

初中奥数

2. 设 a, b, c 为实数, 且 $|a| + a = 0$, $|ab| = ab$, $|c| - c = 0$, 求代数式 $|b| - |a+b| - |c-b| + |a-c|$ 的值.
3. 若 $m < 0, n > 0$, $|m| < |n|$, 且 $|x+m| + |x-n| = m+n$, 求 x 的取值范围.
4. 设 $(3x-1)^7 = a_7x^7 + a_6x^6 + \dots + a_1x + a_0$, 试求 $a_0 + a_2 + a_4 + a_6$ 的值.
5. 已知方程组

$$\begin{cases} x + y + z = k \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$
 有解, 求 k 的值.
6. 解方程 $2|x+1| + |x-3| = 6$.
7. 解方程组

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$
8. 解不等式 $||x+3| - |x-1|| > 2$.
9. 比较下面两个数的大小:
10. x, y, z 均是非负实数, 且满足:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 3 \\ 3x + 3y + z = 4 \end{cases}$$
 求 $u = 3x - 2y + 4z$ 的最大值与最小值.
11. 求 $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 1$ 除以 $x^2 + x + 1$ 的商式和余式.
19. 任意改变某三位数数码顺序所得之数与原数之和能否为 999? 说明理由.
20. 设有一张 8 行、8 列的方格纸, 随便把其中 32 个方格涂上黑色, 剩下的 32 个方格涂上白色. 下面对涂了色的方格纸施行“操作”, 每次操作是把任意横行或者竖列上的各个方格同时改变颜色. 问能否最终得到恰有一个黑色方格的方格纸?
21. 如果正整数 p 和 $p+2$ 都是大于 3 的素数, 求证: $6 | (p+1)$.
22. 设 n 是满足下列条件的最小正整数, 它们是 75 的倍数, 且恰有

23. 房间里凳子和椅子若干个, 每个凳子有 3 条腿, 每把椅子有 4 条腿, 当它们全被人坐上后, 共有 43 条腿(包括每个人的两条腿), 问房间里有多少人?

24. 求不定方程 $49x-56y+14z=35$ 的整数解.

25. 男、女各 8 人跳集体舞.

(1)如果男女分站两列;

(2)如果男女分站两列, 不考虑先后次序, 只考虑男女如何结成舞伴.

问各有多少种不同情况?

26. 由 1, 2, 3, 4, 5 这 5 个数字组成的没有重复数字的五位数中, 有多少个大于 34152?

27. 甲火车长 92 米, 乙火车长 84 米, 若相向而行, 相遇后经过 1.5 秒(s)两车错过, 若同向而行相遇后经 6 秒两车错过, 求甲乙两火车的速度.

28. 甲乙两生产小队共同种菜, 种了 4 天后, 由甲队单独完成剩下的, 又用 2 天完成. 若甲单独完成比乙单独完成全部任务快 3 天. 求甲乙单独完成各用多少天?

29. 一船向相距 240 海里的某港出发, 到达目的地前 48 海里处, 速度每小时减少 10 海里, 到达后所用的全部时间与原速度每小时减少 4 海里航行全程所用的时间相等, 求原来的速度.

30. 某工厂甲乙两个车间, 去年计划完成税利 750 万元, 结果甲车间超额 15% 完成计划, 乙车间超额 10% 完成计划, 两车间共同完成税利 845 万元, 求去年这两个车间分别完成税利多少万元?

31. 已知甲乙两种商品的原价之和为 150 元. 因市场变化, 甲商品降价 10%, 乙商品提价 20%, 调价后甲乙两种商品的单价之和比原单价之和降低了 1%, 求甲乙两种商品原单价各是多少?

32. 小红去年暑假在商店买了 2 把儿童牙刷和 3 支牙膏, 正好把带去的钱用完. 已知每支牙膏比每把牙刷多 1 元, 今年暑假她又带同样的钱去该商店买同样的牙刷和牙膏, 因为今年的牙刷每把涨到 1.68 元, 牙膏每支涨价 30%, 小红只好买 2 把牙刷和 2 支牙膏, 结果找回 4 角钱. 试问去年暑假每把牙刷多少钱? 每支牙膏多少钱?

33. 某商场如果将进货单价为 8 元的商品，按每件 12 元卖出，每天可售出 400 件，据经验，若每件少卖 1 元，则每天可多卖出 200 件，问每件应减价多少元才可获得最好的效益？

34. 从 A 镇到 B 镇的距离是 28 千米，今有甲骑自行车用 0.4 千米/分钟的速度，从 A 镇出发驶向 B 镇，25 分钟以后，乙骑自行车，用 0.6 千米/分钟的速度追甲，试问多少分钟后追上甲？

35. 现有三种合金：第一种含铜 60%，含锰 40%；第二种含锰 10%，含镍 90%；第三种含铜 20%，含锰 50%，含镍 30%。现各取适当重量的这三种合金，组成一块含镍 45% 的新合金，重量为 1 千克。

(1) 试用新合金中第一种合金的重量表示第二种合金的重量；

(2) 求新合金中含第二种合金的重量范围；

(3) 求新合金中含锰的重量范围。

答案

2. 因为 $|a| = -a$ ，所以 $a \leq 0$ ，又因为 $|ab| = ab$ ，所以 $b \leq 0$ ，因为 $|c| = c$ ，所以 $c \geq 0$ 。所以 $a+b \leq 0$ ， $c-b \geq 0$ ， $a-c \leq 0$ 。所以

原式 $= -b + (a+b) - (c-b) - (a-c) = b$ 。

3. 因为 $m < 0$ ， $n > 0$ ，所以 $|m| = -m$ ， $|n| = n$ 。所以 $|m| < |n|$ 可变为 $m + n > 0$ 。当 $x+m \geq 0$ 时， $|x+m| = x+m$ ；当 $x-n \leq 0$ 时， $|x-n| = n-x$ 。故当 $-m \leq x \leq n$ 时，

$$|x+m| + |x-n| = x+m-x+n = m+n.$$

4. 分别令 $x=1$ ， $x=-1$ ，代入已知等式中，得

$$a_0 + a_2 + a_4 + a_6 = -8128.$$

5. ②+③整理得

$$x=-6y, \quad ④$$

④代入①得 $(k-5)y=0$.

当 $k=5$ 时, y 有无穷多解, 所以原方程组有无穷多组解; 当 $k \neq 5$ 时, $y=0$, 代入②得 $(1-k)x=1+k$, 因为 $x=-6y=0$, 所以 $1+k=0$, 所以 $k=-1$.

故 $k=5$ 或 $k=-1$ 时原方程组有解.

$x \leq 3$ 时, 有 $2(x+1)-(x-3)=6$, 所以 $x=1$; 当 $x > 3$ 时, 有
, 所以应舍去.

7. 由 $|x-y|=2$ 得

$$x-y=2, \text{ 或 } x-y=-2,$$

所以

由前一个方程组得

$$|2+y| + |y| = 4.$$

当 $y < -2$ 时, $-(y+2)-y=4$, 所以 $y=-3$, $x=-1$; 当 $-2 \leq y < 0$ 时, $(y+1)-y=4$, 无解;
当 $y \geq 0$ 时, $(2+y)+y=4$, 所以 $y=1$, $x=3$.

同理, 可由后一个方程组解得

所以解为

解①得 $x \leq -3$; 解②得

$$-3 < x < -2 \text{ 或 } 0 < x \leq 1;$$

解③得 $x > 1$.

所以原不等式解为 $x < -2$ 或 $x > 0$. 9. 令 $a = 999911111$, 则

于是

显然有 $a > 1$, 所以 $A - B > 0$, 即 $A > B$.

10. 由已知可解出 y 和 z

因为 y, z 为非负实数, 所以有

$$u = 3x - 2y + 4z$$

11.

所以商式为 $x^2 - 3x + 3$, 余式为 $2x - 4$.

又

$$S_{\triangle EFD} = S_{\triangle BFG} - S_{\triangle FDG} = 4S_{\triangle BFD} - S_{\triangle FDG},$$

所以 $S_{\triangle EFGD} = 3S_{\triangle BFD}$.

设 $S_{\triangle BFD} = x$, 则 $S_{\triangle EFGD} = 3x$. 又在 $\triangle BCE$ 中, G 是 BC 边上的三等分点, 所以

$$S_{\triangle CEG} = S_{\triangle BCE},$$

从而

所以

$$S_{\triangle EFGD} = 3x + 2x = 5x,$$

所以

$$S_{\triangle BFD} : S_{\triangle EFGD} = 1 : 5.$$

由已知 $AC \parallel KL$, 所以 $S_{\triangle ACK} = S_{\triangle ACL}$, 所以

即 $KF=FL$.

$+b_1=9$, $a+a_1=9$, 于是 $a+b+c+a_1+b_1+c_1=9+9+9$, 即 $2(a+b+c)=27$, 矛盾!

20. 答案是否定的. 设横行或竖列上包含 k 个黑色方格及 $8-k$ 个白色方格, 其中 $0 \leq k \leq 8$. 当改变方格的颜色时, 得到 $8-k$ 个黑色方格及 k 个白色方格. 因此, 操作一次后, 黑色方格的数目“增加了” $(8-k)-k=8-2k$ 个, 即增加了一个偶数. 于是无论如何操作, 方格纸上黑色方格数目的奇偶性不变. 所以, 从原有的 32 个黑色方格(偶数个), 经过操作, 最后总是偶数个黑色方格, 不会得到恰有一个黑色方格的方格纸.

21. 大于 3 的质数 p 只能具有 $6k+1$, $6k+5$ 的形式. 若 $p=6k+1(k \geq 1)$, 则 $p+2=3(2k+1)$ 不是质数, 所以, $p=6k+5(k \geq 0)$. 于是, $p+1=6k+6$, 所以, $6 \mid (p+1)$.

22. 由题设条件知 $n=75k=3 \times 5^2 \times k$. 欲使 n 尽可能地小, 可设 $n=2^\alpha 3^\beta 5^\gamma (\beta \geq 1, \gamma \geq 2)$, 且有

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=75.$$

于是 $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$ 都是奇数, α , β , γ 均为偶数. 故取 $\gamma=2$. 这时

$$(\alpha+1)(\beta+1)=25.$$

所以

故 $(\alpha, \beta)=(0, 24)$, 或 $(\alpha, \beta)=(4, 4)$, 即 $n=20 \cdot 324 \cdot 52$

23. 设凳子有 x 只, 椅子有 y 只, 由题意得

$$3x+4y+2(x+y)=43,$$

$$\text{即 } 5x+6y=43.$$

所以 $x=5$, $y=3$ 是唯一的非负整数解. 从而房间里有 8 个人.

24. 原方程可化为

$$7x-8y+2z=5.$$

令 $7x-8y=t$, $t+2z=5$. 易见 $x=7t$, $y=6t$ 是 $7x-8y=t$ 的一组整数解. 所以它的全部整数解是

而 $t=1$, $z=2$ 是 $t+2z=5$ 的一组整数解. 它的全部整数解是

把 t 的表达式代到 x , y 的表达式中, 得到原方程的全部整数解是

25. (1)第一个位置有 8 种选择方法, 第二个位置只有 7 种选择方法, ..., 由乘法原理, 男、女各有

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$$

种不同排列. 又两列间有一相对位置关系, 所以共有 2×40320 种不同情况.

(2)逐个考虑结对问题.

与男甲结对有 8 种可能情况, 与男乙结对有 7 种不同情况, ..., 且两列可对换, 所以共有

$$2 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 80640$$

种不同情况.

26. 万位是 5 的有

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24(\text{个}).$$

万位是 4 的有

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24(\text{个}).$$

万位是 3, 千位只能是 5 或 4, 千位是 5 的有 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 个, 千位是 4 的有如下 4 个:

$$34215, 34251, 34512, 34521.$$

所以, 总共有

$$24+24+6+4=58$$

个数大于 34152.

27. 两车错过所走过的距离为两车长之总和, 即

$$92+84=176(\text{米}).$$

设甲火车速度为 x 米/秒, 乙火车速度为 y 米/秒. 两车相向而行时的速度为 $x+y$; 两车同向而行时的速度为 $x-y$, 依题意有

解之得

$$\text{解之得 } x=9(\text{天}), x+3=12(\text{天}).$$

$$\text{解之得 } x=16(\text{海里/小时}).$$

经检验, $x=16$ 海里/小时为所求之原速.

30. 设甲乙两车间去年计划完成税利分别为 x 万元和 y 万元. 依题意得

解之得

故甲车间超额完成税利

乙车间超额完成税利

所以甲共完成税利 $400+60=460$ (万元), 乙共完成税利 $350+35=385$ (万元).

31. 设甲乙两种商品的原单价分别为 x 元和 y 元, 依题意可得

由②有

$$0.9x+1.2y=148.5, \quad \textcircled{3}$$

由①得 $x=150-y$, 代入③有

$$0.9(150-y)+1.2y=148.5,$$

解之得 $y=45$ (元), 因而, $x=105$ (元).

32. 设去年每把牙刷 x 元, 依题意得

$$2 \times 1.68 + 2(x+1)(1+30\%) = [2x + 3(x+1)] - 0.4,$$

即

$$2 \times 1.68 + 2 \times 1.3 + 2 \times 1.3x = 5x + 2.6,$$

$$\text{即 } 2.4x = 2 \times 1.68,$$

所以 $x = 1.4$ (元).

若 y 为去年每支牙膏价格, 则 $y = 1.4 + 1 = 2.4$ (元).

33. 原来可获利润 $4 \times 400 = 1600$ 元. 设每件减价 x 元, 则每件仍可获利 $(4-x)$ 元, 其中 $0 < x < 4$. 由于减价后, 每天可卖出 $(400+200x)$ 件, 若设每天获利 y 元, 则

$$y = (4-x)(400+200x)$$

$$= 200(4-x)(2+x)$$

$$= 200(8+2x-x^2)$$

$$= -200(x^2-2x+1) + 200 + 1600$$

$$= -200(x-1)^2 + 1800.$$

所以当 $x=1$ 时, y 最大 $= 1800$ (元). 即每件减价 1 元时, 获利最大, 为 1800 元, 此时比原来多卖出 200 件, 因此多获利 200 元.

34. 设乙用 x 分钟追上甲, 则甲到被追上的地点应走了 $(25+x)$ 分钟, 所以甲乙两人走的路程分别是 $0.4(25+x)$ 千米和 $0.6x$ 千米. 因为两人走的路程相等, 所以

$$0.4(25+x) = 0.6x,$$

解之得 $x = 50$ 分钟. 于是

$$\text{左边} = 0.4(25+50) = 30(\text{千米}),$$

$$\text{右边} = 0.6 \times 50 = 30(\text{千米}),$$

即乙用 50 分钟走了 30 千米才能追上甲. 但 A, B 两镇之间只有 28 千米. 因此, 到 B 镇为止, 乙追不上甲.

35. (1)设新合金中, 含第一种合金 x 克(g), 第二种合金 y 克, 第三种合金 z 克, 则依题意有

(2)当 $x=0$ 时, $y=250$, 此时, y 为最小; 当 $z=0$ 时, $y=500$ 为最大, 即 $250 \leq y \leq 500$, 所以在新合金中第二种合金重量 y 的范围是: 最小 250 克, 最大 500 克.

(3)新合金中, 含锰重量为:

$$x \cdot 40\% + y \cdot 10\% + z \cdot 50\% = 400 - 0.3x,$$

而 $0 \leq x \leq 500$, 所以新合金中锰的重量范围是: 最小 250 克, 最大 400 克.

北京一对一家庭教师 NO. 1:天津人, 普通话标准, 擅长物理家教。高中期间曾参加市级物理竞赛, 并取得二等奖。市级数学竞赛三等奖。高考理综成绩较好, 290 分, 其中物理满分。在高中理科学习中总结了自己的一套高效地方法和思路。

北京一对一家庭教师 NO. 2:理科生, 高中毕业于人大附中实验班, 高考673分, 理综286分, 英语135分, 擅长于各科考试技巧与答题规范, 主要面向准备高考的高中家教, 希望以个人经验与能力帮助其提升考试分数。参与清华自主招生并获得30分加分, 无竞赛经验, 专攻于课本知识。

北京一对一家庭教师 NO. 3:中国农业大学农学与生物技术学院在校大二男生, 可教授初高中理科全科, 包括英语家教。大学主修课程为生物与化学类的课程, 对生物学科前沿知识了解比较多, 擅于启发学生兴趣。

文章来源: <http://www.caijj.com/fjxg/5053.html>