2004年重庆市初中数学竞赛初赛

一、选择题(每小题5分,共35分)

1. 自动门开启的连动装置如图1所示,$\angle AOB$为直角,滑杆AB为定长100 cm,端点A、B可分别在OA、OB上滑动.当滑杆AB的位置如图1所示时,$OA=80$ cm.若端点A向上滑动10 cm,则端点B滑动的距离( ).

(A)大于10 cm (B)等于10 cm

(C)小于10 cm (D)不能确定

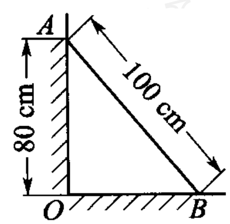

图1

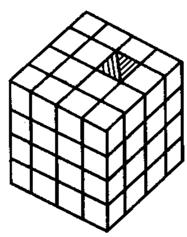

图2

2. 图2是由若干个小立方体组成的大立方体,阴影部位为空心的通道.若把这个大立方体的内外表面都染色,则只有一个面染色的小立方体有( )个

(A)16 (B)18 (C)20 (D)22

3. 用“▲”、“●”、“◆”分别表示三种物体的重量.如果$\dfrac{▲}{●}=\dfrac{●-◆}{▲}=\dfrac{◆}{●+▲}$,那么,▲、●、◆这三种物体的重量比为( ).

(A)$2∶3∶4$ (B)$2∶4∶3$

(C)$3∶4∶5$ (D)$2∶5∶4$

4. 已知实数a、b、c均不为零,且满足$a+b+c=0$.则

$$\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}$$

的值( ).

(A)为正 (B)为负 (C)为零

(D)与a、b、c的取值有关

5. 如图3,一块边长为5 cm的正方形钢板的一角被割去一个边长为1 cm的小正方形,一条直线把这块钢板分为面积相等的两部分.则这样的直线有( )条.

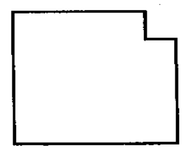

图3

(A)1 (B)3 (C)5 (D)无数

6. 某计算机系统在同一时间只能执行一项任务,且完成该任务后才能执行下一项任务.一项任务的相对等待时间为提交任务到完成该任务的时间与计算机系统执行该任务的时间之比.现有三项任务U、V、W,计算机系统执行的时间分别为1 s、3 s和5 s.现同时提交这三项任务,则使三项任务相对等待时间之和最小的执行顺序是( ).

(A) U、V、W (B) V、W、U

(C) W、U、V (D) U、W、V

7. 从小到大排列的11个两两不等的自然数$n_1,n_2,\cdots,n_{11}$,它们的和为2 005.那么,n_6的最大值为( ).

(A)328 (B)329 (C)330 (D)331

二、填空题(每小题5分,共35分)

1. 已知$x^2-2x-1=0$.则代数式

$$(x-1)^2-(x-3)(x+3)-(x-1)(x-3)$$

的值为______.

2. 如图4,在矩形$ABCD$中,E是BC上的一点,且$AB=2$,$AD=3$,$\angle ADB=\angle CDE$.则BE的长为______.

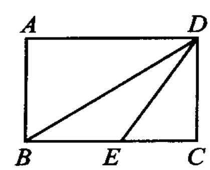

图4

3. $a_1=\dfrac{1}{1\times2\times3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}$,

$a_2=\dfrac{1}{2\times3\times4}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{3}{8}$,

$a_3 = \dfrac{1}{3\times4\times5} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{4}{15}$,

$a_4 = \dfrac{1}{4\times5\times6} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{5}{24}$,

……

按上述规律 $a_{999} =$______.

4. 在半径为 1 的 ⊙O 中,P 是 $\overset{\frown}{AB}$ 上的一点. 若 $\angle APB = \angle AOB$,则弦 AB 的长为______.

5. 上数学课时,老师给出一个一元二次方程 $x^2 + ax + b = 0$,并告诉学生,从数字 1、3、5、7 中随机抽取一个作为 a,从数字 0、4、8 中随机抽取一个作为 b,组成不同的方程共 m 个,其中有实数解的方程共 n 个. 则 $\dfrac{n}{m} =$______.

6. 如图 5,在 ▱$ABCD$ 中,对角线 $BD = 4\sqrt{3}$ cm,$\angle ADB = 30°$,将 $\triangle BCD$ 沿 BD 折叠,点 C 落在点 E 处,BE 与 AD 交于点 H. 若 $AH∶DH = 1∶2$,则 $S_{▱ABCD} =$______.

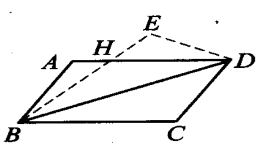

图 5

7. 若干个同样的盒子排成一排,小明把 50 多枚同样的棋子分装在盒子中,其中只留 1 个盒子是空的,然后他出去了. 小光进来后,从每个有棋子的盒子里各拿 1 枚棋子放在空盒子内,再把盒子重新排列一下. 待小明回来,仔细查看一遍,却没有发现有人动过棋子. 那么,这些棋子共有______枚.

三、解答题(共 50 分)

1. (16 分) 已知关于 x 的方程

$x^2 - (m^2 + 2m - 3)x + 2(m + 1) = 0$

的两个实数根互为相反数.

(1) 求实数 m 的值;

(2) 若关于 x 的方程 $x^2 - (k + m)x - 3m - k - 5 = 0$ 的根均为整数,求出所有满足条件的实数 k.

2. (16 分) 某仓库有 50 件同一规格的某种集装箱,准备委托运输公司送到码头. 运输公司有每次可装运 1 件、2 件、3 件这种集装箱的三种型号的货车,这三种型号的货车每次收费分别为 120 元、160 元、180 元. 现要求安排 20 辆货车刚好一次装运完这些集装箱. 问这三种型号的货车各需多少辆,有多少种安排方式?哪种安排方式所需的运费最少?最少运费是多少?

3. (18 分) 如图 6,在梯形 $ABCD$ 中,$AD \parallel BC$,$AB \perp BC$,$AD = 8$ cm,$BC = 16$ cm,$AB = 6$ cm. 动点 M、N 分别从点 B、C 同时出发,沿 BC、CD 方向在 BC、CD 上运动,点 M、N 运动的速度分别为 2 cm/s、1 cm/s.

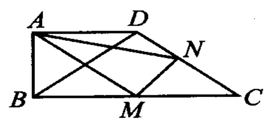

图 6

(1) 当点 M、N 运动了多少秒时,$MN \parallel BD$?

(2) 点 M 在边 BC 上运动时,设点 M 运动的时间为 t(s),是否存在某一时刻 t(s),使得 $\triangle AMN$ 的面积最小?若存在,请求出 t 的值;若不存在,请说明理由.

参 考 答 案

一、**1.** A **2.** B **3.** B **4.** C **5.** D **6.** A **7.** C

二、**1.** 6 **2.** $\dfrac{5}{3}$ **3.** $\dfrac{1\,000}{999\,999}$ **4.** $\sqrt{3}$ **5.** $\dfrac{7}{12}$ **6.** $12\sqrt{3}$ cm^2 **7.** 55

三、**1.** (1) 由题意知 $m^2 + 2m - 3 = 0$.

解得 $m = -3$,$m = 1$.

当 $m = -3$ 时,$\Delta = 16 > 0$;

当 $m = 1$ 时,$\Delta = -16 < 0$.

故实数 m 的值为 -3.

(2) 由(1) $m = -3$,则方程变为

$x^2 - (k - 3)x + 4 - k = 0$.

设方程的两个根为 x_1、x_2,有

$x_1 + x_2 = k - 3$,$x_1x_2 = 4 - k$.

则 $x_1x_2 + x_1 + x_2 = 1$,即

$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 2$.

又 x_1、x_2 是整数,所以,

$\begin{cases} x_1 + 1 = 1, \\ x_2 + 1 = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1 + 1 = -1, \\ x_2 + 1 = -2. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = -3. \end{cases}$

故 $k=4$ 或 $k=-2$.

2. 设需要装运 1 件、2 件、3 件集装箱的货车分别为 x 辆、y 辆、z 辆. 依题意得

$$\begin{cases} x+y+z=20, & ① \\ x+2y+3z=50. & ② \end{cases}$$

①×3 - ②得 $2x+y=10$.

则 $\begin{cases} y=10-2x, \\ z=10+x. \end{cases}$

因为 $y\geq 0$,所以,$0\leq x\leq 5$.

故 x 只能取 0、1、2、3、4、5. 共有

$$\begin{cases} x=0, \\ y=10, \\ z=10; \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ y=8, \\ z=11; \end{cases} \begin{cases} x=2, \\ y=6, \\ z=12; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3, \\ y=4, \\ z=13; \end{cases} \begin{cases} x=4, \\ y=2, \\ z=14; \end{cases} \begin{cases} x=5, \\ y=0, \\ z=15 \end{cases}$$

这六种安排方式.

设总运费为 w 元. 则

$w=120x+160y+180z$

$=120x+160(10-2x)+180(10+x)$

$=3\ 400-20x$.

当 $x=5$ 时,总运费最低,最低运费为

$w=3\ 400-20\times 5=3\ 300$ 元.

3. (1) 设点 M、N 运动了 x s 时,$MN\parallel BC$. 则

$BM=2x(\text{cm})$,$CM=16-2x(\text{cm})$,$CN=x(\text{cm})$.

又由已知可得 $BD=10(\text{cm})$.

过点 D 作 $DH\perp BC$ 于点 H,则 $BH=AD=8$.

故 $CH=8(\text{cm})$,$CD=BD=10(\text{cm})$.

因此,$DN=10-x(\text{cm})$.

当 $\frac{CM}{BM}=\frac{CN}{DN}$ 时,$MN\parallel BD$.

由 $\frac{16-2x}{2x}=\frac{x}{10-x}$,得 $x=\frac{40}{9}(\text{s})$.

(2) 存在.

$S_{\triangle AMN}=S_{梯形ABCD}-(S_{\triangle ABM}+S_{\triangle CMN}+S_{\triangle ADN})$

$=\frac{1}{2}(8+16)\times 6-\frac{1}{2}\times$

$\left[6\times 2t+(16-2t)\times\frac{3}{5}t+8\left(6-\frac{3}{5}t\right)\right]$

$=72-(6t+\frac{24}{5}t-\frac{3}{5}t^2+24-\frac{12}{5}t)$

$=\frac{3}{5}(t^2-14t)+48$

$=\frac{3}{5}(t-7)^2+\frac{93}{5}\ (0<t<8)$.

当 $t=7$ s 时,$S_{\triangle AMN}$ 最小,且最小值为 $\frac{93}{5}(\text{cm}^2)$.

(李开珂　提供)