到右依次填入 248,249,…,260.

(2)最右列从上往下依次填入 1,2,…,20;右边第二列从上往下依次填入 21,22,…,40;…;最左列从上往下依次填入 241,242,…,260.

在两种填法中被填在方格表的同一格中的数为____________.

〖答案〗87,174.

〖解〗第一种填法中,从上往下第 i 行,从左往右第 j 列的数可以用 $13(i-1)+j$ 表示,第二种填法中,从上往下第 i 行,从左往右第 j 列的数可以用 $20(13-j)+i$ 表示. 要使得相同的位置填相同的数,则有

$$13(i-1)+j=20(13-j)+i\Rightarrow12i+21j=273\Rightarrow7\mid12i\Rightarrow7\mid i.$$

注意到 $1\leqslant i\leqslant20$,所以 $i=7$ 或 14,对应的 $j=9$ 或 5,从而两种填法中相同的数为 87,174.

2. 已知函数 $f(x)=x^2-2x+3$,若当 $1<x<2$ 时,不等式 $|f(x)-a|<2$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是________________.

〖答案〗$1\leqslant a\leqslant4$.

〖解〗由 $|f(x)-a|<2$ 恒成立,得 $x^2-2x+1<a<x^2-2x+5$ 恒成立.

注意到当 $1<x<2$ 时,$x^2-2x+1<1$,$x^2-2x+5>4$,则有 $1\leqslant a\leqslant4$.

3. 在正四面体 $ABCD$ 中,M、N 分别为 AB、AD 的三等分点,其中 $AM=\frac{1}{3}AB$,$AN=\frac{2}{3}AD$,O 为 $\triangle BCD$ 的中心,则 AO 与 MN 所成角的正弦值为________________.

〖答案〗$\frac{\sqrt{7}}{3}$.

〖解〗不妨设正四面体边长为 6,则 $OB=OC=2\sqrt{3}$,$AO=2\sqrt{6}$. 设 M、N 在底面 BCD 上的射影分别为 S 和 T,则 S、T 分别在线段 OB 和 OD 上. AO 与 MN 所成角即为 $\angle SMN$. 又

$$MN=2\sqrt{3},ST^2=OS^2+OT^2-2OS\cdot OT\cdot\cos\angle SOT=7OS^2,\text{即 }ST=\sqrt{7}OS=\frac{2\sqrt{21}}{3}.$$

从而 $\sin\angle SMN=\frac{ST}{MN}=\frac{\frac{2\sqrt{21}}{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$.

4. 在$\triangle ABC$中,$\sin A\cdot\sin B\cdot\sin\frac{C}{2}$的最大值为________________.

〖答案〗$\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

〖解〗令$x=\frac{A+B}{2}$,$t=\cos x$则$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$t\in(0,1)$,所以

$$f=\sin A\cdot\sin B\cdot\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]\cos\frac{A+B}{2}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\cos\frac{A+B}{2}[1-\cos(A+B)]=(1-\cos^2x)\cos x=(1-t^2)t$$

$$=\sqrt{(1-t^2)^2t^2}\leqslant\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{(1-t^2)+(1-t^2)+2t^2}{3}\right)^3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

当且仅当$t=\cos x=\frac{\sqrt{3}}{3}$,且$A=B$时,上式取到最大值$\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

5. 任作椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的一条切线与椭圆两条对称轴分别交于点$A$、$B$,若线段$AB$长度的最小值为$3b$,则椭圆的离心率为________________.

〖答案〗$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

〖解〗设切点为$P(a\cos\theta,b\sin\theta)$,则切线方程为$\frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1$.其与$x$轴、$y$轴交点分别为$A\left(\frac{a}{\cos\theta},0\right)$,$B\left(0,\frac{b}{\sin\theta}\right)$,所以

$$AB^2=\frac{a^2}{\cos^2\theta}+\frac{b^2}{\sin^2\theta}=\left(\frac{a^2}{\cos^2\theta}+\frac{b^2}{\sin^2\theta}\right)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\geqslant(a+b)^2.$$

从而,$a+b=3b$,$a=2b$,$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{4b^2-b^2}}{2b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. 设EF是边长为$2\sqrt{6}$的正三角形ABC的外接圆的一条动弦,其长度为$2\sqrt{2}$,点P为$\triangle ABC$三边上的动点,则$\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{PF}$的最大值为________________.

〖答案〗2.

〖解〗设$\triangle ABC$的外心为O,EF中点为M,易知外接圆半径$R=2\sqrt{2}$,$|\overrightarrow{OM}|$,所以

$$\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{PF}=(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OE})\cdot(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OP})=\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OE})-\overrightarrow{OP}^2-\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}$$

$$=-\overrightarrow{OP}^2+2\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP}-2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot\cos60^\circ$$

$$=-(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM})^2+\overrightarrow{OM}^2-4=2-(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM})^2\leqslant2.$$

当$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}$,即动弦$EF$的中点落在$\triangle ABC$的边上时,$\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{PF}$取得最大值2.

7. 已知非空集合 $X\subseteq M=\{1,2,\cdots,2013\}$，用 $f(X)$ 表示集合 X 中最大数和最小数的和，则所有这样的 $f(X)$ 的和为____________.

〖答案〗$2014\cdot(2^{2013}-1)$.

〖解〗将 M 中的非空子集两两进行配对，对每个非空子集 $X\subseteq M$，令 $X'=\{2014-x\mid x\in X\}$，对 M 的任意两个子集 X_1 和 X_2，若 $X_1\neq X_2$ 时，$X_1'\neq X_2'$. 于是所有非空集合 X 可以分成 $X'\neq X$ 和 $X'=X$ 两类.

当 $X'=X$ 时，必有 $f(X)=2014$，当 $X'\neq X$ 时，必有 $f(X)+f(X')=2014\times2=4028$. 又 M 的非空子集共有 $2^{2013}-1$ 个，故所有这样的 $f(X)$ 的和为 $2014\cdot(2^{2013}-1)$.

8. 满足等式

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{25}^2=2+x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{24}x_{25}$$

的非负整数解 $(x_1,x_2,\cdots,x_{25})$ 有____________组.

〖答案〗29900.

〖解〗令 $x_0=0$，将条件式改写为

$$x_0^2+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{25}^2=2+x_0x_1+x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{24}x_{25}+x_{25}x_0$$

$$\Leftrightarrow(x_0-x_1)^2+(x_1-x_2)^2+\cdots+(x_{24}-x_{25})^2+(x_{25}-x_0)^2=4.$$

因为 26 个整数 $x_0-x_1,x_1-x_2,\cdots,x_{24}-x_{25},x_{25}-x_0$ 的和为 0，平方和为 4，所以这 26 个数只能取 $0,\pm1,\pm2$.

若这 26 个整数中，有一个取 ±2，则其余各数均必须为 0，与它们的和为 0 矛盾. 从而这 26 个数只能取 0 和 ±1，又它们的和为 0，所以它们必为 2 个 1，2 个 -1，22 个 0. 注意到 $x_0=0,x_1,x_2,\cdots,x_{25}$ 均为非负整数，则在这 26 个数中，1 和 -1 出现的顺序只能为 $-1,-1,1,1$ 或 $-1,1,-1,1$. 所以对应的非负整数解的组数为 $2C_{26}^4=29900$.

二、解答题（本大题共 3 小题，第 9 题 16 分，第 10、11 题 20 分，共 56 分）

9. 已知 a,b 为互不相等的正实数，求证：

$$\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}.$$

〖证明〗不妨设 $a>b$，我们分别证明

$$\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}\quad ①,\qquad 和\qquad \sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}\quad ②.$$

$$不等式①\Leftrightarrow\ln a-\ln b>\frac{2(a-b)}{a+b}\Leftrightarrow\ln\frac{a}{b}>\frac{2\left(\frac{a}{b}-1\right)}{\frac{a}{b}+1}\Leftrightarrow\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}\left(令\ x=\frac{a}{b}\right).$$

考虑函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}\ (x>1)$，则

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0.$$

所以,$f(x)$在区间$(1,+\infty)$上单调递增,故$f(x)>f(1)=0$. 从而不等式①成立.

$$\text{不等式②}\Leftrightarrow \ln a-\ln b<\frac{a-b}{\sqrt{ab}}\Leftrightarrow \ln\frac{a}{b}<\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\Leftrightarrow 2\ln x<x-\frac{1}{x}\left(\text{令 } x=\sqrt{\frac{a}{b}}\right).$$

考虑函数$g(x)=2\ln x-x+\dfrac{1}{x}(x>1)$,则

$$g'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{1}{x^2}=-\left(1-\frac{1}{x}\right)^2>0.$$

所以,$g(x)$在区间$(1,+\infty)$上单调递减,故$g(x)<g(1)=0$. 从而不等式②成立.

综上,$\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b}{2}$.

10. 已知椭圆$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的右焦点为F,上顶点为M. 问:是否存在直线l交椭圆于P,Q两点,且使得F是$\triangle MPQ$的内心?若存在,求直线l的方程,若不存在,请说明理由.

〖解〗易知$F(1,0)$,设$\triangle MPQ$的内切圆F的方程为$(x-1)^2+y^2=r^2(r>0)$,$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,则直线MP的方程为$(y_1-1)x-x_1y+x_1=0$,该直线与圆F相切,则$d=r$,即

$$\frac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{(y_1-1)^2+x_1^2}}=r\Rightarrow(x_1+y_1-1)^2=r^2(x_1^2+y_1^2-2y_1+1),$$

结合$x^2+2y^2=2$,化简整理得$-2x_1+(1-r^2)y_1+3-3r^2=0$. 同理$-2x_2+(1-r^2)y_2+3-3r^2=0$,即有$P,Q$均在直线$-2x+(1-r^2)y+3-3r^2=0$上,也即$PQ$方程为$-2x+(1-r^2)y+3-3r^2=0$.

因直线PQ也与圆F相切,故有$d=r$,即$\dfrac{|1-3r^2|}{\sqrt{(1-r^2)^2+4}}=r$,解得$r=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

故所求直线PQ存在,其方程为$x+(2-\sqrt{6})y+6-3\sqrt{6}=0$.

11. 设r为正整数,定义数列$\{a_n\}$如下:

$$a_1=1,a_{n+1}=\frac{na_n+2(n+1)^{2r}}{n+2},(n=1,2,\cdots).$$

证明:对任意正整数n,a_n均为整数.

〖证明〗由已知,得$(n+2)a_{n+1}=na_n+2(n+1)^{2r}$,从而

$$(n+1)(n+2)a_{n+1}=n(n+1)a_n+2(n+1)^{2r+1}.$$

令$b_n=n(n+1)a_n$,则$b_1=1,b_{n+1}=b_n+2(n+1)^{2r+1}$. 从而

$$b_n=b_1+\sum_{i=1}^{n-1}(b_{i+1}-b_i)=2(1+2^{2r+1}+3^{2r+1}+\cdots+n^{2r+1}).$$

注意到对正整数a,b,r,有$a+b\mid a^{2r+1}+b^{2r+1}$,下分别证明$n\mid b_n$,$n+1\mid b_n$.

因为$b_n=2n^{2r+1}+\sum\limits_{i=1}^{n-1}(i^{2r+1}+(n-i)^{2r+1})$,因为$n=i+(n-i)\mid i^{2r+1}+(n-i)^{2r+1}$,所以,$n\mid b_n$.

又$b_n=\sum\limits_{i=1}^{n}(i^{2r+1}+(n+1-i)^{2r+1})$,因为$n+1=i+(n+1-i)\mid i^{2r+1}+(n+1-i)^{2r+1}$,所以,$n+1\mid b_n$. 又$(n,n+1)=1$,所以$n(n+1)\mid b_n$,则任意正整数$n$,$a_n=\dfrac{b_n}{n(n+1)}$均为整数.

2013 年全国高中数学联赛冲刺模拟卷(4)加试解答

(考试时间:150 分钟　满分:180 分)

一、(本题满分 40 分)

设 D、E、F 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上的点,且 $\triangle AEF$、$\triangle BFD$、$\triangle CDE$ 的内切圆有相同的半径 r_1,又 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 的内切圆半径分别为 r_0 和 r,求证:$r=r_0+r_1$.

〖证明〗记 $\triangle ABC$ 的周长为 p_1,$\triangle DEF$ 的周长为 p_0,由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DEF}+S_{\triangle BDF}+S_{\triangle CDE}+S_{\triangle AEF}$ 可得

$$rp_1=r_1(p_1+p_0)+r_0p_0,$$

即

$$(r-r_1)p_1=(r_1+r_0)p_0. \quad ①$$

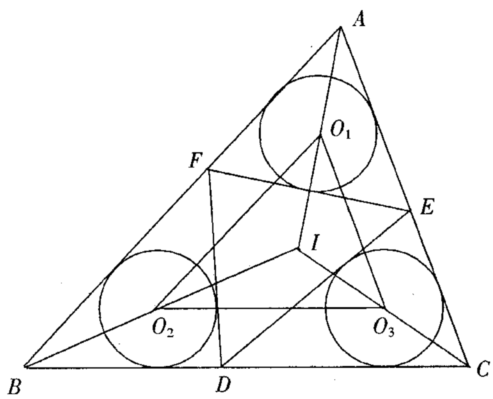
记 $\triangle AEF$、$\triangle BFD$、$\triangle CDE$、$\triangle ABC$ 的内心分别为 O_1、O_2、O_3、I,易得 $O_1O_2 /\!/ AB$,$O_2O_3 /\!/ BC$,$O_3O_1 /\!/ CA$,所以

$$\frac{O_2O_3}{BC}=\frac{O_3O_1}{CA}=\frac{O_1O_2}{AB}=\frac{r-r_1}{r}.$$

利用合比法则,可得

$$\frac{p_0}{p_1}=\frac{r-r_1}{r}.$$

即 $(r-r_1)p_1=p_0r$,代入①式,消去 p_0,得 $r=r_0+r_1$.



第一题图

二、(本题满分 40 分)

平面上任给 n 个不同的矩形. 求证:它们的 $4n$ 个直角中互不重合的直角个数不少于 $4\sqrt{n}$ 个.

〖证明〗我们对 n 归纳证明互不重合的直角个数不小于 $4\sqrt{n}$ 个.

当 $n=1$ 时结论显然成立(1 个矩形 4 个角).

设 $n>1$,将全体矩形依平行关系划分为等价类,因为不同类的矩形没有重合的角. 故若等价类多于 1 个,则可合并为 2 组,每组的矩形分别有 $a,b(a+b=n)$ 个,由归纳假设,互不重合的直角个数不小于 $4\sqrt{a}+4\sqrt{b}>4\sqrt{a+b}=4\sqrt{n}$.

下设只有 1 个等价类,即所有 n 个矩形的边彼此平行. 各边所在的直线构成矩形网格,设一边在第 i 条(从上数起)水平线上且朝左下方向的直角个数为 a_i,朝右上方向的直角个数为 b_i,则对 $i<j$,每个(i 左下 $-j$ 右上)对子至多构成一个矩形,而每个题给矩形有 1 个这样的对子,故

$$n\leqslant\sum_{i<j}a_ib_j\leqslant\sum a_i\sum b_j\leqslant\frac{\left(\sum a_i+\sum b_j\right)^2}{4},$$

即朝左下或右上的直角个数 $\sum a_i+\sum b_j\geqslant 2\sqrt{n}$,同理,朝右下或左上的直角个数也不小于 $2\sqrt{n}$,故互不重合的直角个数不小于 $4\sqrt{n}$.

三、(本题满分 50 分)

已知自然数 $n\geqslant 3$, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为非负实数,记 $A=\sum_{i=1}^{n}x_i$, $B=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$, $C=\sum_{i=1}^{n}x_i^3$. 求证:

$$(n+1)A^2B+(n-2)B^2\geqslant A^4+(2n-2)AC.$$

〖证明〗设 $p(X)=\prod_{i=1}^{n}(X-x_i)=X^n-AX^{n-1}+\frac{A^2-B}{2}X^{n-2}-\frac{A^3-3AB+2C}{6}X^{n-3}+\cdots$

对多项式 $p(X)$ 求 $n-3$ 次导数,易知 $p^{(n-3)}(X)$ 有三个非负实根,不妨设为 $0\leqslant u\leqslant v\leqslant w$. 则

$$\frac{6}{n!}p^{(n-3)}(X)=X^3-\frac{3A}{n}X^2+\frac{3(A^2-B)}{n(n-1)}X-\frac{A^3-3AB+2C}{n(n-1)(n-2)}=(X-u)(X-v)(X-w),$$

则
$$u+v+w=\frac{3A}{n},uv+vw+wu=\frac{3(A^2-B)}{n(n-1)},uvw=\frac{A^3-3AB+2C}{n(n-1)(n-2)}.$$

从而可得

$$\begin{aligned}&\frac{n^2(n-1)^2(n-2)}{9}[(n+1)A^2B+(n-2)B^2-A^4-(2n-2)AC]\\&=\cdots=u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2-uvw(u+v+w)\\&=uv(u-w)(v-w)+vw(v-u)(w-u)+wu(w-v)(u-v)\\&=0+uw(v-u)(w-v)+wu(w-v)(u-v)\geqslant 0.\end{aligned}$$

四、(本题满分 50 分)

已知集合 S 由所有形如

$$\frac{(a_1^2-a_1+1)(a_2^2-a_2+1)\cdots(a_n^2-a_n+1)}{(b_1^2-b_1+1)(b_2^2-b_2+1)\cdots(b_n^2-b_n+1)}$$

的有理数组成,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 均为正整数. 求证:S 中包含无穷多个素数.

〖证明〗显然 S 关于乘法,除法封闭. 即对 S 中的任两个数 r 和 s, rs 和 $\frac{r}{s}$ 也是 S 中的数.

记 $f(x)=x^2-x+1$,因为 $f(1)=1$,故 S 中分子分母的因数个数不必相同. 下证引理:

引理　若 a 为正整数,p 为 $f(a)$ 的一个素因子且 $p\neq 5$,则 $p\equiv\pm 1(\bmod 5)$.

引理的证明　$a^2+a=a(a+1)$ 恒为偶数,故 $f(a)$ 恒为奇数,从而 p 为奇数. 因为

$$f(a)\equiv 0(\bmod p)\Leftrightarrow(2a+1)^2\equiv 5(\bmod p),$$

所以 5 是模 p 的平方剩余,由高斯二次互反律知 p 也为 5 的平方剩余,所以 $p\equiv\pm 1(\bmod 5)$. 引理得证.

回到原题,我们用数学归纳法证明 S 中包含所有 $\pm 1(\bmod 5)$ 的素数. 因为这样的素数无穷多个,故 S 中包含无穷多个素数.

易知 $f(2)=5$, $f(3)=11$, $f(4)=19\in S$,设素数 $q\equiv\pm 1(\bmod 5)$ 且小于 q 的 $\pm 1(\bmod 5)$ 型素数都 $\in S$. 由于 5 是模 q 的平方剩余且 q 为奇数,则存在 $k\in\{1,2,\cdots,p-1\}$,使得 $f(k)=mq$.

因为 $1\leqslant f(k)\leqslant(q-1)^2+(q-1)-1=q^2-q-1<q^2$,所以 $1\leqslant m\leqslant p-1$.

而由引理,m 的素因子或者为 5,或者为 $\pm 1(\bmod 5)$. 故由归纳假设及 S 关于乘法,除法的封闭性,$q=\frac{f(k)}{m}\in S$. 从而 S 中包含所有 $\pm 1(\bmod 5)$ 的素数. 命题得证.

2013年全国高中数学联赛冲刺模拟卷(5)第一试

（考试时间:80分钟　满分:120分）

学校__________姓名________编号_______得分_______

一、填空题(本大题共8小题,每小题8分,共64分)

1. 设$\{a_n\}$为等差数列,$\{b_n\}$为等比数列,且数列$\{a_n+b_n\}$的前四项依次为0,0,1,0,则$a_{2013}=$__________.

2. 已知正四面体$ABCD$在水平面上的正投影为四边形时面积的最大值为4,则它在水平面上的正投影为三角形时面积的最大值为__________.

3. 若多项式$1-x+x^2-\cdots+x^{16}-x^{17}$可以表示为$a_0+a_1y+\cdots+a_{16}y^{16}+a_{17}y^{17}$,这里$y=x+1$,则$a_2=$__________.

4. 抛物线$y^2=4x$和动线段$x-2y+1=0(x\in[a,a+1])$存在公共点,则a的取值范围是__________.

5. 方程$\sqrt{x}\sin x^2=2$在区间$[0,20]$内实根的个数为__________.

6. 已知$\triangle ABC$中,$AB=AC$,$\angle CAB=30°$,O为外心且$\overrightarrow{CO}=\lambda_1\overrightarrow{CA}+\lambda_2\overrightarrow{CB}$,则$\lambda_1+2\lambda_2=$__________.

7. 正8边形中作出所有对角线,它们在8边形内(不在边界上)有__________个不同的交点.

8. 已知正整数n,使得从$1000n$起的1000个连续整数中没有完全平方数,则n的最小值为__________.

二、解答题(本大题共3小题,第9题16分,第10、11题20分,共56分)

9. 设抛物线 $y=x^2-2x+2$ 交直线 $y=mx(m>0)$ 于 P_1,P_2 两点,点 Q 在 P_1P_2 上,且点 Q 满足 $\frac{1}{|OP_1|}+\frac{1}{|OP_2|}=\frac{2}{|OQ|}$. 试求点 Q 的轨迹方程.

10. 已知正实数 a,b,c,d 满足 $2(a+b+c+d)\geqslant abcd$. 求证:

$$a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant abcd.$$

11. 已知数列 $a_n=\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}$, n 为正整数. 试求 $\frac{a_n}{n^2}$ 的最大和最小确界,并问这两个确界是否能够达到.

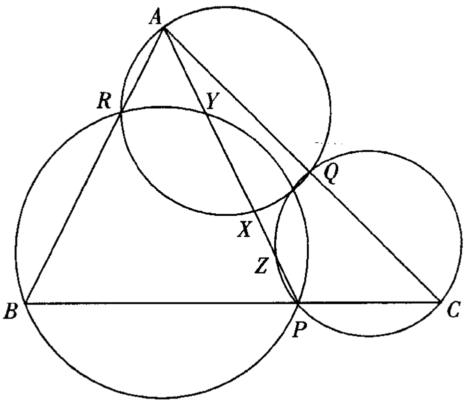
2013 年全国高中数学联赛冲刺模拟卷(5)加试

（考试时间:150 分钟　满分:180 分）

学校____________姓名__________编号________得分________

一、(本题满分 40 分)

已知 P,Q,R 分别为三角形 ABC 三边 BC,CA,AB 上的点. $\omega_A,\omega_B,\omega_C$ 分别为三角形 AQR,BRP,CPQ 的外接圆. 线段 AP 与圆 $\omega_A,\omega_B,\omega_C$ 的另一个交点分别为 X, Y, Z. 求证: $\frac{YX}{XZ}=\frac{BP}{PC}$.



第一题图

二、(本题满分 40 分)

对于正整数 n,定义集合 $S_n=\{C_n^n,C_{2n}^n,C_{3n}^n,\cdots,C_{n^2}^n\}$. 求证:存在无穷多个合数 n,使得 S_n 不是 $(\bmod n)$ 的完全剩余系.

三、(本题满分 50 分)

已知正整数 $n\geqslant 2$,正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$ 满足 $a_ia_{i+n}=1(1\leqslant i\leqslant n)$. 求证:存在 $\{1,2,\cdots,2n\}$ 的两个不同元素 j,k 使得 $|a_j-a_k|<\frac{1}{n-1}$.

四、(本题满分 50 分)

圆周上有 2^{500} 个点,将这些点任意编号为 $1\sim 2^{500}$. 求证:从这些点中必可连出 100 条两两不相交的弦,使得每条弦两端点处的两数之和彼此相等.

2013 年全国高中数学联赛冲刺模拟卷(5)第一试解答

(考试时间:80 分钟　满分:120 分)

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 设$\{a_n\}$为等差数列,$\{b_n\}$为等比数列,且数列$\{a_n+b_n\}$的前四项依次为 0,0,1,0,则 $a_{2013}=$____________.

【答案】$670\frac{5}{9}$.

【解】设公差和公比分别为 d 和 q,由题设有

$$a_1+b_1=0,a_1+d+b_1q=0,a_1+2d+b_1q_2=1,a_1+3d+b_1q^3=0.$$

解之得 $a_1=-\frac{1}{9},d=\frac{1}{3},b_1=\frac{1}{9},q=-2$. 从而 $a_{2013}=-\frac{1}{9}+\frac{2012}{3}=670\frac{5}{9}$.

2. 已知正四面体 $ABCD$ 在水平面上的正投影为四边形时面积的最大值为 4,则它在水平面上的正投影为三角形时面积的最大值为____________.

【答案】$2\sqrt{3}$.

【解】利用投影知识,易得以下结论:(1)正四面体在水平面上的正投影或为三角形或为四边形;(2)当投影为三角形时,最大投影等于其一个底面;(3)当投影为四边形时,最大投影为对角线长为棱长的正方形,此时四面体的一双对棱平行于水平面.

由此,知棱长为$\frac{a^2}{2}=4,a=2\sqrt{2},S_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=2\sqrt{3}$.

3. 若多项式 $1-x+x^2-\cdots+x^{16}-x^{17}$可以表示为 $a_0+a_1y+\cdots+a_{16}y^{16}+a_{17}y^{17}$,这里 $y=x+1$,则 $a_2=$____________.

【答案】816.

【解】一方面,$y(1-x+x^2-\cdots+x^{16}-x^{17})=(1+x)(1-x+x^2-\cdots+x^{16}-x^{17})=1-x^{18}=1-(y-1)^{18}$. 另一方面,$y(1-x+x^2-\cdots+x^{16}-x^{17})=y(a_0+a_1y+\cdots+a_{16}y^{16}+a_{17}y^{17})=a_0y+a_1y^2+\cdots+a_{16}y^{17}+a_{17}y^{18}$. 因此 $a_2=C_{18}^3=816$.

4. 抛物线 $y^2=4x$ 和动线段 $x-2y+1=0(x\in[a,a+1])$存在公共点,则 a 的取值范围是____________.

【答案】$\left[\frac{1}{2}-\sqrt{2},\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2}+\sqrt{2},\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right]$.

【解】要使动线段和抛物线有公共点,结合图象知只需动线段的两个端点一个在抛物线内部一

个在外部,故令 $F(x,y)=y^2-4x$,则

$$F\left(a,a+\frac{1}{2}\right)F\left(a+1,a+\frac{3}{2}\right)=\left(a^2-3a+\frac{1}{4}\right)\left(a^2-a-\frac{7}{4}\right)\leqslant 0$$

$$\Rightarrow a\in\left[\frac{1}{2}-\sqrt{2},\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2}+\sqrt{2},\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right].$$

5. 方程 $\sqrt{x}\sin x^2=2$ 在区间 $[0,20]$ 内实根的个数为____________.

〖答案〗122.

〖解〗设 $y=f(x)=\sqrt{x}\sin x^2$,当 $y=0$ 时,方程的解为 $x=\sqrt{k\pi}\in[0,20]$,$k\in\mathbf{Z}$,此时共有 $x=\sqrt{k\pi}(k=0,1,2,\cdots,127)$ 等 128 个根.

当 $\sqrt{x}\geqslant 2$ 时,$y=\sqrt{x}\sin x^2$ 的图象才有可能与 $y=2$ 的图象相交,所以 $x\geqslant 4$,又 $\sqrt{5\pi}<4$,$\sqrt{6\pi}>4$,当 $x\in[\sqrt{6\pi},\sqrt{7\pi}]$ 时,$\sqrt{x}\sin x^2\geqslant 0$,函数 $y=\sqrt{x}\sin x^2$ 图象在 $[\sqrt{6\pi},\sqrt{7\pi}]$ 上先从 0 开始递增,再递减回到 0,且

$$y_{\max}\geqslant f\left(\sqrt{6\pi+\frac{\pi}{2}}\right)=\sqrt[4]{6\pi+\frac{\pi}{2}}>2.$$

故在区间 $[\sqrt{6\pi},\sqrt{7\pi}]$ 内方程 $\sqrt{x}\sin x^2=2$ 有两个实根,同理,在区间 $[\sqrt{8\pi},\sqrt{9\pi}]$,$[\sqrt{10\pi},\sqrt{11\pi}]$,$\cdots$,$[\sqrt{126\pi},\sqrt{127\pi}]$ 内方程 $\sqrt{x}\sin x^2=2$ 均有两个实根. 从而方程 $\sqrt{x}\sin x^2=2$ 在区间 $[0,20]$ 内共有 122 个实根.

6. 已知 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,$\angle CAB=30°$,O 为外心且 $\overrightarrow{CO}=\lambda_1\overrightarrow{CA}+\lambda_2\overrightarrow{CB}$,则 $\lambda_1+2\lambda_2=$____________.

〖答案〗3.

〖解〗不妨设 $AB=2$,以 A 为原点,AB 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系,则 $A(0,0)$,$B(2,0)$,$C(\sqrt{3},1)$. 设外心 $O(1,y)$,由 $OA=OC$,得

$$1+y^2=(\sqrt{3}-1)^2+(y-1)^2\Rightarrow y=2-\sqrt{3}.$$

则
$$(1-\sqrt{3},1-\sqrt{3})=\overrightarrow{CO}=\lambda_1(-\sqrt{3},-1)+\lambda_2(2-\sqrt{3},-1)$$
$$\Rightarrow\lambda_1=2\sqrt{3}-1,\lambda_2=2-\sqrt{3}\Rightarrow\lambda_1+2\lambda_2=3.$$

7. 正 8 边形中作出所有对角线,它们在 8 边形内(不在边界上)有____________个不同的交点.

〖答案〗49.

〖解〗内部交点是内接四边形的对角线交点,故有 $C_8^4=70$ 种取法. 4 条主对角线交于中心点处,扣除 $(C_4^2-1)=5$ 个重复点. 每条主对角线上还有 2 个三线点,再扣除 $4\cdot 2\cdot(C_3^2-1)=16$ 个. 此外没有别的三线点,故总点数是 $70-5-16=49$.

8. 已知正整数 n,使得从 $1000n$ 起的 1000 个连续整数中没有完全平方数,则 n 的最小值为____________.

【答案】282.

【解】由 $1000n \geqslant k^2+1$，$1000n+999 \leqslant (k+1)^2-1$ 相减得 $2k \geqslant 1000$，$k \geqslant 500$.

令 $k=500+m$，$k^2=250000+1000m+m2$，$(k+1)^2=250000+1000(m+1)+(m+1)^2$，则 $n \geqslant m+251$，故当 $(m+1)^2<1000$ 时不合要求，得到 $m+1 \geqslant 32$，$m \geqslant 31$.

因为 $531^2=281961$，$532^2=283024$，故 $n=282$ 为符合条件的最小数.

二、解答题（本大题共 3 小题，第 9 题 16 分，第 10、11 题 20 分，共 56 分）

9. 设抛物线 $y=x^2-2x+2$ 交直线 $y=mx(m>0)$ 于 P_1，P_2 两点，点 Q 在 P_1P_2 上，且点 Q 满足 $\frac{1}{|OP_1|}+\frac{1}{|OP_2|}=\frac{2}{|OQ|}$. 试求点 Q 的轨迹方程.

【解】设点 $Q(c_0,y_0)$，因 Q 在直线 $y=mx$ 上，且此直线过原点 $(0,0)$. 故直线 $y=mx$ 可写作

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_0}{1+\lambda}, \\ y=\dfrac{y_0}{1+\lambda}. \end{cases}$$

（λ 为不等于 -1 的参数）. 代入抛物线方程，得

$$2\lambda^2-(2x_0+y_0-4)\lambda+(x_0^2-2x_0-y_0+2)=0.$$

所以，$\lambda_1+\lambda_2=\frac{2x_0+y_0-4}{2}$. 由 λ 的几何意义，可知 $\lambda_1=\frac{QP_1}{P_1O}$，$\lambda_2=\frac{QP_2}{P_2O}$. 于是

$$\lambda_1+1=\frac{QP_1+P_1O}{P_1O}=\frac{QO}{P_1O}=\frac{|QO|}{|OP_1|},$$

$$\lambda_2+1=\frac{QP_2+P_2O}{P_2O}=\frac{QO}{P_2O}=\frac{|QO|}{|OP_2|},$$

由条件 $\frac{1}{|OP_1|}+\frac{1}{|OP_2|}=\frac{2}{|OQ|}$，得

$$(\lambda_1+1)+(\lambda_2+1)=2 \Rightarrow \lambda_1+\lambda_2=0.$$

故 $2x_0+y_0-4=0$. 于是点 Q 的轨迹方程为 $2x+y-4=0$.

10. 已知正实数 a,b,c,d 满足 $2(a+b+c+d) \geqslant abcd$. 求证：

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant abcd.$$

【证明】当 $abcd \geqslant 16$ 时，由均值不等式，有

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant 4\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2 \geqslant 4\left(\frac{abcd}{8}\right)^2=\frac{(abcd)^2}{16} \geqslant abcd.$$

当 $abcd<16$ 时，由均值不等式，有

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant 4\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2}=\sqrt{16abcd}>\sqrt{(abcd)^2}=abcd.$$

11. 已知数列 $a_n=\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}$，$n$ 为正整数. 试求 $\frac{a_n}{n^2}$ 的最大和最小确界，并问这两个确界是否能够达到.

〖**解**〗因为对任意正整数 k,均有

$$k<\sqrt{k(k+1)}<k+\frac{1}{2},$$

对 k 自 1 到 n 求和,得

$$\frac{n(n+1)}{2}<a_n<\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n}{2},$$

从而$\frac{n+1}{2n}<\frac{a_n}{n^2}<\frac{n+2}{2n}$. 由此可见,$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{2}$. 下证明$\frac{a_n}{n^2}$单调递减. 即证

$$\frac{a_n}{n^2}>\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}\Leftrightarrow\frac{a_n}{n^2}>\frac{1}{(n+1)^2}\left(a_n+\sqrt{(n+1)(n+1)}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{a_n}{n^2}>\frac{\sqrt{(n+1)(n+1)}}{2n+1},$$

注意到$\frac{a_n}{n^2}>\frac{n+1}{2n}>\frac{\sqrt{(n+1)(n+1)}}{2n+1}$,故上述不等式得证.

综上,$\frac{a_n}{n^2}$单调递减,它的最大下界为$\frac{1}{2}$且不能达到,最小上界为第一项$\sqrt{2}$,可以达到.

2013 年全国高中数学联赛冲刺模拟卷(5)加试解答

（考试时间：150 分钟　满分：180 分）

一、(本题满分 40 分)

已知 P,Q,R 分别为三角形 ABC 三边 BC,CA,AB 上的点. $\omega_A,\omega_B,\omega_C$ 分别为三角形 AQR，BRP，CPQ 的外接圆. 线段 AP 与圆 $\omega_A,\omega_B,\omega_C$ 的另一个交点分别为 X,Y,Z.

求证：$\dfrac{YX}{XZ}=\dfrac{BP}{PC}$.

〖证明〗设 ω_B 和 ω_C 的另一个交点为 S，因为 $BPSR$ 和 $CPSQ$ 分别四点共圆，所以

$$\angle SQA=\angle SPC=\angle BRS.$$

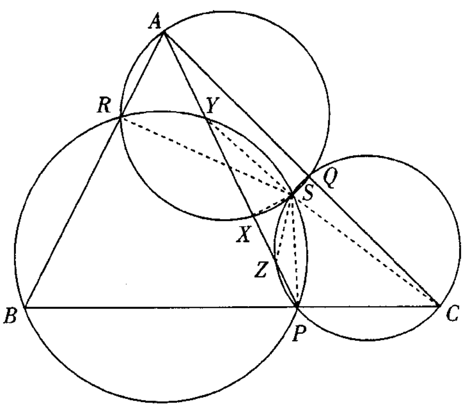
所以，$ARSQ$ 四点共圆. 即圆 $\omega_A,\omega_B,\omega_C$ 交于同一点 S.

因为 $\qquad \angle XYS=\angle PYS=\angle PBS,$

$$\angle SXY=\angle SXA=\angle SRA=\angle SPB,$$

所以，$\triangle SYX\backsim\triangle SBP$，从而 $\dfrac{YX}{BP}=\dfrac{SX}{SP}$.

类似地，得到 $\triangle SXZ\backsim\triangle SPC$，从而 $\dfrac{SX}{SP}=\dfrac{XZ}{PC}$. 所以 $\dfrac{YX}{BP}=\dfrac{XZ}{PC}$，即有 $\dfrac{YX}{XZ}=\dfrac{BP}{PC}$.



第一题图

二、(本题满分 40 分)

对于正整数 n，定义集合 $S_n=\{C_n^n,C_{2n}^n,C_{3n}^n,\cdots,C_{n^2}^n\}$. 求证：存在无穷多个合数 n，使得 S_n 不是 $(\bmod n)$ 的完全剩余系.

〖证明〗我们证明 $n=2p$（p 为奇素数）满足题设要求.

$$C_{2kp}^{2p}=k\prod_{i=1}^{p-1}\frac{2kp-i}{2p-i}\cdot(2k-1)\prod_{i=1}^{p-1}\frac{2kp-p-i}{p-i}\equiv k(2k-1)\pmod p.$$

特别地，当 $k=\dfrac{p+1}{2},p,2p$ 时，C_{2kp}^{2p} 都被 p 整除. 但 $(\bmod 2p)$ 的完系中只有两个元素被 p 整除，此时 S_n 不是 $(\bmod n)$ 的完系.

三、(本题满分 50 分)

已知正整数 $n\geqslant 2$，正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$ 满足 $a_ia_{i+n}=1(1\leqslant i\leqslant n)$. 求证：存在 $\{1,2,\cdots,2n\}$ 的两个不同元素 j,k 使得 $|a_j-a_k|<\dfrac{1}{n-1}$.

〖证明〗每对 a_i,a_{i+n} 中有一个不小于 1，记作 x_i，另一个 $y_i=\dfrac{1}{x_i}\leqslant 1$. 不妨设 $x_1\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant 1$，则 1

$\geqslant y_n\geqslant\cdots\geqslant y_1$. 设 $n+1$ 个递减的数 $x_n,y_n,\cdots,y_2,y_1$ 两两间距的最小者为 d,则

$$d\leqslant x_n-y_n=x_n-\frac{1}{x_n}\Rightarrow x_n^2-dx_n-1\geqslant 0\Rightarrow x_n\geqslant\frac{d+\sqrt{d^2+4}}{2}.$$

再由　$(n-1)d\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n-1}(y_{i+1}-y_i)=y_n-y_1<y_n=\dfrac{1}{x_n}\leqslant\dfrac{2}{d+\sqrt{d^2+4}}=\dfrac{\sqrt{d^2+4}-d}{2}$,

得 $(2n-1)d<\sqrt{d^2+4}$,两边平方得 $(4n^2-4n+1)d^2<d^2+4$,从而 $d<\dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}<\dfrac{1}{n-1}$.

四、(本题满分50分)

圆周上有 2^{500} 个点,将这些点任意编号为 $1\sim 2^{500}$. 求证:从这些点中必可连出100条两两不相交的弦,使得每条弦两端点处的两数之和彼此相等.

〖**证明**〗本题的证明基于如下事实.

引理　*在一个简单图 G 中,设顶点 v 的度数为 d_v,则 G 包含一个由某些顶点构成的独立集 S,满足 $|S|\geqslant f(G)$,其中 $f(G)=\sum\limits_{v\in G}\dfrac{1}{d_v+1}$.*

引理的证明　对 G 的顶点个数 $|G|=n$ 进行归纳证明. 初始情形 $n=1$ 显然成立. 在归纳步骤中取 G 中有最小度数 d 的某个顶点 v_0. 将 v_0 与它所有的邻居 $v_1,v_2,\cdots,v_d$ 以及所有连到这些顶点的边从图 G 中删除,将所得的图称为 G'. 根据归纳假设,G' 包含了一个顶点构成的独立集 S' 满足 $|S'|\geqslant f(G')$. 因为 S' 中的顶点都不是 v_0 的邻居,$S=S'\cup\{v_0\}$ 为 G 中的顶点独立集.

设 G' 中顶点 v 的度数为 d_v'. 显然对每个顶点 v,都有 $d_v'\leqslant d_v$ 成立,同时由 v_0 的选择知 $d_{v_i}\geqslant d$ 对所有的 $i=0,1,\cdots,d$ 均成立. 于是有

$$f(G')=\sum_{v\in G'}\frac{1}{d_v'+1}\geqslant\sum_{v\in G'}\frac{1}{d_v+1}=f(G)-\sum_{i=0}^{d}\frac{1}{d_{v_i}+1}\geqslant f(G)-\frac{d+1}{d+1}=f(G)-1.$$

所以,$|S|=|S'|+1\geqslant f(G')+1\geqslant f(G)$. 由数学归纳法,引理成立.

回到原题,为简洁起见,记 $n=2^{499}$,并画出圆周上 $2n$ 个点所决定的所有弦. 依据各条弦两端的数字之和为 $3,4,5,\cdots,4n-1$,将各弦分别染色(将 $3,4,5,\cdots,4n-1$ 各想成一种颜色). 显然,同一点引出的 $2n-1$ 条弦互不同色. 任一弦 v 两侧点数之和为 $2n-2$,记较少一侧的点数为 $m(v)$ $(0\leqslant m(v)\leqslant n-1)$. 对每个 $0\leqslant r\leqslant n-2$, $m(v)=r$ 的弦 v 有 $2n$ 条,而 $m(v)=n-1$ 的弦 v 只有 n 条.

考虑以所有 k 色弦为顶点集的图 $G(k)$,两顶点有连线当且仅当这两条弦相交(由于同色弦不共端点,只能交于内点). 与弦 v 相交的弦其两端点在 v 的两侧,由于每点至多引出1条 k 色弦,故弦 v 的度 $d(v)\leqslant m(v)$. 本题要求证明必有一个 $G(k)$ 含有不少于100个顶点的独立集.

由引理,$G(k)$ 的独立点数不少于 $f(G(k))\geqslant\sum\limits_{v\in V(G(k))}\dfrac{1}{m(v)+1}$,而对 $0\leqslant r\leqslant n-2$, $m(v)=r$ 的弦 v 有 $2n$ 条,故 $\sum\limits_{k=3}^{4k-1}f(G(k))>2n\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{1}{i}$,必有一个 $f(G(k))>\dfrac{2n}{4n-3}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{1}{i}>\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{1}{i}$.

利用估计 $\sum\limits_{i=2^{s-1}+1}^{2^s}\dfrac{1}{i}\geqslant\sum\limits_{i=2^{s-1}+1}^{2^s}\dfrac{1}{2^s}=\dfrac{1}{2}$, $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{1}{i}=1+\sum\limits_{s=1}^{n-1}\sum\limits_{i=2^{s-1}+1}^{2^s}\dfrac{1}{2^s}-\dfrac{1}{2^{499}}\geqslant 1+\dfrac{499}{2}-\dfrac{1}{2^{499}}>250$,故必有一个 $f(G(k))$ 大于125,即不小于126.