竞赛之窗

2004 年荆州市初中数学竞赛(初三)

一、选择题(每小题 5 分,共 30 分)

1. 若 n 满足 $(n-2\,004)^2+(2\,005-n)^2=1$,则 $(2\,005-n)(n-2\,004)$ 等于(　　).

(A) -1　(B) 0　(C) $\frac{1}{2}$　(D) 1

2. 如图 1,已知 $\angle CGE=120°$. 则 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=$(　　).

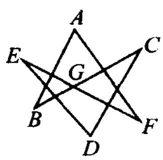

图 1

(A) 150°　(B) 210°

(C) 240°　(D) 270°

3. 设 x、y、z 均为正实数,且满足

$$\frac{z}{x+y}<\frac{x}{y+z}<\frac{y}{z+x}.$$

则 x、y、z 的大小关系是(　　).

(A) $z<x<y$　(B) $y<z<x$

(C) $x<y<z$　(D) $z<y<x$

4. 如图 2,两名滑冰运动员陈洁和李莉分别在平坦冰面上的点 A 和点 B. 点 A 和 B 之间的距离是 100 m,陈洁离开点 A 以 8 m/s 的速度沿着与 AB 成 60°角的直线滑行,在陈洁离开点 A 的同时,李莉以 7 m/s 的速度也沿着一条直线滑行离开点 B,这条直线能使这两名滑冰者在给定的速度下最早相遇. 则最早相遇的时间是(　　).

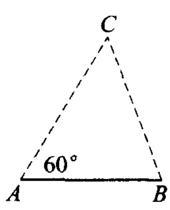

图 2

(A) 18 s　(B) 20 s　(C) 22 s　(D) $\frac{100}{3}$ s

5. 二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 图像的顶点在第一象限,且过点 $(0,1)$ 和点 $(-1,0)$. 则 $S=a+b+c$ 的值的变化范围是(　　).

(A) $0<S<1$　(B) $0<S<2$

(C) $1<S<2$　(D) $-1<S<1$

6. 方程组 $\begin{cases}x^2-5|x|+|y|=0,\\ y^2-5|y|+|x|=0\end{cases}$ 在实数范围内解的组数为(　　).

(A) 多于 5 组　(B) 5 组

(C) 3 组　(D) 1 组

二、填空题(每小题 5 分,共 30 分)

1. 已知 p、q 均为质数,且满足 $5p^2+3q=59$. 则 $p+q=$______.

2. 如图 3,G 是边长为 4 的正方形 $ABCD$ 的边 BC 上一点,矩形 $DEFG$ 的边 EF 过点 A,$GD=5$. 则 FG 的长为______.

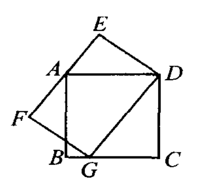

图 3

3. 若干名游客要乘坐汽车,要求每辆汽车坐的人数相等. 如果每辆汽车乘坐 30 人,那么,有一人未能上车;如果少一辆汽车,那么,所有游客正好能平均分到各辆汽车上. 已知每辆汽车最多容纳 40 人. 则有游客______人.

4. 已知 $\triangle ABC$ 是非等腰直角三角形,$\angle BAC=90°$,在 BC 所在直线上取两点 D、E 使 $DB=BC=CE$,联结 AD、AE. 已知 $\angle BAD=45°$. 那么,$\tan\angle CAE=$______.

5. 四条直线 $y=x+10$,$y=-x+10$,$y=x-10$,$y=-x-10$ 在平面直角坐标系中围成的正方形内(包含四边)整点的个数有______.(注:若 x、y 为整数,则 (x,y) 为整

点)

6. 如图 4,已知圆内接等边 $\triangle ABC$,在劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上有一点 P.若 AP 与 BC 交于点 D,且 $PB = 21$, $PC = 28$,则 $PD =$ ______.

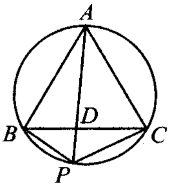

图 4

三、(15 分) 已知 k 是整数,且方程

$$x^2 + kx - k + 1 = 0$$

有两个不相等的正整数根. 求 k 的值.

四、(15 分) 某出版公司为一本畅销书定价如下:

$$C(n) = \begin{cases} 12n, & 1 \leq n \leq 24; \\ 11n, & 25 \leq n \leq 48; \\ 10n, & n \geq 49. \end{cases}$$

这里的 n 表示订购书的数量, $C(n)$ 是订购书所付的钱款数(单位:元).

(1) 有多少个 n,会出现买多于 n 本书比恰好买 n 本书所花的钱少?

(2) 若一本书的成本是 5 元,现有两个人来买书,每人至少买一本,两人共买 60 本,则出版公司最少能赚多少元? 最多能赚多少元?

五、(15 分) 如图 5,已知 AC、BD 是 $\odot O$ 的内接四边形 $ABCD$ 的对角线,且 BD 垂直平分半径 OC,在 AC 上取一点 P 使 $CP = OC$,联结 BP 并延长交 AD 于点 E、交 $\odot O$ 于点 F. 求证: PF 是 EF 和 BF 的比例中项.

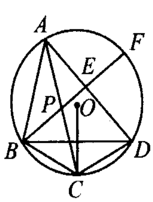

图 5

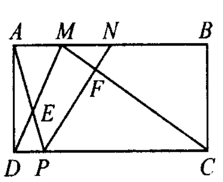

图 6

六、(15 分) 如图 6,已知矩形 $ABCD$, $AD = 2$, $DC = 4$, $BN = 2AM = 2MN$,点 P 在 CD 上移动, AP 交 DM 于点 E, PN 交 CM 于点 F,设四边形 $MEPF$ 的面积为 S. 求 S 的最大值.

参考答案

一、**1.** B.

设 $(2\,005 - n) = a$, $(n - 2\,004) = b$,则

$a + b = 1$, $a^2 + b^2 = 1$.

故 $ab = \dfrac{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}{2} = 0$.

2. C.

联结 AG,有

$\angle AGC = \angle B + \angle BAG$, $\angle AGE = \angle F + \angle FAG$.

则 $\angle B + \angle BAF + \angle F = \angle EGC = 120°$.

同理, $\angle C + \angle D + \angle E = \angle BGF = 120°$.

故 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F = 240°$.

3. A.

因为 x、y、z 为正实数,则有

$\dfrac{x+y}{z} > \dfrac{y+z}{x} > \dfrac{z+x}{y}$.

从而, $\dfrac{x+y+z}{z} > \dfrac{x+y+z}{x} > \dfrac{x+y+z}{y}$.

4. B.

过点 C 作 $CD \perp AB$ 于 D. 设满足题设的时间为 t s,则 $AC = 8t$, $BC = 7t$.

又 $\angle A = 60°$,有 $AD = 4t$, $CD = 4\sqrt{3}t$.

由勾股定理知

$(7t)^2 = (100 - 4t)^2 + (4\sqrt{3}t)^2$.

解得 $t = 20$ 或 $t = \dfrac{100}{3}$(舍).

5. B.

分别令 $x = 0$, $y = 1$ 和 $x = -1$, $y = 0$.

解得 $c = 1$, $a = b - 1$.

故 $S = a + b + c = 2b$.

由题设知 $-\dfrac{b}{2a} > 0$,且 $a < 0$,推知 $2b > 0$.

又由 $b = a + 1$ 及 $a < 0$ 推知 $2b < 2$.

故 $0 < S < 2$.

6. A.

设 $|x| = a$, $|y| = b$,则原方程组可化为

$$\begin{cases} a^2 - 5a + b = 0, \\ b^2 - 5b + a = 0. \end{cases}$$

两式相减并化为

$(a - b)(a + b - 6) = 0$.

则 $a - b = 0$ 或 $a + b - 6 = 0$.

由此可得

$\begin{cases} a^2-5a+b=0, \\ a-b=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a^2-5a+b=0, \\ a+b-6=0. \end{cases}$

由第一个方程组解得 $(a,b)=(0,0),(4,4)$.

由第二个方程组解得

$(a,b)=(3+\sqrt{3},3-\sqrt{3}),(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$.

因此,由 (a,b) 的第一组解推得 $(x,y)=(0,0)$;其他三组解可分别推得 4 组解.

所以,原方程组共有 13 组不同的实解.

二、1. 15.

由 $5p^2+3q$ 为奇数,知 p、q 必为一奇一偶. 又 p、q 均为质数,故 p、q 中有一个为 2.

若 q 为 2,则 $p^2=\frac{53}{5}$,不合题意,舍去;

若 p 为 2,则 $q=13$.

2. $\frac{16}{5}$.

联结 AG. 由

$S_{\triangle ADG}=\frac{1}{2}S_{\text{正方形}ABCD}=\frac{1}{2}S_{\text{长方形}DEFG}=8$,

则 $FG=\frac{16}{5}$.

注:还可利用 $\triangle AED \backsim \triangle GDC$ 求解.

3. 961.

设有 x 辆汽车,少一辆汽车后每辆车坐 y 人,则有

$30x+1=y(x-1)$.

从而, $y=\frac{30x+1}{x-1}=30+\frac{31}{x-1}$.

所以, $x=2$(不合题意), $x=32$.

因此,游客人数为 $30\times32+1=961$.

4. $\frac{1}{4}$.

如图 7,过 B、C 两点作 $BM \parallel AC$、$CN \parallel AB$ 分别交 AD、AE 于 M、N.

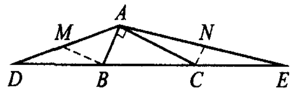

图 7

易知 $AC=2BM$, $AB=2CN$.

又 $\tan\angle BAD=\frac{BM}{AB}$, $\tan\angle CAE=\frac{CN}{AC}$,从而,

$\tan\angle BAD \cdot \tan\angle CAE=\frac{1}{4}$.

因为 $\tan\angle BAD=1$,则 $\tan\angle CAE=\frac{1}{4}$.

5. 221.

如图 8,分 4 个三角形考虑: $\triangle AOB$(仅不含边 BO), $\triangle BOC$(仅不含边 CO), $\triangle COD$(仅不含边 DO), $\triangle DOA$(仅不含边 AO). 每个三角形内所含整点的个数均为 $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$,再加上原点,共有 $55\times4+1=221$.

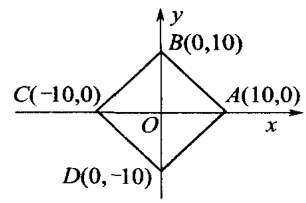

图 8

6. 12.

由 $\triangle ABD \backsim \triangle CPD$,知 $\frac{BD}{DP}=\frac{AB}{CP}$.

又由 $\triangle ACD \backsim \triangle BPD$,知 $\frac{DC}{DP}=\frac{AC}{BP}$.

两式相除得 $\frac{BD}{DC}=\frac{BP}{CP}=\frac{3}{4}$.

因为 $\triangle ABD \backsim \triangle CPD$,知 $\frac{PD}{BD}=\frac{CP}{AB}$. 所以,

$PD=\frac{BD}{AB}\cdot CP=\frac{BD}{BC}\cdot CP=\frac{3}{7}\times28=12$.

三、设方程 $x^2+kx-k+1=0$ 的两个不相等的正整数根为 a、b(不妨设 $a<b$). 于是,

$a+b=-k$, $ab=-k+1$.

消去 k 有 $ab-a-b=1$,即

$(a-1)(b-1)=2$.

只有 $a-1=1$, $b-1=2$,即 $a=2$, $b=3$.

故 $k=-5$.

四、(1) 由 $C(25)=275$, $C(24)=288$,

$C(23)=276$, $C(22)=264$,

有 $C(25)<C(23)<C(24)$.

由 $C(49)=490$, $C(48)=528$, $C(47)=517$,

$C(46)=506$, $C(45)=495$, $C(44)=484$,

有 $C(49)<C(45)<C(46)<C(47)<C(48)$.

共有 6 个 n(即 23,24,45,46,47,48),会出现买多于 n 本书比恰买 n 本所花的钱少.

(2) 设两人各购买 a 本和 b 本共付钱 S 元,不妨设 $a\leq b$. 由 $a+b=60$,知 $1\leq a\leq30$.

(i) $1\leq a\leq11$ 时, $49\leq b\leq59$,

$S=12a+10b=10(a+b)+2a=600+2a$,

则 $602\leq S\leq622$;

(ii) 当 $12\leq a\leq24$ 时, $36\leq b\leq48$,

$S=12a+11b=660+a$,

则 $672\leq S\leq684$;

(iii) 当 $25\leq a\leq30$ 时, $30\leq b\leq35$,则

$S=11a+11b=660$.

(下转第 36 页)

从而，$\angle OAH=\angle OAM=\angle OBM$.

在 $\triangle AHB$ 中，$\angle AHB=90°$，因此，

$\angle OAH+\angle OAM+\angle OBM=90°$.

这表明 $\angle A=\angle OAH+\angle OAM=60°$.

8.2. 同 6.4.

8.3. 用反证法.

假设所言不真.将所得到的 14 位数记为

$\overline{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}\cdots a_{14}}$，

而被删去的 0 位于 a_k 与 a_{k+1} 之间.由于该 14 位数是 81 的倍数，所以，恰好在 9 个数位上是 1，其余数位上是 0.这就意味着在 $a_{k+1},\cdots,a_{14}$ 中至多能有 8 个 1，从而，$\overline{a_{k+1}\cdots a_{14}}$ 不是 9 的倍数.

另一方面，却有

$10\cdot\overline{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}\cdots a_{14}}-\overline{a_1a_2\cdots a_k0a_{k+1}\cdots a_{14}}$

$=9\cdot\overline{a_{k+1}\cdots a_{14}}$，

该式左端是 81 的倍数，右端不是 81 的倍数，矛盾.

8.4. 为了确定面值为 k 匹亚斯特的硬币是否为假币，可以如同第 7.4 题那样进行有该枚硬币参与的 33 次称量，其中只需要其余各枚硬币参与不多于一次称量.例如，对于 $33<k\leqslant 66$，可以进行如下一些称量：

$(1)+(k)=(k+1)$，

$(2)+(k)=(k+2)$，

……

$(33)+(k)=(k+33)$；

对于其他的 k，不难写出相应的称量.如同第 7.4 题那样，如果面值为 k 匹亚斯特的硬币为假币，则其中有一多半不平衡；而如果为真币，则只有一小半不平衡.

8.5. $n=6$.

显然，n 不是质数，也不是完全平方数.令 $n=ab$，其中 a、b 是 n 的相异的正约数.将 n 的所有除了 n 之外的正约数的平方和记为 s.则 $s\geqslant a^2+b^2+1$.因为 $a\neq b$，所以，$a^2+b^2+1>2ab+1$.于是，

$s\geqslant a^2+b^2+1\geqslant 2ab+2=2n+2$.

当且仅当 a、b 都是质数，并且 $|a-b|=1$ 时，该式中的等号成立.

因此，a、b 只能是 2、3，从而，$n=6$.

8.6. 将每个罐头的价格表示为两个部分的和 $a+b$，其中 a 为"底价"，按 1 卢布/克计算；b 称为"附加价".由题意知，商店共有 1 吨罐头，它们的底价的总和刚好为 100 万卢布.而每听罐头的附加价不超过 300 卢布，故 1 994 听罐头的附加价总和少于 2 000 ×300 = 60 万卢布.所以，罐头的总价值少于 160 万卢布.

8.7. 同 7.7.

(上接第 24 页)

故出版公司最少赚 602 - 60 ×5 = 302 元，最多赚 684 - 60 ×5 = 384 元.

五、如图 9，联结 OB、AF.因为 BD 垂直平分半径 OC，则 $BO=BC$.

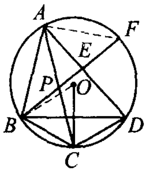

图 9

又 $OB=OC=CP$，所以，$CP=CB$.

从而，$\angle PBC=\angle BPC$.

由 $\angle PBD$

$=\angle PBC-\angle CBD$，

$\angle ABP=\angle BPC-\angle BAC$，

及已知 $OC\perp BD$，得到点 C 是劣弧 $\overset{\frown}{BD}$ 的中点.所以，

$\angle BAC=\angle DAC=\angle CBD$.

因此，$\angle PBD=\angle ABP$.

故点 P 为 $\triangle ABD$ 的内心.

于是，$\angle EAF=\angle ABF$，$\angle F=\angle F$.

所以，$\triangle AEF\backsim\triangle BAF$.从而，$AF^2=EF\cdot BF$.

又因为 $\angle FAP=\angle FAE+\angle CAD$，

$\angle FPA=\angle ABF+\angle BAC$，

由内心性质可知

$\angle CAD=\angle BAC$，$\angle FAE=\angle ABF$.

所以，$\angle FAP=\angle FPA$，$PF=AF$.

因此，$PF^2=EF\cdot BF$.

六、联结 PM.设 $DP=x$，则 $PC=4-x$.

因为 $AM\parallel DP$，所以，$\frac{PE}{EA}=\frac{DP}{AM}$.

于是，$\frac{PE}{PA}=\frac{DP}{DP+AM}$，即 $\frac{PE}{PA}=\frac{x}{x+1}$.

又 $\frac{S_{\triangle MEP}}{S_{\triangle APM}}=\frac{PE}{PA}$，且 $S_{\triangle APM}=\frac{1}{2}AM\cdot AD=1$，则

$S_{\triangle MPE}=\frac{x}{x+1}$.

同理，$S_{\triangle MPF}=\frac{4-x}{5-x}$.

故 $S=\frac{x}{1+x}+\frac{4-x}{5-x}=2-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{5-x}$

$=2-\frac{6}{-x^2+4x+5}=2+\frac{6}{(x-2)^2-9}$

$\leqslant 2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$.

当 $x=2$ 时，上式等号成立.

因此，S 的最大值为 $\frac{4}{3}$.

(陈子俊　王业胜　提供)