2013年首届"学数学" 数学奥林匹克邀请赛
参考答案

第一试

http://www.omaths.com

2013年7月13日　　8:00–9:20

一. 填空题(本题满分64分, 每小题8分)

1. 已知函数

$$f(x)=x^2-2x,\ g(x)=\begin{cases} x-2, & x\geqslant 1,\\ -x, & x<1.\end{cases}$$

则不等式$f(x)\leqslant 3g(x)$的解集是____________.　　(安振平 供题)

解答 $[-1,0]\cup[2,3]$.

(法一) 因为$g(x)=|x-1|-1$, 所以不等式$f(x)\leqslant 3g(x)$等价于

$$x^2-2x\leqslant 3|x-1|-3,$$

这等价于

$$(x-1)^2\leqslant 3|x-1|-2,$$

即

$$|x-1|^2-3|x-1|+2\leqslant 0,$$

于是$1\leqslant|x-1|\leqslant 2$, 解得$-1\leqslant x\leqslant 0$或$2\leqslant x\leqslant 3$.

(法二) 原不等式等价于

$$\begin{cases} x^2-2x\leqslant 3(x-2),\\ x\geqslant 1,\end{cases} \text{或} \begin{cases} x^2-2x\leqslant -3x,\\ x<1.\end{cases}$$

解得$-1\leqslant x\leqslant 0$或$2\leqslant x\leqslant 3$.

2. 等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n, 若S_1, S_3, S_2成公比为q的等比数列, 则$q=$____________.　　(李　红 供题)

解答 $\dfrac{1\pm\sqrt{37}}{6}$.

根据题意, 知$S_3^2=S_1\cdot S_2$. 又$S_1=a_1$, $S_2=a_1+a_2$, $S_3=a_1+a_2+a_3=3a_2$, 则有

$$(3a_2)^2=a_1(a_1+a_2),$$

由此解得$a_2=\dfrac{1\pm\sqrt{37}}{18}a_1$, 因此,

$$q=\frac{S_3}{S_1}=\frac{3a_2}{a_1}=\frac{1\pm\sqrt{37}}{6}.$$

3. 满足关系式

$$(\sin 2x+\cos x)(\sin x-\cos x)=\cos x$$

的锐角$x=$___________ (用弧度表示) . (安振平 供题)

解答 $\frac{\pi}{3}$.

已知条件可变形为

$$(2\sin x+1)(\sin x-\cos x)=1. \qquad ①$$

因为当$0<x\leqslant\frac{\pi}{4}$时, 有$\sin x-\cos x\leqslant 0$, $2\sin x+1>0$, 此时式①不成立. 所以只能有$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$.

因为函数$y=2\sin x+1$, $y=\sin x$, $y=-\cos x$在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$上都是增函数, 且对$x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$, 有$\sin x-\cos x>0$. 所以, $f(x)=(2\sin x+1)(\sin x-\cos x)$在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$上是增函数, 而

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=(\sqrt{3}+1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)=1,$$

也就是说, 原方程可转化为$f(x)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, 所以$x=\frac{\pi}{3}$.

4. 用4块腰长为a, 上, 下底边长分别为a, $2a$的等腰梯形硬纸片, 和两块长和宽分别为$2a$和a的矩形硬纸片, 可以围成一个六面体, 则该六面体的体积为___________. (李 红 供题)

解答 $\frac{13}{12}\sqrt{2}a^3$.

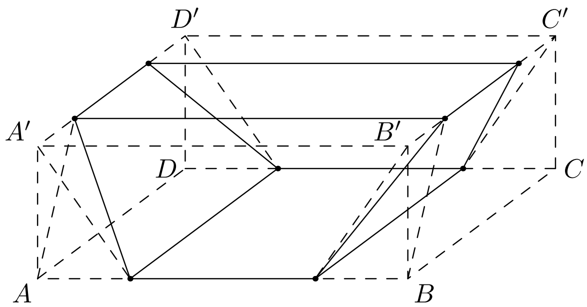

图 1

(法一) 如图1, 设长方体$ABCD-A'B'C'D'$中, $AB=BC=2a$, 高为x, 则$x=\sqrt{a^2-\left(\sqrt{2}\cdot\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$. 所求体积为

$$(2a)^2x-4\times\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot x\cdot 2a\right)+4\times\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{a}{2}\cdot x\cdot\frac{a}{2}\right)=x\cdot\frac{13}{6}a^2=\frac{13}{12}\sqrt{2}a^3.$$

(法二) 该四面体可分为如下3部分:

(1) 1个底面边长为a, 高为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$的正四棱柱, 其体积为$a\times a\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$;

(2) 4个底面为直角边长等于$\frac{1}{2}a$, $\frac{\sqrt{2}}{2}a$的直角三角形, 高为a的直三棱柱, 每个直三棱柱的体积为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a\times\frac{\sqrt{2}}{2}a\times a=\frac{\sqrt{2}}{8}a^3$;

(3) 4个底面为腰长等于$\frac{1}{2}a$的等腰直角三角形, 高为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$的三棱锥, 每个三棱锥的体积为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a\times\frac{1}{2}a\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{48}a^3$.

因此, 该六面体的体积为$\frac{\sqrt{2}}{2}a^3+4\times\frac{\sqrt{2}}{8}a^3+4\times\frac{\sqrt{2}}{48}a^3=\frac{13}{12}\sqrt{2}a^3$.

5. 已知$\odot O$的半径为1, 四边形$ABCD$为其内接正方形, EF为$\odot O$的一条直径, M为正方形$ABCD$边界上一动点, 则$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}$的最小值为__________. (杨 颙 供题)

解答 $-\dfrac{1}{2}$.

(法一) 易知$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=0$, $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AC}$. 不妨设点$M$在边$AD$ 上, 并设$\left|\overrightarrow{MA}\right|=t$, 则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}&=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AF}\right)\\&=\left|\overrightarrow{MA}\right|^2+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}\right)=\left|\overrightarrow{MA}\right|^2+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}\\&=t^2-\sqrt{2}t=\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\geqslant-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

其中, 等号当且仅当$t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时成立. 因此, $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}$的最小值为$-\dfrac{1}{2}$.

(法二) 由中线长公式, 得

$$\frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{ME}\right|^2+\left|\overrightarrow{MF}\right|^2\right)=\left|\overrightarrow{MO}\right|^2+\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{EF}\right|^2.$$

于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}&=\frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}\right|^2-\left|\overrightarrow{ME}\right|^2-\left|\overrightarrow{MF}\right|^2\right)\\&=2\left|\overrightarrow{MO}\right|^2-\left(\left|\overrightarrow{MO}\right|^2+\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{EF}\right|^2\right)\\&=\left|\overrightarrow{MO}\right|^2-1.\end{aligned}$$

易知当M为正方形$ABCD$的某条边的中点时, $\left|\overrightarrow{MO}\right|$取到最小值$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 因此, $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}$的最小值为$-\dfrac{1}{2}$.

(法三) 以O为原点, 建立如图2所示的平面直角坐标系, 其中, 边BC, AB分别与x, y轴平行. 设点E的坐标为(x,y), 则$F(-x,-y)$. 不妨设点M在边AD上, 点M 的坐标为$\left(t,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 易知

$$x^2+y^2=1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

易知$\overrightarrow{ME}=\left(x-t,y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{MF}=\left(-x-t,-y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 从而

$$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}=t^2+\frac{1}{2}-(x^2+y^2)=t^2-\frac{1}{2}\geqslant-\frac{1}{2}.$$

其中, 等号当且仅当$t=0$时成立. 因此, $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}$的最小值为$-\dfrac{1}{2}$.

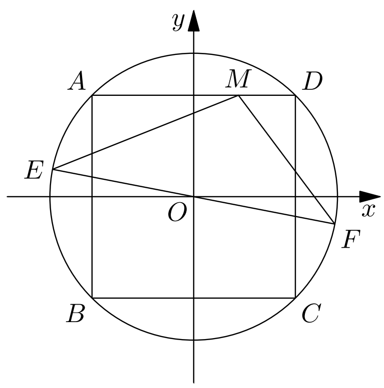

图 2

6. 过抛物线$y=x^2$上一点A作法线(法线是过切点且与切线垂直的直线) 与抛物线相交于另一点B, O为坐标原点.当$\triangle OAB$面积的取最小值时, 点A的纵坐标为__________. (刘凯峰 供题)

解答 $\dfrac{-3+\sqrt{33}}{24}$.

设$A(x_0,x_0^2)$, $B(x_1,x_1^2)$, 过点A且与抛物线$y=x^2$相切的直线的斜率为$2x_0$, 因此直线的斜率为$-\dfrac{1}{2x_0}$, 即

$$-\frac{1}{2x_0}=\frac{x_1^2-x_0^2}{x_1-x_0}=x_1+x_0,$$

得$x_1=-\dfrac{1}{2x_0}-x_0$.

易得直线AB的方程为$y-x_0^2=-\dfrac{1}{2x_0}(x-x_0)$, 与$y$轴的交点为$\left(0,x_0^2+\dfrac{1}{2}\right)$. 不妨设$x_0>0$, 则

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}(x_0-x_1)\cdot\left(x_0^2+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(2x_0+\frac{1}{2x_0}\right)\left(x_0^2+\frac{1}{2}\right).$$

考虑函数$f(x)=\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{2}\right)=2x^3+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{4x}$, 所以, $f'(x)=6x^2+\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{4x^2}$.

令$f'(x)=0$, 且令$t=x^2$, 则$6t+\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{4t}=0\Rightarrow 24t^2+6t-1=0$, 解得$t=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{24}$.

因此, 当$\triangle OAB$面积的取最小值时, 点A的纵坐标$x_0^2=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{24}$.

7. 若$n\in\mathbf{N}^*$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=$___________. (闫伟锋 供题)

解答 1.

由诱导公式, 知

$$\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=\sin^2[(\sqrt{n^2+n}-n)\pi]=\sin^2\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\pi\right).$$

因此

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\pi\right)\\=&\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\pi\right)=\sin^2\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\pi\right)\\=&\sin^2\frac{\pi}{2}=1.\end{aligned}$$

8. 甲乙两人各自独立地抛掷一枚均匀硬币, 甲抛掷10次, 乙抛掷11次. 则乙的硬币出现正面向上的次数比甲多的概率是___________. (甘志国 供题)

解答 $\dfrac{1}{2}$.

(法一) 设甲, 乙的硬币出现正面向上的次数分别是X, Y, 则$X\sim B\left(10,\dfrac{1}{2}\right)$, $Y\sim B\left(11,\dfrac{1}{2}\right)$. 因为

$$P(X=k)=\mathrm{C}_{10}^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k}=\frac{\mathrm{C}_{10}^k}{2^{10}}\ (k=0,1,\cdots,10),$$

$$P(Y=l)=\mathrm{C}_{11}^l\left(\frac{1}{2}\right)^l\left(\frac{1}{2}\right)^{11-l}=\frac{\mathrm{C}_{11}^l}{2^{11}}\ (l=0,1,\cdots,11).$$

从而所求概率

$$\begin{aligned}&P(Y>X)\\=&P(Y=1,X=0)+P(Y=2,X\leqslant 1)+P(Y=3,X\leqslant 2)+\cdots+P(Y=11,X\leqslant 10)\\=&\frac{1}{2^{21}}[\mathrm{C}_{11}^1\mathrm{C}_{10}^0+\mathrm{C}_{11}^2(\mathrm{C}_{10}^0+\mathrm{C}_{10}^1)+\mathrm{C}_{11}^3(\mathrm{C}_{10}^0+\mathrm{C}_{10}^1+\mathrm{C}_{10}^2)+\cdots+\mathrm{C}_{11}^{11}(\mathrm{C}_{10}^0+\mathrm{C}_{10}^1+\mathrm{C}_{10}^2+\cdots+\mathrm{C}_{10}^{10})]\\=&\frac{1}{2^{21}}(11\times 1+55\times 11+165\times 56+330\times 176+462\times 386+462\times 638\\&+330\times 848+165\times 968+55\times 1013+11\times 1023+1\times 1024)\\=&\frac{1048576}{2097152}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(法二) 考虑两人各抛掷硬币10次, 可能的情形有三种:

(a) 甲的硬币出现正面向上的次数比乙多;

(b) 甲乙两人的硬币出现正面向上的次数一样多;

(c) 乙的硬币出现正面向上的次数比甲多.

设情形(a) 发生的概率是p_1, 情形(b) 发生的概率是p_2, 则情形(c) 发生的概率也是p_1, 所以$2p_1+p_2=1$, 即$p_1+\frac{1}{2}p_2=\frac{1}{2}$.

此时, 由于总硬币抛掷次数为偶数, 因此, 两人的硬币出现正面向上的次数之差是偶数, 即两人的硬币出现正面向上的次数或者相等, 或者是一个人比另一个人至少多两次. 从而, 甲抛掷硬币10次, 乙抛掷硬币11次时, 事件“乙的硬币出现正面向上的次数比甲多” 等价于在两人各抛掷10次后, 情形(c) 发生, 或情形(b) 发生并且乙的第11次抛掷出现正面, 因此, 所求概率为$p_1+\frac{1}{2}p_2=\frac{1}{2}$.

二. 解答题(本题满分56分)

9. (16分)

设$\triangle ABC$的顶点A, B为椭圆Γ的两个焦点, 点C在椭圆Γ上, 椭圆Γ的离心率为e.

求证: $\dfrac{1+\cos A\cos B}{\sin A\sin B}=\dfrac{1+e^2}{1-e^2}$. (李　红 供题)

解答 (法一) 设$BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, 则

$$e=\frac{c}{a+b}=\frac{\sin C}{\sin A+\sin B}=\frac{\sin(A+B)}{\sin A+\sin B}=\frac{\cos\dfrac{A+B}{2}}{\cos\dfrac{A-B}{2}},$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{1+e^2}{1-e^2}&=\frac{\cos^2\dfrac{A-B}{2}+\cos^2\dfrac{A+B}{2}}{\cos^2\dfrac{A-B}{2}-\cos^2\dfrac{A+B}{2}}\\&=\frac{2+\cos(A-B)+\cos(A+B)}{\cos(A-B)-\cos(A+B)}\\&=\frac{2+2\cos A\cos B}{2\sin A\sin B}=\frac{1+\cos A\cos B}{\sin A\sin B}.\end{aligned}$$

(法二) 设$BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, 则$e=\dfrac{c}{a+b}$. 记$\triangle ABC$的面积为S.

根据余弦定理, 得

$$\frac{1+\cos A\cos B}{\sin A\sin B}=\frac{4abc^2+(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}{4abc^2\sin A\sin B}=\frac{4abc^2+c^4-(a^2-b^2)^2}{16S^2}.$$

由海伦–秦九韶公式, 知

$$16S^2=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2].$$

从而只需证明

$$\frac{4abc^2+c^4-(a^2-b^2)^2}{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}=\frac{(a+b)^2+c^2}{(a+b)^2-c^2},$$

此即

$$4abc^2+c^4-(a^2-b^2)^2=[c^2-(a-b)^2][c^2+(a+b)^2].$$

该式显然成立.

10. (20分)

设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n, 且$S_n=2n-a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2) 若数列$\{b_n\}$满足$b_n = 2^{n-1}a_n$, 求证: $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}<\frac{5}{3}$. (杨志明 供题)

解答 (1) (法一) 易求得$a_1 = 1$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{7}{4}$, $a_4 = \frac{15}{8}$. 由此猜想: $a_n = \frac{2^n-1}{2^{n-1}}$.
下面用数学归纳法证明.
当$n = 1$时, $a_1 = S_1 = 2 - a_1 \Rightarrow a_1 = 1$, 结论成立.
假设当$n = k$ $(k \in \mathbf{N}^*)$ 时结论成立, 即$a_k = \frac{2^k-1}{2^{k-1}}$, 则当$n = k+1$时, 由

$$a_{k+1} = S_{k+1} - S_k = (2(k+1) - a_{k+1}) - (2k - a_k) = 2 + a_k - a_{k+1},$$

得$2a_{k+1} = 2 + a_k$, 因此

$$a_{k+1} = \frac{2+a_k}{2} = \frac{2+\frac{2^k-1}{2^{k-1}}}{2} = \frac{2^{k+1}-1}{2},$$

这表明当$n = k+1$时, 结论成立.

综上所述, 数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n = \frac{2^n-1}{2^{n-1}}$.

(法二) 当$n = 1$时, $a_1 = S_1 = 2 - 2a_1$, 解得$a_1 = 1$.

当$n \geqslant 2$时, 有

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2n - a_n) - (2(n-1) - a_{n-1}) = 2 - a_n + a_{n-1},$$

即

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 1,$$

两边同时乘以2^n, 得

$$2^n a_n = 2^{n-1}a_{n-1} + 2^n,$$

于是

$$2^n a_n = 2a_1 + (2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) = 2^{n+1} - 2,$$

因此, $a_n = \frac{2^n-1}{2^{n-1}}$. 经检验, $a_1 = 1$也符合该式, 所以, 数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n = \frac{2^n-1}{2^{n-1}}$.

(法三) 同法二得到$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 1$, 于是

$$a_n - 2 = \frac{1}{2}(a_{n-1} - 2),$$

从而$\{a_n - 2\}$是以$a_1 - 2 = -1$为首项, $\frac{1}{2}$为公比的等比数列, 即$a_n - 2 = -\frac{1}{2^{n-1}}$, 因此, 数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2^n-1}{2^{n-1}}$.

(2) 由(1) 知, $b_n = 2^{n-1}a_n = 2^{n-1}\cdot\frac{2^n-1}{2^{n-1}} = 2^n - 1$. 于是, $\frac{1}{b_n} = \frac{1}{2^n-1}$. 从而

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}\\
= \;& \frac{1}{2-1}+\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{2^3-1}+\frac{1}{2^4-1}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}\\
< \;& \frac{1}{2-1}+\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{2^3-2}+\frac{1}{2^4-2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n-2^{n-2}}\\
= \;& \frac{1}{2-1}+\frac{1}{2^2-1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\right)\\
= \;& \frac{1}{2-1}+\frac{1}{2^2-1}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}\\
< \;& \frac{1}{2-1}+\frac{1}{2^2-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

11. (20分)

设I是区间$(0,+\infty)$上的一个子区间, $f(x)$是I上取值非负的函数.

任取x_1, $x_2\in I$, 若恒有$f(\sqrt{x_1\cdot x_2})\leqslant\sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)}$, 则称函数$f(x)$为$I$上的“几何凹函数”；若恒有$f(\sqrt{x_1\cdot x_2})\geqslant\sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)}$, 则称函数$f(x)$为$I$上的“几何凸函数”.

已知函数$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x-\left(\frac{1}{4}\right)^x$ $(x\in[1,+\infty))$. 试判断$f(x)$为$[1,+\infty)$上的几何凸函数还是几何凹函数, 并给出证明. (刘凯峰 供题)

解答 $f(x)$是$[1,+\infty)$上的几何凸函数.

证明如下.

对$f(x)$求导得$f'(x)=\ln\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-\ln\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x$.

而$f'(x)<0\Leftrightarrow\ln\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-\ln\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x<0\Leftrightarrow-\ln 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+\ln 4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x<0\Leftrightarrow\ln 4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x<\ln 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x\Leftrightarrow\frac{\ln 4}{\ln 3}<\left(\frac{4}{3}\right)^x$. 由$x\in[1,+\infty)$, 知$\frac{4}{3}\leqslant\left(\frac{4}{3}\right)^x$, 从而由$4^3<3^4$可知$\frac{\ln 4}{\ln 3}<\frac{4}{3}\leqslant\left(\frac{4}{3}\right)^x$, 所以$f'(x)<0$, 即$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

又当x_1, $x_2\in[1,+\infty)$时, 又均值不等式知$\sqrt{x_1x_2}\leqslant\frac{x_1+x_2}{2}$, 因此有

$$f(\sqrt{x_1\cdot x_2})\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right). \qquad ①$$

注意到由均值不等式有, $\left(\frac{1}{4}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{3}\right)^{x_2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{4}\right)^{x_2}\geqslant 2\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x_1+x_2}{2}}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x_1+x_2}{2}}$, 从而

$$\begin{aligned}
f^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)&=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x_1+x_2}{2}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x_1+x_2}{2}}\right]^2\\
&=\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1+x_2}+\left(\frac{1}{4}\right)^{x_1+x_2}-2\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x_1+x_2}{2}}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x_1+x_2}{2}}\\
&\geqslant\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1+x_2}+\left(\frac{1}{4}\right)^{x_1+x_2}-\left(\frac{1}{4}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{3}\right)^{x_2}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{4}\right)^{x_2}\\
&=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{x_1}\right]\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{x_2}-\left(\frac{1}{4}\right)^{x_2}\right]\\
&=\left[\sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)}\right]^2.
\end{aligned}$$

即

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)}. \qquad ②$$

由式①, ②可知

$$f(\sqrt{x_1\cdot x_2})\geqslant\sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)}.$$

因此$f(x)$为$[1,+\infty)$上的几何凸函数.