

## 2013年首届“学数学” 数学奥林匹克邀请赛

### 第二试

<http://www.omaths.com>

2013年7月13日 9:40–12:10

#### 一. (本题满分40分)

如图1, 已知 $\triangle ABC$ 的外心为 $O$ , 其外接圆直径 $MN$ 分别交 $AB, AC$ 于点 $E, F$ .  $E, F$ 关于 $O$ 的对称点分别为 $E_1, F_1$ .

求证: 直线 $BF_1$ 与 $CE_1$ 的交点在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

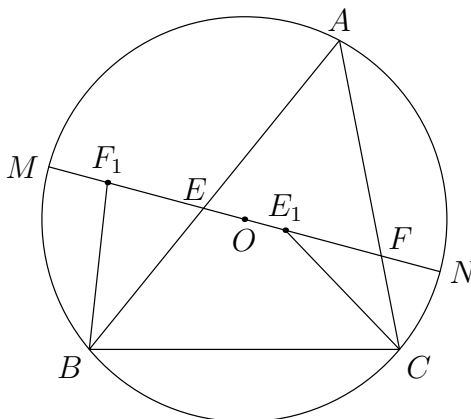


图 1

#### 二. (本题满分40分)

设 $M$ 为所有小于1000的正整数组成的集合.  $M$ 上的运算“ $\circ$ ”定义如下:

设 $a, b \in M$ , 若 $ab \in M$ , 则 $a \circ b = ab$ . 若 $ab \notin M$ , 设 $ab = 1000k + r$ , 其中 $k$ 为正整数,  $r$ 为非负整数, 且 $r < 1000$ . 当 $k + r \in M$ 时,  $a \circ b = k + r$ ; 当 $k + r \notin M$ 时, 再设 $k + r = 1000 + s$ ,  $a \circ b = s + 1$ .

例如,  $559 \times 297 = 166023$ , 所以 $559 \circ 297 = 166 + 23 = 189$ . 再如 $559 \times 983 = 549497$ ,  $549 + 497 = 1046$ , 所以 $559 \circ 983 = 1 + 46 = 47$ .

(1) 求 $559 \circ 758$ ;

(2) 求 $x \in M$ , 使得 $559 \circ x = 1$ ;

(3) 问: 该运算是否满足结合律? 即对于任意的 $a, b, c \in M$ , 是否一定有 $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ ? 如果成立, 请加以证明; 如果不成立, 请举出反例.

三. (本题满分50分)

已知正实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 与非负实数 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 满足

(a)  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + b_1 + b_2 + \dots + b_n = n$ ;

(b)  $a_1 a_2 \dots a_n + b_1 b_2 \dots b_n = \frac{1}{2}$ .

试求 $a_1 a_2 \dots a_n \left( \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n} \right)$ 的最大值.

四. (本题满分50分)

设实数 $a_1, a_2, \dots, a_{2013}$  (允许有相同的) 的算术平均值为 $m$ , 称满足

$$a_i + a_j + a_k \geq 3m \quad (i < j < k)$$

的 $\{i, j, k\}$ 为“优组”. 求优组个数的最小可能值.

## 欢迎2013年暑期“学数学” 数学竞赛及自主招生夏令营

### 数学竞赛高级研训班(限招60人)

时间: 2013年7月24日报到, 7月25日至8月4日授课

报到地点: 江苏镇江 江苏大学本部专家楼

### 数学竞赛专题班

时间: 2013年7月29日报到, 7月30日至8月7日授课

报到地点: 陕西西安 西安市高新一中高中部

### 自主招生强化班

时间: 2013年7月31日报到, 8月1日至8月10日授课

报到地点: 1. 陕西西安 西安市高新一中高中部 2. 江苏镇江 江苏大学本部专家楼

本次培训教练组: 单增 陈传理 苏淳 陶平生 林常 萧振纲 叶中豪 李昌勇  
杨颀 刘裕文 冯惠愚 周敏泽 顾滨等

详情请登录<http://www.omaths.com>查询.