2011 年全国高中数学联赛冲刺模拟卷（5）第一试

（时间：8：00-9：20）

学校：____________ 姓名：_______________ 成绩：___________

一．填空题（每题 8 分，共 8 题）

1．若实数 x, y 满足 $\max\left\{1-x, x^2-1\right\} \le y \le x+2$，则 $u\left(x,y\right)=2x+y$ 的取值范围

是____________．

[解]：在坐标系 xOy 中，分别画出曲线 $y=1-x, y=x^2-1$ 及 $y=x+2$ 的图象，它们围成一个曲边三角形 ABC，其中 $A\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$，$B\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right),C\left(1,0\right)$.

因此，问题转化为直线系 $u=2x+y$ 与曲边三角形 ABC 有公共点时，直线的纵截距 u 的取范围．数形结合易知:过点 A 时，u 取最大值 $\frac{7+3\sqrt{13}}{2}$；过点 B 时，u 取最小值 $\frac{1}{2}$．

因此 $u\left(x,y\right)=2x+y$ 的取值范围是闭区间 $\left[\frac{1}{2},\frac{7+3\sqrt{13}}{2}\right]$.

2．三个学生独立的参加考试，随机变量 x 代表通过考试的学生数，其分布列如下：

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{2}{5} & \frac{13}{30} & \frac{3}{20} & \frac{1}{60} \end{pmatrix}$．三个学生中通过考试的概率最小的是____________．

解：设 p_1, p_2, p_3 分别表示这三个学生通过的概率.

$$p(x=0)=\prod_i(1-p_i)=1-\sum_i p_i-\sum_{i\ne j}p_ip_j-p_1p_2p_3=\frac{2}{5},$$

$$p(x=1)=\sum_{(i,j,k)=\{1,2,3\}}p_i(1-p_j)(1-p_k)=\sum_i p_i-2\sum_{i\ne j}p_ip_j+3p_1p_2p_3=\frac{13}{30},$$

$$p(x=2)=\sum_{(i,j,k)=\{1,2,3\}}p_ip_j(1-p_k)=\sum_{i\ne j}p_ip_j-3p_1p_2p_3=\frac{3}{20},$$

$$p(x=3)=p_1p_2p_3=\frac{1}{60}.$$

把上面的 $\sum_i p_i, \sum_{i\ne j}p_ip_j, p_1p_2p_3$ 看做三个未知数的线性方程，解得：

$$\sum_i p_i=\frac{47}{60},\sum_{i\neq j}p_ip_j=\frac{1}{5},p_1p_2p_3=\frac{1}{60}.$$

由韦达定理可以把 p_1,p_2,p_3 看做为下面方程的根

$$x^3-\frac{47}{60}x^2+\frac{1}{5}x-\frac{1}{60}=0,\text{即}(x-\frac{1}{3})(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{5})=0.$$

所以三个学生通过的概率分别为 $\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$.

3．若在 ΔABC 中有 $2\sin B\sin(A+B)-\cos A=1$ ，$2\sin C\sin(B+C)-\cos B=0$ ，

则 ΔABC 的最大内角的值为____________ .

答：$\cos(A+2B)=-1,\cos(B+2C)=0$，可得 $A=\frac{2\pi}{3},B=C=\frac{\pi}{6}$。答案：$\frac{2\pi}{3}$。

4． 已知数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$,$a_{n+1}=\frac{1}{a_0+a_1}+\frac{1}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n+a_{n+1}}$, $n\in N$, 且 a_{100}=10,

则 $a_{2011}=$____________ .

解：由 $a_{n+1}=\frac{1}{a_0+a_1}+\frac{1}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n+a_{n+1}}$, $a_n=\frac{1}{a_0+a_1}+\frac{1}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}+a_n}$,

两式相减得 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_n+a_{n+1}}$,所以 $a_{n+1}^2-a_n^2=1$,从而 $a_{2011}^2-a_{100}^2=2011-100$

所以 $a_{2011}^2=2011$，即 $a_{2011}=\pm\sqrt{2011}$

5．已知 a,b,c,x,y,z 为复数，且 $a=\frac{b+c}{x-2},b=\frac{c+a}{y-2},c=\frac{a+b}{z-2}$ ，

若 $xy+yz+zx=567,x+y+z=2011$，则 $xyz=$____________ .

解：由 $a=\frac{b+c}{x-2},b=\frac{c+a}{y-2},c=\frac{a+b}{z-2}$ 得 $x-1=\frac{b+c}{a}+1=\frac{a+b+c}{a}$

所以 $\frac{1}{x-1}=\frac{a}{a+b+c}$ ，同理 $\frac{1}{y-1}=\frac{b}{a+b+c},\frac{1}{z-1}=\frac{c}{a+b+c}$,

从而$\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{y-1}+\dfrac{1}{z-1}=1$，

即$(y-1)(z-1)+(z-1)(x-1)+(x-1)(y-1)=(x-1)(y-1)(z-1)$

整理得$xyz=2(xy+yz+zx)-3(x+y+z)+4=-4895$

6．若X是棱长为a的正四面体$ABCD$内一点，以X在四面体$ABCD$的四个面上的射影为顶点的新四面体的体积的最大值为______________．

解：设正四面体$ABCD$的四个面的面积满足$S_1=S_2=S_3=S_4=S$；$x_1+x_2+x_3+x_4=h$，h表示正四面体$ABCD$的高。设O为正四面体$ABCD$的中心，O_1,O_2,O_3,O_4分别是O在四个面上的射影，则有

$$V\left(OO_1O_2O_3\right)=V\left(OO_1O_2O_4\right)=V\left(OO_2O_3O_4\right)=V\left(OO_1O_3O_4\right)=\frac{1}{4}V,$$

此处$V=V\left(O_1O_2O_3O_4\right)$,在正四面体$ABCD$中任取一点$X$，有

$$\frac{V\left(XX_1X_2X_3\right)}{\frac{1}{4}V}=\frac{V\left(XX_1X_2X_3\right)}{V\left(O_1O_2O_3O_4\right)}=\frac{x_1x_2x_3}{rrr}$$，此处$r=\dfrac{h}{4}=OO_1=OO_2=OO_3=OO_4$，所以

$V\left(XX_1X_2X_3\right)=\dfrac{16V}{h^3}x_1x_2x_3$,同理可得

$V\left(XX_2X_3X_4\right)=\dfrac{16V}{h^3}x_2x_3x_4$，$V\left(XX_1X_3X_4\right)=\dfrac{16V}{h^3}x_1x_3x_4$，$V\left(XX_1X_2X_4\right)=\dfrac{16V}{h^3}x_1x_2x_4$

则$V\left(X_1X_2X_3X_4\right)=\dfrac{16V}{h^3}\left(x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_3x_4\right)$

令$a=x_1+x_2,b=x_3+x_4$，则$a+b=h$ 所以

$$V\left(X_1X_2X_3X_4\right)=\frac{16V}{h^3}\left(x_1x_2b+ax_3x_4\right)\le\frac{16V}{h^3}\left[\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2b+a\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)^2\right]$$

$$=\frac{16V}{h^3}\cdot\frac{a^2b+ab^2}{4}=\frac{4V}{h^2}ab\le\frac{4V}{h^2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=V$$

当$x_1=x_2,x_3=x_4$，即$a=b$时等号成立，此时$X=O$,即所求的点X是正四面体$ABCD$的中心。

7．若正实数 x,y 满足 $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=2011$，则 $x+y$ 的最小值为_________．

解：令 $t=x+\sqrt{x^2+1},t'=y+\sqrt{y^2+1}$，则 $tt'=2011$，且 $t>0,t'>0$

$\frac{1}{t}=\sqrt{x^2+1}-x$，所以 $2x=t-\frac{1}{t}$，同理 $2y=t'-\frac{1}{t'}$

所以 $x+y=\frac{1}{2}(t+t'-\frac{1}{t}-\frac{1}{t'})=\frac{1}{2}(t+t')(1-\frac{1}{tt'})=\frac{1005}{2011}(t+t')$

$\geq\frac{2010}{2011}\sqrt{tt'}=\frac{2010}{2011}\sqrt{2011}$

当且仅当 $t=t'=\sqrt{2011}$ 时取到等号，所以 $x+y$ 的最小值 $\frac{2010}{2011}\sqrt{2011}$。

8．设 $f(x)=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，其中 $a_i\in Z,(i=0,1,2,\cdots,5)$，若对于任意的实数 $x\in\{0,1,2,3,4,5\}$ 均有 $0\leq f(x)<120$，则不同的函数 $f(x)$ 的个数为_______．

解：定义：对于每个正整数 i， $x^{(i)}=x(x-1)(x-2)\cdots(x-i+1)$， $x^{(0)}=1$。

则有当 $x\in N,i>x$ 时，必有 $x^{(i)}=0$

引理：每个 n 次多项式 $f(x)$ 一定可以惟一的表示为

$f(x)=a_nx^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\cdots+a_0x^{(0)},a_n\neq0$。

证明略。

回到原题：设 $f(x)=a_5x^{(5)}+a_4x^{(4)}+\cdots+a_0$，

首先对于 a_0 有 120 种不同的取法；若 $a_0,a_1,\cdots,a_{i-1}$ 确定，则对于 a_i，只要

$0\leq f(i)=a_ii^{(i)}+a_{i-1}i^{(i-1)}+\cdots+a_0<120$，从而 a_i 共有 $\frac{120}{i!}$ 种不同的取法。

所以所求不同的函数 $f(x)$ 的个数为 $\prod_{i=0}^{5}\frac{120}{i}=86400000$

二．解答题

9．（本题满分 16 分）已知 $F_n=2^{2^n}+1,n=1,2,\cdots$，求证：$\frac{1}{F_1}+\frac{2}{F_2}+\frac{2^2}{F_3}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{F_n}<\frac{1}{3}$．

证明：因为 $2^{2^{k+1}}-1=(2^{2^k})^2-1=(2^{2^k}-1)(2^{2^k}+1)$，令 $x_k=2^{2^k}-1$

则 $\frac{1}{x_{k+1}}=\frac{1}{2^{2^{k+1}}-1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2^{2^k}-1}-\frac{1}{2^{2^k}+1})=\frac{1}{2}(\frac{1}{x_k}-\frac{1}{f_k})$

从而有$\dfrac{1}{f_k}=\dfrac{1}{x_k}-\dfrac{2}{x_{k+1}}$，所以$\dfrac{2^{k-1}}{f_k}=\dfrac{2^{k-1}}{x_k}-\dfrac{2^k}{x_{k+1}}$

所以$\dfrac{1}{f_1}+\dfrac{2}{f_2}+\dfrac{2^2}{f_3}+\cdots+\dfrac{2^{n-1}}{f_n}=\sum\limits_{k=1}^{n}(\dfrac{2^{k-1}}{x_k}-\dfrac{2^k}{x_{k+1}})=\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{2^n}{x_{n+1}}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2^n}{x_{n+1}}<\dfrac{1}{3}$证毕。

10．（本题满分 20 分）设$n,k,r\in \mathrm{N}^*,r\le k\le n$，并称$r$个连续的自然数为$r$连数，现从$1,2,3,\cdots,n$中任取（不放回）$k$个，求其中含有$r$连数的不同方式数$S(n,k,r)$．

算法 1：不妨设从这n个数中取出k后剩下的数为$a_1,a_2,\cdots,a_{n-k}$，且$a_1<a_2<\cdots<a_{n-k}$，记 $a_0=0,a_{n-k+1}=n+1$ ，并设在区间(a_{i-1},a_i)内的取出数的个数为$x_i\,(1\le i\le n-k+1,i\in \mathrm{N}^*)$，则$\sum\limits_{i=1}^{n-k+1}x_i=k$．

这样，问题(1)转化为：

求不定方程$\sum\limits_{i=1}^{n-k+1}x_i=k$至少有一个$x_i\ge r$的非负整数解$(x_1,x_2,\cdots,x_{n-k+1})$的个数．…(2)

设A_i为不定方程$\sum\limits_{i=1}^{n-k+1}x_i=k$满足$x_i\ge r$的非负整数解集，其中$1\le i\le n-k+1$，并记$|A_i|$为集合$A_i$中元素的个数．

这样，问题(2) 即为求$|\bigcup\limits_{i=1}^{n-k+1}A_i|$的值．

下面利用容斥原理求之．

先求$|A_i|$ $(1\le i\le n-k+1)$．

令 $y_j=\begin{cases}x_j+1, & 1\le j\le n-k+1\text{且}j\ne i\\ x_j+1-r, & j=i\end{cases}$．

则$y_i\ge 1\,(1\le i\le n-k+1)$，且$\sum\limits_{i=1}^{n-k+1}y_i=n+1-r$．

这样求$|A_i|$即为

求不定方程$\sum\limits_{i=1}^{n-k+1}y_i=n+1-r$的正整数解的个数．　　　…………………………………(3)

而问题(3) 即为：

求将一排$n+1-r$个不同的小球分成$n-k+1$段的方法数． ………………………(4)

即为：

求在一排$n+1-r$个不同小球产生的$n-r$个空挡中插入$n-k$个挡板的方法数．……(5)

显然问题(5)有C_{n-r}^{n-k}种不同的方法．

故$|A_i|=C_{n-r}^{n-k}=C_{n-r}^{k-r}$．

同样地，$A_i\cap A_j$是不定方程$\sum_{i=1}^{n-k+1}x_i=k$满足$x_i\ge r$且$x_j\ge r$(其中$1\le i<j\le n-k+1$)的非负整数解集．

故$|A_i\cap A_j|=C_{n-2r}^{k-2r}$．

$\bigcap_{1\le i\le l}A_{k_i}$ 是不定方程 $\sum_{i=1}^{n-k+1}x_i=k$ 满足 $x_{k_1}\ge r,x_{k_2}\ge r,\cdots,x_{k_j}\ge r$ （其中$1\le k_1<k_2<\cdots<k_j\le n-k+1$)的非负整数解集．

故$|\bigcap_{1\le i\le j}A_{k_i}|=C_{n-jr}^{k-jr}$．

所以，由容斥原理知，

$$|\bigcup_{i=1}^{n-k+1}A_i|=\sum_{i=1}^{n-k+1}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le n-k+1}|A_i\cap A_j|+\cdots+(-1)^{j-1}\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots k_j\le n-k+1}|\bigcap_{1\le i\le 1}A_{k_i}|+\cdots$$

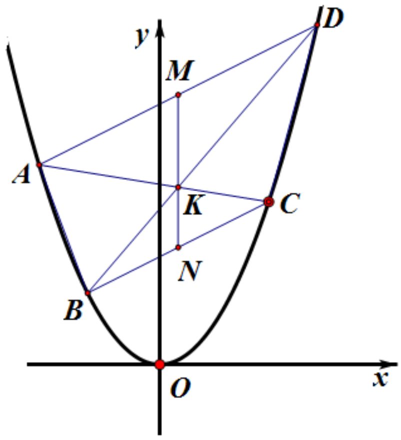
$$=C_{n-k+1}^{1}C_{n-r}^{k-r}-C_{n-k+1}^{2}C_{n-2r}^{k-2r}+\cdots+(-1)^{j-1}C_{n-k+1}^{j}C_{n-jr}^{k-jr}+\cdots$$

$$=\sum_{j=1}^{[\frac{k}{r}]}(-1)^{j-1}C_{n-k+1}^{j}C_{n-jr}^{k-jr}.$$

即从 1，2，3，…，n 中任取（不放回）k 个，则其中含有 r 连数的不同方式数是

$$S(n,k,r)=\sum_{j=1}^{[\frac{k}{r}]}(-1)^{j-1}C_{n-k+1}^{j}C_{n-jr}^{k-jr}.$$

11（本题满分 20 分）已知内接于抛物线 $y=x^2$ 的梯形 $ABCD$,其中 $AD//BC,AD>BC$ ，，M,N 分别为 AD,BC 的中点，K 是对角线 AC,BD 的交点，且 $KM=m,KN=n$，求梯形 $ABCD$ 的面积（用 m,n 表示）.



解：设 AD 的方程为 $y=kx+a$ ，

BC 的方程为 $y=kx+b$

$k=\tan\theta,\theta$ 为直线 AD 的倾斜角。

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$

$M(x_M,y_M),N(x_N,y_N),K(x_k,y_k)$

由 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=kx+a \end{cases}$ 得 $x^2-kx-a=0$

由 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=kx+b \end{cases}$ 得 $x^2-kx-b=0$

所以 $x_M=\dfrac{x_1+x_4}{2}=\dfrac{k}{2}=\dfrac{x_2+x_3}{2}=x_N$

直线 AC 的方程为 $y=(x_1+x_3)x-x_1x_3$ ，直线 BD 的方程为 $y=(x_2+x_4)x-x_2x_4$

由 $\begin{cases} y=(x_1+x_3)x-x_1x_3 \\ y=(x_2+x_4)x-x_2x_4 \end{cases}$ 得 $(x_1+x_3-x_2-x_4)x_k=x_1x_3-x_2x_4$

$x_1x_3-x_2x_4=(x_1+x_4)x_3-x_4(x_2+x_3)=k(x_3-x_4)$

$=x_1(x_3+x_2)-x_2(x_1+x_4)=k(x_1-x_2)$

若 $k=0$，则显然有 $x_1-x_2=x_3-x_4\neq 0$，若 $k\neq 0$, 同样有 $x_1-x_2=x_3-x_4\neq 0$

所以 $x_k=\dfrac{k}{2}=x_M=x_N$

从而 K,M,N 三点共线。

所以 $m=y_M-y_K=\dfrac{x_1^2+x_4^2}{2}-\dfrac{k}{2}(x_1+x_3)+x_1x_3$

$$=\frac{(x_1+x_4)^2}{2}-\frac{k}{2}(x_1+x_3)+x_1x_3-x_1x_4=\frac{k}{2}(x_1+x_4-x_1-x_3)+x_1(x_3-x_4)$$

$$=\frac{1}{2}(x_4-x_3)(x_4-x_1)$$

同理 $n=y_K-y_N=-\frac{1}{2}(x_2-x_3)(x_2-x_1)$

又梯形 $ABCD$ 的面积 $S=\frac{1}{2}(|AD|+|BC|)\cdot|MN|\cdot|\cos\theta|$

$$=\frac{1}{2}(x_4-x_1+x_3-x_2)\cdot\sqrt{1+k^2}\,|MN|\cdot|\cos\theta|$$

$$=\frac{1}{2}(x_4-x_1+x_3-x_2)\cdot|MN|=\frac{1}{2}(x_4-x_1+x_3-x_2)\cdot(m+n)$$

$$m+n=\frac{1}{2}(x_4-x_3)(x_4-x_1)-\frac{1}{2}(x_2-x_3)(x_2-x_1)$$

$$=\frac{1}{2}(x_4-x_3)(x_4-x_1-x_2+x_3)$$

$$m-n=\frac{1}{2}(x_4-x_3)(x_4-x_1)+\frac{1}{2}(x_2-x_3)(x_2-x_1)$$

$$=\frac{1}{2}(x_4-x_3)(x_4-x_1+x_2-x_3)=(x_4-x_3)^2$$

因为 $AD>BC$ ，所以 $x_4-x_1>x_3-x_2$, 即 $x_4-x_3>0$，即 $m>n$

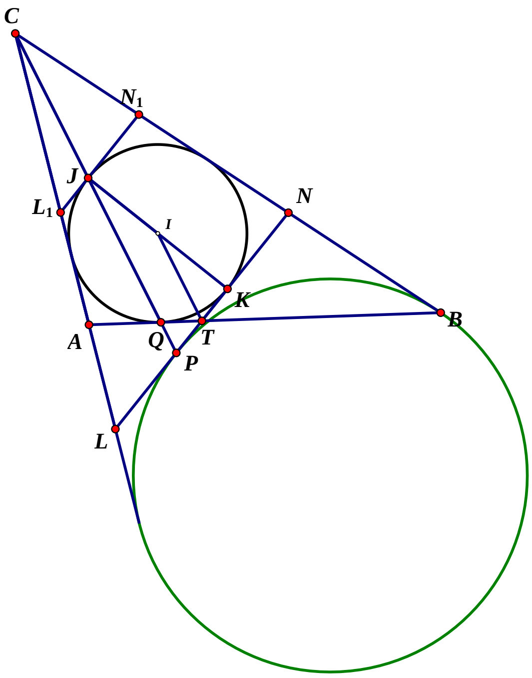
所以 $S=\frac{1}{2}(x_4-x_1+x_3-x_2)\cdot(m+n)=\frac{(m+n)^2}{x_4-x_3}=\frac{(m+n)^2}{\sqrt{m-n}}=\frac{(m+n)^2\sqrt{m-n}}{m-n}$

2011 年全国高中数学联赛冲刺模拟卷（5）加试

（时间：9：40-12：10）

学校：______________ 姓名：_________________ 成绩：_____________

一（40 分）、设 I 为非等腰锐角三角形 ABC 的内心， 内切圆与边 AB 交于一点 Q，T 为 AB 上一点，满足 $IT//CQ$，过 T 与内切圆相切于 k(不与 Q 重合)的直线与 CA、CB 分别交于 L、N．求证：LN 的中点为 T.



证明: 设 M_1 为 CQ 与 QI 的交点，连结 KQ, KM, 延长 CQ 交 LN 于 M，过 M_1 作 QI 的切线 L_1N_1 交 CA，CB 分别为 L_1, N_1.

由于 TQ T 均为 QI 的切线，故 $QK \perp IT$, 又 $CQ // IT$, 所以 $QK \perp CQ$ 即 M_1, K, I 三点共线． 又 $KI = IM_1$ 及 $IT // CQ$, 故 T 为的中点．即 $MT = TK.\cdots\cdots(1)$

又 L_1N_1, LN 均为 QI 的切线，所以 $L_1N_1 // LN$.

所以 ΔCL_1N_1 与 $\triangle CLN$ 关于点 C 位似，

而 M_1 为 $\triangle CL_1N_1$ 的旁切圆与 L_1N_1 的切点，故 M 为 $\triangle CLN$ 的旁切圆与 LN 的切点．所以 $LM = \frac{1}{2}(NC + NL - LC)$

又 $NK = \frac{1}{2}(NC + NL - LC)$ 故 $LM = NK \cdots\cdots(2)$

由 $(1),(2)$ 可知， $LT = TN$.

二（40 分）设非零实数 a，b，c(b>0)使得 $ax^2+bx-c=0$ 的两个根也是 $x^3+bx^2+ax-c=0$ 的根.

求证:$abc \geq \frac{3125}{108}$.

证明：设 x_1、x_2 为 $f(x)=ax^2+bx-c=0$， $g(x)=x^3+bx^2+ax-c=0$ 的两个不同根．则 $f(0)=g(0)=-c$ 不为 0．设 $F(x)=g(x)-f(x)$，则 F 有三个不同根 0，x_1，x_2．故 $F(x)=x(x-x_1)(x-x_2)$.

由韦达定理，$x_1+x_2=-(b-a)$，$x_1x_2=a-b$

以及 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ ，$x_1x_2=-\frac{c}{a}$ ，得到：$ab=a^2+b$，$ab=a^2+c$．从而，$a \geq 1$．当 a=1 时，由 $ab=a^2+b$ 得 a=0．所以， a>1．有 $b=\frac{a^2}{a-1}$ ，$c=b$，则 $abc=\frac{a^3}{(a-1)^2}$ ，a>1．该函数在 $a=\frac{5}{3}$ 时取最小值 $\frac{3125}{108}$.

三（50 分）设 $p\geq 3$ 的素数，r_j 为整数$\frac{j^{p-1}-1}{p}$ 被 p 除的余数，其中 $j=1$，2，…，$p-1$．证明：

$r_1+2r_2+\ldots+(p-1)r_{p-1}\equiv\frac{p+1}{2}\ (mod\ p)$

解：因为$(j，p)=1$，所以$\frac{j^{p-1}-1}{p}$ 为正整数．

设$\frac{j^{p-1}-1}{p}=a_jp+r_j$，$a_j$ 为整数，$j=1$，2，…，$p-1$．则

$\frac{j^p+(p-j)^p}{p}=ja_jp+jr_j+(p-j)a_{p-j}p+jr_j+(p-j)r_{p-j}+1$

另一方面，$j^p+(p-j)^p=C_p^0p^p-C_p^1p^{p-1}j+\ldots+C_p^{p-1}pj^{p-1}$ 及 $p|C_p^{p-1}$，故 $p^2|j^p+(p-j)^p$．所以．$Jr_j+(p-j)r_{p-j}+1\equiv 0(mod\ p)$．

$r_1+2r_2+\ldots+(p-1)r_{p-1}+（p-j）r_{p-j}$

$=2(r_1+2r_2+\ldots+(p-1)r_{p-1}\equiv-(p-1)(modp)$．

故 $r_1+2r_2+\ldots+(p-1)r_{p-1}\equiv\frac{p+1}{2}\ (mod\ p)$

四（50 分）对任意正整数 n，a_n 为满足$|x^2-y^2|=n$ 的（有序）整数对$(x，y)$的个数．求 a_n．

解：（1）当 n 为奇数时方程$|x^2-y^2|=n$ 等价于$|x-y||x+y|=n$．

设 d 是 n 的任意一个正因子，则$|x-y|=d$，$|x+y|=\frac{n}{d}$，其中 d，$\frac{n}{d}$ 均为正奇数．故方程组必有 4 组不同的整数解．则 $a_n=4t(n)$，其中 $t(n)$ 表示 n 的正因子个数．

（2）当 $n=4k+2$，k 为自然数．

由 $x^2-y^2\equiv-1$，0，1（mod 4）．故 $a_n=0$．

（3）当 $n=4k$ 时

设 $n=2^s(2m+1)$，$s>1$，m 为自然数．这时，$|x-y|=d$，$|x+y|=\frac{n}{d}$，d 是 n 的任意一个正因子．由于$|x-y|$，$|x+y|$同奇偶．当且仅当 $d|2m+1$，或$\frac{n}{d}|2m+1$ 时无整数解，其余均有 4 组不同的整数解．则 $a_n=4[t(n)-2t(2k+1)]$．

设 $n=2^sp_1^{a1}p_2^{a2}\ldots p_t^{at}$，其中 p_1，…，p_t 为奇素数，得到

$A_n=4[(s+1)(a_1+1)\ldots(a_t+1)-2(a_1+1)\ldots(a_t+1)]=4(s-1)(a_1+1)\ldots(a_t+1)=4t(\frac{n}{4})$．