2011 年中国国家集训队选拔考试

中图分类号：G424.79 文献标识码：A 文章编号：1005-6416(2011)06-0023-05

1. 给定整数 $n(n\geqslant 3)$. 求最大的实数 M，使得对任意正实数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，都存在其一个排列 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，满足

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^2}{y_{i+1}^2-y_{i+1}y_{i+2}+y_{i+2}^2}\geqslant M,$$

其中，$y_{n+1}=y_1, y_{n+2}=y_2$.

2. 已知 $n(n>1)$ 为整数，k 是 n 的不同质因子的个数. 证明：存在整数 a $\left(1<a<\frac{n}{k}+1\right)$，使得 $n\mid(a^2-a)$.

3. 设简单图 G 的顶点数为 $3n^2(n\geqslant 2, n\in\mathbf{Z})$. 已知图 G 的每个顶点的度不超过 $4n$，至少有一个顶点的度为 1，且任意两个不同顶点之间都有一条长度不超过 3 的路径. 证明：图 G 边数的最小值为 $\frac{7}{2}n^2-\frac{3}{2}n$.

【注】图 G 的两个不同顶点 u、v 之间的一条长度为 k 的路径是指一个顶点序列 $u=v_0,v_1,\cdots,v_k=v$，其中，v_i 与 $v_{i+1}(i=0,1,\cdots,k-1)$ 相邻.

4. 如图 1，设 H 是锐角 $\triangle ABC$ 的垂心，P 是其外接圆弧 $\overparen{BC}$ 上一点，联结 PH 与弧 $\overparen{AC}$ 交于点 M，弧 $\overparen{AB}$ 上有一点 K，使得直线 KM 平行于点 P 关于 $\triangle ABC$ 的西姆松线，弦 $QP\parallel BC$，弦 KQ 与边 BC 交于点 J. 求证：$\triangle KMJ$ 是等腰三角形.

图 1

5. 设 $a_1,a_2,\cdots$ 为全体正整数的一个排列. 证明：存在无穷多个正整数 i，使得

$$(a_i,a_{i+1})\leqslant\frac{3}{4}i.$$

6. 直角坐标平面上的一个点列 $(A_0,A_1,\cdots,A_n)$，如果每个 A_i 的横、纵坐标都是正整数，直线 $OA_0,OA_1,\cdots,OA_n$ 的斜率严格递增（O 是原点），并且 $\triangle OA_iA_{i+1}(0\leqslant i\leqslant n-1)$ 的面积均为 $\frac{1}{2}$，则称该点列为"有趣的".

在一个点列 $(A_0,A_1,\cdots,A_n)$ 的某相邻两点 A_i、A_{i+1} 之间插入一个点 A，满足

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_{i+1}},$$

则称新点列 $(A_0,A_1,\cdots,A_i,A,A_{i+1},\cdots,A_n)$ 为原点列的一次"扩张".

设 $(A_0,A_1,\cdots,A_n)$ 与 $(B_0,B_1,\cdots,B_m)$ 是任意两个有趣点列. 证明：若 $A_0=B_0$，$A_n=B_m$，则可对两个点列分别作有限次扩张得到相同的点列.

参考答案

1. 令

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{x_{i+1}^2-x_{i+1}x_{i+2}+x_{i+2}^2}.$$

首先，取 $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=1, x_n=\varepsilon$，此时，所有排列在循环意义下是同一个，则

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=n-3+\frac{2}{1-\varepsilon+\varepsilon^2}+\varepsilon^2.$$

令 $\varepsilon\to 0^+$. 故上式 $\to n-1$.

于是，$M\leqslant n-1$.

其次证明：对任意的正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，都存在一个排列 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，满足

$$F(y_1,y_2,\cdots,y_n)\geqslant n-1.$$

事实上,取排列 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 满足

$y_1\geqslant y_2\geqslant\cdots\geqslant y_n$.

利用不等式

$a^2-ab+b^2\leqslant\max\{a^2,b^2\}$

对正实数 a、b 成立,可知

$$F(y_1,y_2,\cdots,y_n)\geqslant\frac{y_1^2}{y_2^2}+\frac{y_2^2}{y_3^2}+\cdots+\frac{y_{n-1}^2}{y_1^2}$$

$\geqslant n-1$.

最后一个不等式是均值不等式.

综上,$M=n-1$.

2. 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的标准分解.

由于 $p_1^{\alpha_k},p_2^{\alpha_k},\cdots,p_k^{\alpha_k}$ 两两互质,由中国剩余定理知,对每一个 $i(1\leqslant i\leqslant k)$,同余方程组

$$\begin{cases}x\equiv1(\bmod p_i^{\alpha_i}),\\x\equiv0(\bmod p_j^{\alpha_j}),j\neq i\end{cases}$$

有解 x_i.

对于满足 $x_0^2=x_0(\bmod n)$ 的任一个解 x_0,有

$x_0(x_0-1)\equiv0(\bmod n)$.

可见,对每个 $i(i=1,2,\cdots,k)$,有

$x_0\equiv0(\bmod p_i^{\alpha_i})$,

或 $x_0\equiv1(\bmod p_i^{\alpha_i})$.

又集合 $\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$ 的任一子集 A 的元素和 $S(A)$(特别地,$S(\varnothing)=0$)显然满足

$S(A)(S(A)-1)\equiv0(\bmod n)$.

这是因为由 x_i 的选取知,$S(A)$ 模 $p_i^{\alpha_i}$ 为 0 或 1.

又当 $A\neq A'$ 时,有

$S(A)\not\equiv S(A')(\bmod n)$.

故 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 的全部子集对应的和恰是 $x(x-1)\equiv0(\bmod n)$ 的全部解.

令 $S_0=n$,S_r 是

$x_1+x_2+\cdots+x_r(r=1,2,\cdots,k)$

模 n 的最小非负剩余. 则 $S_k=1$.

对一切 $r(1\leqslant r\leqslant k-1)$,$S_r\neq0$.

由于 $k+1$ 个数 $S_0,S_1,\cdots,S_k$ 均在 $[1,n]$ 中,由抽屉原理知,存在 l、$m(0\leqslant l<m\leqslant k)$,使得 S_l、S_m 在同一个区间 $\left(\frac{jn}{k},\frac{(j+1)n}{k}\right](0\leqslant j\leqslant k-1)$ 中,且 $l=0$ 与 $m=k$ 不同时成立.

于是,$|S_l-S_m|<\frac{n}{k}$.

记 $y_1=S_1$,$y_r=S_r-S_{r-1}(r=2,3,\cdots,k)$. 则 $y_r\equiv x_r(\bmod n)(r=1,2,\cdots,k)$ 中任意若干个之和满足要求.

若 $S_m-S_l>1$,则

$$a=y_{l+1}+y_{l+2}+\cdots+y_m=S_m-S_l\in\left(1,\frac{n}{k}\right)$$

是方程 $x^2-x\equiv0(\bmod n)$ 的解.

若 $S_m-S_l=1$,则

$$n\left|\left(\sum_{i=1}^{l}y_i+\sum_{i=m+1}^{k}y_i\right)\right.,$$

即 $$n\left|\left(\sum_{i=1}^{l}x_i+\sum_{i=m+1}^{k}x_i\right)\right..$$

注意到 $m>l$,这与 x_i 的定义相矛盾.

若 $S_m-S_l=0$,则

$n|(y_{l+1}+y_{l+2}+\cdots+y_m)$,

即 $n|(x_{l+1}+x_{l+2}+\cdots+x_m)$,

这也与 x_i 的定义相矛盾.

若 $S_m-S_l<0$,此时,

$$\begin{aligned}a&=\sum_{i=1}^{l}y_i+\sum_{i=m+1}^{k}y_i\\&=S_k-(S_m-S_l)\\&=1-(S_m-S_l)\end{aligned}$$

是方程 $x^2-x\equiv0(\bmod n)$ 的解,且

$1<a<1+\frac{n}{k}$.

综上,满足条件的 a 总存在.

3. 对任意两个不同顶点 u、v,如果它们之间的最短路径长度为 k,则称其之间的距离为 k.

考虑图 G,其顶点集为

$\{x_1,x_2,\cdots,x_{3n^2-n},y_1,y_2,\cdots,y_n\}$,

其中,y_i 与 $y_j(1\leqslant i<j\leqslant n)$ 相邻,x_i 与 $x_j(1\leqslant i<j\leqslant 3n^2-n)$ 不相邻,x_i 与 y_j 相邻当且仅当 $i\equiv j(\bmod n)$.

这样每个 x_i 的度等于 1,y_i 的度不超过

$$n-1+\frac{3n^2-n}{n}=4n-2.$$

易知,x_i 与 x_j 的距离不超过 3,图 G 符合条件,G 共有

$$N=3n^2-n+\mathrm{C}_n^2=\frac{7}{2}n^2-\frac{3}{2}n$$

条边.

下面证明:满足条件的图 $G=G(V,E)$ 的边数至少为 N.

设 $X\subseteq V$ 是所有度等于 1 的顶点的集合,$Y\subseteq(V\backslash X)$ 为剩余顶点中与 X 中某个顶点相邻的所有顶点的集合,$Z\subseteq V\backslash(X\cup Y)$ 为剩余顶点中与 Y 中某个顶点相邻的所有顶点的集合,$W=V\backslash(X\cup Y\cup Z)$.

接下来指出下面的事实.

性质 1 Y 中的任意两个顶点都相邻.

这是因为若 y_1、$y_2\in Y$ 是两个不同顶点,设 x_1、$x_2\in X$ 分别与 y_1、y_2 相邻,由 x_1 与 x_2 的距离不超过 3 可知 y_1 与 y_2 相邻.

性质 2 W 中的顶点与每个 Y 中的顶点的距离均为 2.

若不然,设 $w_0\in W$,$y_0\in Y$ 的距离不小于 3(距离显然不小于 2),设$x_0\in X$与 y_0 相邻. 则 w_0 与 x_0 的距离不小于 4,与题设矛盾. 性质 2 成立,并且由此可知,每个 W 中点都与某个 Z 中点相邻.

记 x、y、z、w 分别为集合 X、Y、Z、W 的元素个数. 计算边数,Y 之间的边恰好 C_y^2 条,X 到 Y 的边恰好 x 条,Z 到 Y 的边至少 z 条,W 到 Z 的边至少 w 条.

于是,当 $y\geqslant n$ 时,

$$|E|\geqslant\mathrm{C}_y^2+x+z+w=3n^2+\mathrm{C}_y^2-y$$
$$\geqslant3n^2+\mathrm{C}_n^2-n=N.$$

下设 $y\leqslant n-1$. 由于每个顶点的度不超过 $4n$,故

$$x+z\leqslant y[4n-(y-1)]=y(4n+1-y)$$
$$\leqslant(n-1)(3n+2)=3n^2-n-2,$$
$$w\geqslant3n^2-y-y(4n+1-y)\geqslant3.$$

在 W 中选取一点 P,使得 P 与集合 Z 中尽量少的顶点相邻. 设与 a 个集合 Z 中的顶点相邻,$a>0$(由性质 2 知),记这 a 个顶点的集合为 $N_P\subseteq Z$.

下面再计算边数,Y 之间的边恰好 C_y^2 条,从 X 到 Y 的边恰好 x 条,从 N_P 到 Y 中的边至少 y 条(这是由于性质 2,P 到每个集合 Y 中的顶点的距离等于 2),从 $Z\backslash N_P$ 到 Y 中的边至少 $z-a$ 条,从 W 到 Z 的边至少 aw 条. 于是,

$$|E|\geqslant\mathrm{C}_y^2+x+y+z-a+aw$$
$$=3n^2-1+\mathrm{C}_y^2+(a-1)(w-1).$$

若 $a>1$,则

$$|E|\geqslant3n^2-1+\mathrm{C}_y^2+w-1$$
$$\geqslant3n^2-2+\mathrm{C}_y^2+3n^2-y-y(4n+1-y)$$
$$>N.$$

若 $a=1$,以 aw 计算从 W 到 Z 的边时每个 W 中顶点的度被计算一次,由于每个 W 中的顶点的度至少为 2,故还至少有$\frac{1}{2}w$ 条边没有被计算,此时,

$$|E|\geqslant3n^2-1+\mathrm{C}_y^2+\frac{1}{2}w$$
$$\geqslant3n^2-1+\mathrm{C}_y^2+\frac{1}{2}[3n^2-y-y(4n+1-y)]$$
$$>N.$$

综上,图 G 边数的最小值为$\frac{7}{2}n^2-\frac{3}{2}n$.

4. 证明:$JK=JM$.

如图 2,过点 P 作 BC 的垂线,与外接圆交于点 S、与 BC 交于点 L,设 P 在 AB 上的投影为 N,联结 AS、NL、NP、BP.

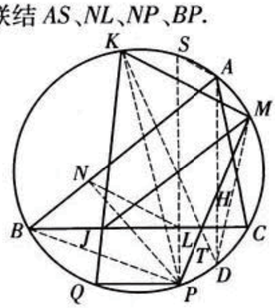

图 2

由 B、P、L、N 四点共圆知

$\angle SLN=\angle NBP=\angle ABP=\angle ASP$.

所以，$NL/\!/AS$.

又 $NL/\!/KM$，则 $KM/\!/SA$.

设 BC 与 PH 交于点 T，AH 与外接圆交于另一点 D.

由 K、Q、P、M 四点共圆及 $BC/\!/PQ$，知 K、J、T、M 四点共圆，联结 KT、TD.

则 $\angle JKM=\angle MTC$，

$\angle KMJ=\angle KTJ$.

故只需证 $\angle MTC=\angle KTJ$.

易知，点 D 与 H 关于直线 BC 对称. 则

$\angle SPM=\angle SPH=\angle THD=\angle HDT$.

又 $\overset{\frown}{KS}=\overset{\frown}{AM}$，则 $\angle ADM=\angle KPS$.

故 $\angle TDM=\angle HDT+\angle ADM$

$=\angle SPM+\angle KPS$

$=\angle KPM=\angle KDM$.

这表明 K、T、D 三点共线.

从而，$\angle KTJ=\angle DTC=\angle MTC$.

故 $\angle JKM=\angle KMJ$.

因此，$JK=JM$.

5. 假设结论不成立. 则存在 i_0，当 $i\geqslant i_0$ 时，有

$$(a_i,a_{i+1})>\frac{3}{4}i.$$

取定一个正整数 $M(M>i_0)$.

当 $i\geqslant 4M$ 时，有

$$(a_i,a_{i+1})>\frac{3}{4}i\geqslant 3M.$$

从而，$a_i\geqslant(a_i,a_{i+1})>3M$.

由于 $a_1,a_2,\cdots$ 是正整数的一个排列，则

$\{1,2,\cdots,3M\}\subseteq\{a_1,a_2,\cdots,a_{4M-1}\}$.

故 $|\{1,2,\cdots,3M\}\cap\{a_{2M},a_{2M+1},\cdots,a_{4M-1}\}|$

$\geqslant 3M-(2M-1)=M+1$.

由抽屉原理知，存在 $j_0(2M\leqslant j_0<4M-1)$，使得

a_{j_0}、$a_{j_0+1}\leqslant 3M$.

故 $(a_{j_0},a_{j_0+1})\leqslant\frac{1}{2}\max\{a_{j_0},a_{j_0+1}\}$

$\leqslant\frac{3M}{2}=\frac{3}{4}\times 2M\leqslant\frac{3}{4}j_0$，

矛盾.

所以，存在无穷多个 i，使得

$$(a_i,a_{i+1})\leqslant\frac{3}{4}i.$$

6. 由条件可知，一个有趣点列作一次扩张之后得到的点列仍是有趣的.

首先证明：存在一个有趣点列 $(C_0,C_1,\cdots,C_k)$，包含这两个点列中的所有点，且

$C_0=A_0=B_0$，$C_k=A_n=B_m$.

由皮克定理知，格点三角形的面积等于 $\frac{1}{2}$ 当且仅当其内部和边界上除顶点外无其他格点.

因为 $\triangle OA_iA_{i+1}$ 的面积等于 $\frac{1}{2}$，所以，在它的边界和内部除顶点外无其他整点.

特别地，线段 OA_i 的内部无整点.

同理，线段 OB_j 的内部也无整点.

从而，若直线 OA_i 和 OB_j 的斜率相等，则 $A_i=B_j$.

其次，将 A_i、B_j 中所有不同点按到原点的斜率严格递增记为 $D_0,D_1,\cdots,D_l$.

若点列 (D_i,D_{i+1}) 不是有趣的，则可以添加若干个点 $E_1,E_2,\cdots,E_s$，使得点列 $(D_i,E_1,E_2,\cdots,E_s,D_{i+1})$ 是有趣的.

事实上，如图 3，考虑 $\triangle OD_iD_{i+1}$ 的边界和内部除点 O 外的所有整点的凸包 P，它是一个凸多边形，或者是线段 D_iD_{i+1}（看作退化的凸多边形）.

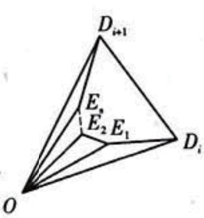

图 3

于是，P 的边界被 D_i、D_{i+1} 分成两部分，其中一部分即为线段 D_iD_{i+1}，将沿着另一部分边界从 D_i 到 D_{i+1} 依次经过的整点记为

$E_1, E_2, \cdots, E_s$，则 $D_i, E_1, E_2, \cdots, E_s, D_{i+1}$ 是一个有趣的序列.

于是,可在某些 D_i、D_{i+1} 之间添加若干个点，得到所要求的有趣点列$(C_0, C_1, \cdots, C_k)$.

最后证明：经过一系列的扩张，可从有趣点列$(A_0, A_1, \cdots, A_n)$变为有趣点列$(C_0, C_1, \cdots, C_k)$.

同理,也可从$(B_0, B_1, \cdots, B_m)$变为$(C_0, C_1, \cdots, C_k)$.

这只需证明 $n=1$ 时的情形.

事实上,对$(A_i, A_{i+1})(i=0,1,\cdots,n-1)$分别运用 $n=1$ 时的结论即可.

于是,设 $C_0 = A_0$，$C_k = A_1$.

下面对 k 归纳证明：可以经过一系列的扩张，从有趣点列(A_0, A_1)变为有趣点列$(C_0, C_1, \cdots, C_k)$.

当 $k=1$ 时,无需作任何扩张.

假设结论对小于 k 的所有正整数成立. 考虑 $k(k \geqslant 2)$时的情形.

记 A 为整点满足$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{OA_1}$. 则 A 必为 $C_1, C_2, \cdots, C_{k-1}$ 中某一点.

如若不然，由于线段 OA 内部无整点，存在 $i(0 \leqslant i < k)$使得点 A 落在由射线 OC_i 和 OC_{i+1} 所夹的角形区域内部.

不妨假设 $i>0$. 否则,可将整个图形关于直线 $x=y$ 作对称后再作讨论.

如图 4,由于平行四边形 OA_0AA_1 的面积为 1，故点 C_i 在平行四边形 OA_0AA_1 的外部，点 C_{i+1} 或者在这个平行四边形外部或者 $C_{i+1} = A_1$.

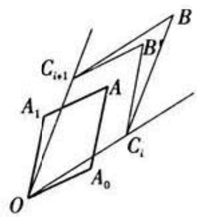

图 4

不论何种情形，取点 B 使得

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC_i} + \overrightarrow{OC_{i+1}},$$

取点 B' 使得 $C_{i+1}B' \parallel OA_0$，$C_iB' \parallel A_0A$. 则点 A 在四边形 $OC_{i+1}B'C_i$ 的内部或边界上.

于是,点 A 在平行四边形 OC_iBC_{i+1} 的内部，这与平行四边形 OC_iBC_{i+1} 的面积等于 1 矛盾.

因此,对(A_0, A_1)作一次扩张后所插入的点 A 是某个 C_i，对(A_0, A)和(A, A_1)分别用归纳假设即可.

（熊　斌　提供）

(上接第 4 页)

提示:联结 BO 并延长与 AD 交于点 H. 实质是等腰三角形与相似三角形的叠加. 答案:$1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

3. 如图 16,四边形 $ABCD$ 是边长为 a 的正方形. 以 D 为圆心、DA 为半径的圆弧与以 BC 为直径的半圆交于另一点 P,延长 AP 与 BC 交于点 N. 则 $\frac{BN}{NC}=$ ______.

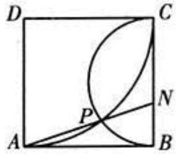

图 16

(2004,全国初中数学联赛)

提示:题中叠加和隐藏了两个圆相交、公切线、相似、射影这些基本图形,可延长 CP、DA 交于点 F,联结 BP. 答案:$\frac{1}{2}$.

4. 如图 17,若 $PA=PB$,$\angle APB = 2\angle ACB$,AC 与 PB 交于点 D,且 $PB=4$,$PD=3$,则 $AD \cdot DC$ 等于(　　)

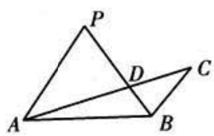

图 17

(A)6　　(B)7

(C)12　　(D)16

(2001,全国初中数学竞赛)

提示:由题意发现,可构造以 P 为圆心、PA 为半径的圆. 设 BP 与圆交于点 E. 则由相交弦定理得

$$AD \cdot DC = BD \cdot DE = 7.$$