2009年 IMO中国国家队选拔考试

第 一 天

1. 设 D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上一点,满足 $\angle CAD=\angle CBA$. $\odot O$ 经过点 B、D,并分别与线段 AB、AD 交于点 E、F,BF、DE 交于点 G,M 是 AG 的中点. 求证:$CM\perp AO$.

(熊 斌 供题)

2. 给定整数 $n(n\geq 2)$. 求具有下述性质的最大常数 $\lambda(n)$:若实数序列 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 满足 $0=a_0\leq a_1\leq\cdots\leq a_n$ 及

$$a_i\geq\frac{1}{2}(a_{i+1}+a_{i-1})\ (i=1,2,\cdots,n-1),$$

则 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} ia_i\right)^2\geq\lambda(n)\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$.

(朱华伟 供题)

3. 求证:对于任意的奇质数 p,满足 $p\mid(n!+1)$ 的正整数 n 的个数不超过 $cp^{\frac{2}{3}}$,这里,c 是一个与 p 无关的常数.

(余红兵 供题)

第 二 天

4. 设正实数 a、b 满足 $b-a>2$. 求证:对区间 $[a,b)$ 中任意两个不同的整数 m、n,总存在一个由区间 $[ab,(a+1)(b+1))$ 中某些整数组成的(非空)集合 S,使得 $\dfrac{\prod\limits_{x\in S}x}{mn}$ 是一个有理数的平方.

(余红兵 供题)

5. 设 m 是大于 1 的整数,n 是一个奇数且 $3\leq n<2m$. 数 $a_{i,j}(i、j\in\mathbf{N}, 1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n)$ 满足

(1)对于任意的 $j(1\leq j\leq n)$,$a_{1,j}, a_{2,j}, \cdots, a_{m,j}$ 是 $1,2,\cdots,m$ 的一个排列;

(2)对于任意的 i、$j(1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n-1)$,有 $|a_{i,j}-a_{i,j+1}|\leq 1$.

求 $M=\max\limits_{1\leq i\leq m}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,j}$ 的最小值.

(付云皓 供题)

6. 求证:在 40 个不同的正整数所组成的等差数列中,至少有一项不能表示成 $2^k+3^l(k、l\in\mathbf{N})$ 的形式.

(陈永高 供题)

参 考 答 案

第 一 天

1. 如图 1,联结 EF 并延长交 BC 于点 P,联结 GP 交 AD 于点 K,并交 AC 的延长线于点 L.

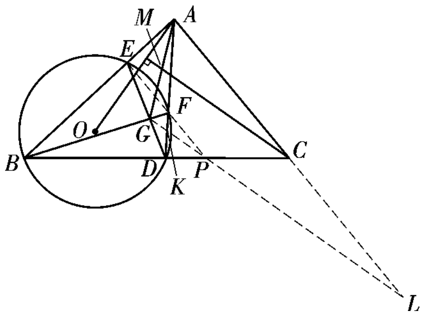

图 1

如图 2,在 AP 上取一点 Q,满足 $\angle PQF=\angle AEF=\angle ADB$.

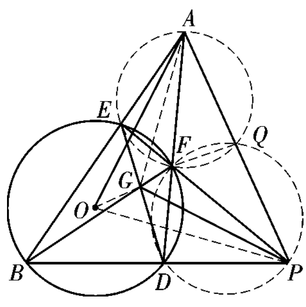

图 2

易知 A、E、F、Q 和 F、D、P、Q 分别四点共圆. 记 $\odot O$ 的半径为 r.根据圆幂定理知

$$AP^2=AQ\cdot AP+PQ\cdot AP$$
$$=AF\cdot AD+PF\cdot PE$$
$$=(AO^2-r^2)+(PO^2-r^2). \qquad ①$$

类似得

$$AG^2=(AO^2-r^2)+(GO^2-r^2). \qquad ②$$

由式①、②得 $AP^2-AG^2=PO^2-GO^2$.

于是,由平方差原理即知 $PG\perp AO$.

如图 3,对 $\triangle PFD$ 及截线 AEB 应用梅涅劳斯定理得

$$\frac{DA}{AF}\cdot\frac{FE}{EP}\cdot\frac{PB}{BD}=1. \qquad ③$$

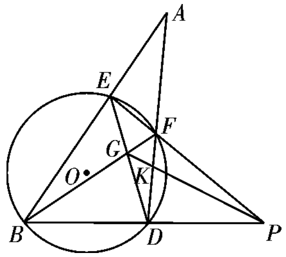

图 3

对 $\triangle PFD$ 及形外一点 G 应用塞瓦定理得

$$\frac{DK}{KF}\cdot\frac{FE}{EP}\cdot\frac{PB}{BD}=1. \qquad ④$$

③÷④即得

$$\frac{DA}{AF}=\frac{DK}{KF}. \qquad ⑤$$

式⑤表明 A 与 K、F 与 D 构成调和点列,即 $AF\cdot KD=AD\cdot FK$.

再代入点列的欧拉公式知

$$AK\cdot FD=AF\cdot KD+AD\cdot FK=2AF\cdot KD. \qquad ⑥$$

而由 B、D、F、E 四点共圆得

$$\angle DBA=\angle EFA.$$

又 $\angle CAD=\angle CBA$,故

$$\angle CAF=\angle EFA,$$

这表明 $AC\parallel EP$. 由此,

$$\frac{CP}{PD}=\frac{AF}{FD}. \qquad ⑦$$

在 $\triangle ACD$ 中,对于截线 LPK 应用梅涅劳斯定理得

$$\frac{AL}{LC}\cdot\frac{CP}{PD}\cdot\frac{DK}{KA}=1. \qquad ⑧$$

将式⑥、⑦代入上式即得 $\frac{AL}{LC}=2$.

最后,在 $\triangle AGL$ 中,由 M、C 分别是 AG、AL 的中点,知 MC 是其中位线,得 $MC\parallel GL$.

而已证 $GL\perp AO$,因此,$MC\perp AO$.

2 $\lambda(n)=\frac{n(n+1)^2}{4}$.

首先,令 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$. 得

$$\lambda(n)\le\frac{n(n+1)^2}{4}.$$

接下来证明:对任何满足条件的序列 $a_0,a_1,\cdots,a_n$,有不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}ia_i\right)^2\ge\frac{n(n+1)^2}{4}\sum_{i=1}^{n}a_i^2. \qquad ①$$

首先证明: $a_1\ge\frac{a_2}{2}\ge\cdots\ge\frac{a_n}{n}$.

事实上,由条件有 $2ia_i\ge i(a_{i+1}+a_{i-1})$ 对任意的 $i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 成立.

对于给定的正整数 $l(1\le l\le n-1)$,将此式对 $i(i=1,2,\cdots,l)$ 求和得

$$(l+1)a_l\ge la_{l+1},$$

即 $\frac{a_l}{l}\ge\frac{a_{l+1}}{l+1}$ 对任意的 $l(l=1,2,\cdots,n-1)$ 成立.

再证明:对于 i、j、$k\in\{1,2,\cdots,n\}$,若 $i>j$,则 $\frac{2ik^2}{i+k}>\frac{2jk^2}{j+k}$.

事实上,上式等价于

$$2ik^2(j+k)>2jk^2(i+k),$$

即 $(i-j)k^3>0$,显然成立.

现在证明式①.

对于 i、$j(1\le i<j\le n)$,来估计 a_ia_j 的下界.

由前述知 $\frac{a_i}{i}\ge\frac{a_j}{j}$,即

$$ja_i-ia_j\ge0.$$

因为 $a_i-a_j\le0$,所以,

$$(ja_i-ia_j)(a_j-a_i)\ge0,$$

即 $$a_ia_j\ge\frac{i}{i+j}a_j^2+\frac{j}{i+j}a_i^2.$$

这样有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}ia_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}i^2a_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}ija_ia_j$$
$$\ge\sum_{i=1}^{n}i^2a_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{i^2j}{i+j}a_j^2+\frac{ij^2}{i+j}a_i^2\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2\sum_{k=1}^{n}\frac{2ik^2}{i+k}\right).$$

记 $b_i=\sum_{k=1}^{n}\frac{2ik^2}{i+k}$.

由前面证明知 $b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_n$.

又 $a_1^2\leq a_2^2\leq\cdots\leq a_n^2$，由契比雪夫不等式有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2b_i\geq\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right).$$

因此，$\left(\sum_{i=1}^{n}ia_i\right)^2\geq\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)$.

$$\begin{aligned}\text{而}\sum_{i=1}^{n}b_i&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2ik^2}{i+k}\\&=\sum_{i=1}^{n}i^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\frac{i^2j}{i+j}+\frac{ij^2}{i+j}\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}i^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n}ij\\&=\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4},\end{aligned}$$

于是，$\left(\sum_{i=1}^{n}ia_i\right)^2\geq\frac{n(n+1)^2}{4}\sum_{i=1}^{n}a_i^2$.

故式①得证.

综上可知，$\lambda(n)=\frac{n(n+1)^2}{4}$.

3. 显然，符合要求的 n 应满足 $1\leq n\leq p-1$.

设这样的 n 的全体是

$$n_1<n_2<\cdots<n_k.$$

只须证明 $k\leq 12p^{\frac{2}{3}}$.

当 $k\leq 12$ 时，结论是显然成立的.

下设 $k>12$.

将 $n_{i+1}-n_i\ (1\leq i\leq k-1)$ 重排成不减的数列 $1\leq\mu_1\leq\mu_2\leq\cdots\leq\mu_{k-1}$. 则显然有

$$\sum_{i=1}^{k-1}\mu_i=\sum_{i=1}^{k-1}(n_{i+1}-n_i)$$

$$=n_k-n_1<p. \qquad ①$$

首先证明：对 $s\geq1$，有

$$|\{1\leq i\leq k-1:\mu_i=s\}|\leq s, \qquad ②$$

即等于给定的 s 的 μ_i 至多有 s 个.

事实上，设 $n_{i+1}-n_i=s$，则

$$n_i!+1\equiv n_{i+1}!+1\equiv0\pmod p.$$

由此知 $(p,n_i!)=1$.

故 $(n_i+s)(n_i+s-1)\cdots(n_i+1)\equiv1\pmod p$.

从而，n_i 是 s 次同余方程

$$(x+s)(x+s-1)\cdots(x+1)\equiv1\pmod p$$

的一个解.

又 p 是质数，由拉格朗日定理知，上述同余方程至多有 s 个解.

故满足 $n_{i+1}-n_i=s$ 的 n_i 至多只有 s 个值.

从而，式②得证.

再证明：对任意的正整数 l，只要 $\frac{l(l+1)}{2}+1\leq k-1$，就有 $\mu_{\frac{l(l+1)}{2}+1}\geq l+1$.

假设结论不成立，即 $\mu_{\frac{l(l+1)}{2}+1}\leq l$，则 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{\frac{l(l+1)}{2}+1}$ 都是 1 到 l 中的正整数.

而由式②知，在 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{\frac{l(l+1)}{2}+1}$ 中，1 至多出现 1 次，2 至多出现 2 次，……，l 至多出现 l 次，即从 1 到 l 的正整数总共至多出现 $1+2+\cdots+l=\frac{l(l+1)}{2}$ 次，这与 $\frac{l(l+1)}{2}+1$ 个数 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{\frac{l(l+1)}{2}+1}$ 都是不超过 l 的正整数矛盾.

设 m 是满足 $\frac{m(m+1)}{2}+1\leq k-1$ 的最大正整数. 则

$$\frac{m(m+1)}{2}+1\leq k-1<\frac{(m+1)(m+2)}{2}+1. \qquad ③$$

$$\begin{aligned}\text{故}\sum_{i=1}^{k-1}\mu_i&\geq\sum_{i=0}^{m-1}\left[\mu_{\frac{i(i+1)}{2}+1}+\mu_{\frac{i(i+1)}{2}+2}+\cdots+\mu_{\frac{(i+1)(i+2)}{2}}\right]\\&\geq\sum_{i=0}^{m-1}(i+1)\mu_{\frac{i(i+1)}{2}+1}\\&\geq\sum_{i=0}^{m-1}(i+1)^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}>\frac{m^3}{3}.\end{aligned}$$

由于 $k>12$，故 $m\geq4$.

因此，结合式①、③得

$$k<2+\frac{(m+1)(m+2)}{2}<4m^2$$

$$<4\left(3\sum_{i=1}^{k-1}\mu_i\right)^{\frac{2}{3}}<4(3p)^{\frac{2}{3}}.$$

这就证明了结论.

第 二 天

4. 先证明一个引理.

引理 设整数 u 满足 $a\le u<u+1<b$,则区间 $[ab,(a+1)(b+1))$ 中有两个不同整数 x、y,使得 $\frac{xy}{u(u+1)}$ 是一个整数的平方.

引理的证明:取 v 是大于或等于 $\frac{ab}{u}$ 的最小整数,即整数 v 满足

$$\frac{ab}{u}\le v<\frac{ab}{u}+1$$

$$\Rightarrow ab\le uv<ab+u(<ab+a+b+1). \quad ①$$

故 $ab<(u+1)v=uv+v<ab+u+\frac{ab}{u}+1$

$$<ab+a+b+1 \text{(因 } a\le u<b). \quad ②$$

这里,应用了一个熟知的事实,函数 $f(t)=t+\frac{ab}{t}(a\le t\le b)$ 在 $t=a$ 或 b 时取得最大值.

由式①、②知,uv 和 $(u+1)v$ 为区间 $I=[ab,(a+1)(b+1))$ 中的两个不同整数. 取 $x=uv$, $y=(u+1)v$,则 $\frac{xy}{u(u+1)}=v^2$ 是一个整数的平方.

回到原题.

设 $m<n$. 则 $a\le m\le n-1<b$.

由引理知,对于 $k=m,m+1,\cdots,n-1$,分别有区间 $[ab,(a+1)(b+1))$ 中的两个不同整数 x_k、y_k,都存在一个整数 A_k,使得

$$\frac{x_k y_k}{k(k+1)}=A_k^2.$$

将所有这些等式相乘得

$$\frac{\prod\limits_{k=m}^{n-1}x_k y_k}{mn(m+1)^2\cdots(n-1)^2}=\prod_{k=m}^{n-1}A_k^2$$

是一个整数的平方.

令 S 为 x_i、y_i $(m\le i\le n-1)$ 中出现奇数次的数的集合.

若 S 非空,则由上式易知,$\frac{\prod\limits_{x\in S}x}{mn}$ 是一个有理数的平方.

若 S 是空集,则 mn 是一个整数的平方.

而由 $a+b>2\sqrt{ab}$,知

$$ab+a+b+1>ab+2\sqrt{ab}+1,$$

即 $\sqrt{(a+1)(b+1)}>\sqrt{ab}+1$,

即区间 $[\sqrt{ab},\sqrt{(a+1)(b+1)})$ 中至少有一个整数. 故在区间 $[ab,(a+1)(b+1))$ 中至少有一个完全平方数.

设 $r^2\in[ab,(a+1)(b+1))$ $(r\in\mathbf{Z})$,令 $S'=\{r^2\}$. 则 $\frac{\prod\limits_{x\in S'}x}{mn}$ 是一个有理数的平方.

5. 令 $n=2l+1$.

由 $3\le n<2m$,得 $1\le l\le m-1$.

下面先估计 M 的下界.

由(1)知存在唯一的一个 i_0 $(1\le i_0\le m)$,使 $a_{i_0,l+1}=m$.

考虑 $a_{i_0,l}$ 与 $a_{i_0,l+2}$.

情形 1: $a_{i_0,l}$ 与 $a_{i_0,l+2}$ 中至少有一个为 m.

由对称性不妨设 $a_{i_0,l}=m$.

由(2)有

$$a_{i_0,l-1}\ge m-1,\ a_{i_0,l-2}\ge m-2,\ \cdots\cdots$$
$$a_{i_0,1}\ge m-l+1,$$

及 $a_{i_0,l+2}\ge m-1,\ a_{i_0,l+3}\ge m-2,\ \cdots\cdots$

$$a_{i_0,2l+1}\ge m-l$$

故 $M\ge\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i_0,j}$

$$\ge(m-l)+2[(m-l+1)+(m-l+2)+\cdots+m]$$
$$=(2l+1)m-l^2.$$

情形 2: $a_{i_0,l}$ 与 $a_{i_0,l+2}$ 都不为 m.

由(1)知存在 i_1 $(1\le i_1\le m,\ i_1\ne i_0)$,使 $a_{i_1,l}=m$.

由(1)、(2)易知

$$a_{i_1,l+1}=m-1,\ a_{i_1,l+2}=m.$$

再利用(2)有

$$a_{i_1,l-1}\ge m-1,\ a_{i_1,l-2}\ge m-2,\ \cdots\cdots$$
$$a_{i_1,1}\ge m-l+1,$$

及 $a_{i_1,l+3}\ge m-1,\ a_{i_1,l+4}\ge m-2,\ \cdots\cdots$

$$a_{i_1,2l+1}\ge m-l+1.$$

故 $M\ge\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i_1,j}$

$\geq 2[(m-l+1)+(m-l+2)+\cdots+m]+(m-1)$

$=(2l+1)m-(l^2-l+1)$.

综合情形1、2知 $M\geq(2l+1)m-l^2$.

另一方面,令

$a_{i,j}=f(2i+j)=2i+j(2i+j\leq m)$,

$a_{i,j}=f(2i+j)$

$=(2m+1)-(2i+j)(m+1\leq 2i+j\leq 2m)$,

$a_{i,j}=f(2i+j)$

$=(2i+j)-2m(2m+1\leq 2i+j\leq 3m)$,

$a_{i,j}=f(2i+j)=(4m+1)-(2i+j)$ $(3m+1\leq 2i+j\leq 4m)$.

于是,对于任意的 i、$j(1\leq i\leq m,1\leq j\leq n-1)$,若 $m\nmid(2i+j)$,则

$|a_{i,j}-a_{i,j+1}|$

$=|f(2i+j)-f(2i+j+1)|=1$;

若 $m\mid(2i+j)$,则

$|a_{i,j}-a_{i,j+1}|$

$=|f(2i+j)-f(2i+j+1)|=0$.

即(2)成立.

接下来证明(1)成立.

事实上,只须证明对任意的整数 $j(1\leq j\leq n)$及 $k(1\leq k\leq m)$,存在一个整数 $i(1\leq i\leq m)$,使得 $a_{i,j}=k$即可.

当 $j\equiv k\pmod 2$时,由 $1\leq j\leq n$, $1\leq k\leq m$及 $n<2m$,知 $-2m<k-j<m$.故

$$-m<\frac{k-j}{2}<m,$$

且$\frac{k-j}{2}$是一个整数.

因此,$\frac{k-j}{2}$与$\frac{k-j}{2}+m$至少有一个在集合$\{1,2,\cdots,m\}$中,取这个数为 i即可.

当 $j\not\equiv k\pmod 2$时,由 $1\leq j\leq n$, $1\leq k\leq m$及 $n<2m$,知

$-2m<(2m+1)-(j+k)<2m$.

因此,$-m<\frac{(2m+1)-(j+k)}{2}<m$,

且$\frac{(2m+1)-(j+k)}{2}$是一个整数.

故$\frac{(2m+1)-(j+k)}{2}$与$\frac{(2m+1)-(j+k)}{2}+m$至少有一个在集合$\{1,2,\cdots,m\}$中,取这个数为 i即可.

现在,估计此时的 M.

由于(1)成立,故对任意的 $1\leq i_1<i_2\leq m$, $1\leq j\leq n$,有

$f(2i_1+j)\neq f(2i_2+j)$,

即对于奇偶性相同且满足 $3\leq x<y\leq 2m+n$及 $y-x<2m$的整数 x、y,有

$f(x)\neq f(y)$.

因此,对于给定的 i, $a_{i,1}$, $a_{i,3}$, $\cdots$, $a_{i,2l+1}$两两不同,$a_{i,2}$, $a_{i,4}$, $\cdots$, $a_{i,2l}$两两不同.于是,

$$\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}$$

$\leq(m-l)+2[(m-l+1)+(m-l+2)+\cdots+m]$

$=(2l+1)m-l^2$.

此时,$M=\max\limits_{1\leq i\leq m}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,j}\leq(2l+1)m-l^2$.

综上,M的最小值为

$$(2l+1)m-l^2=mn-\left(\frac{n-1}{2}\right)^2.$$

6.假设存在一个各项不同且均能表示成 2^k+3^l形式的40项等差数列,设这个等差数列为 a, $a+d$, $a+2d$, $\cdots$, $a+39d$,其中,a、$d\in\mathbf{N}_+$.

设 $m=[\log_2(a+39d)]$,

$n=[\log_3(a+39d)]$,

其中,$[x]$表示不超过实数 x的最大整数.

首先证明:$a+26d$, $a+27d$, $\cdots$, $a+39d$中至多有一个不能表示成 2^m+3^l或 2^k+3^n $(k、l\in\mathbf{N})$的形式.

若 $a+26d$, $a+27d$, $\cdots$, $a+39d$中的某一个 $a+hd$不能表示成 2^m+3^l或 2^k+3^n的形式,由假设,一定存在非负整数 b、c,使得 $a+hd=2^b+3^c$.

由 m、n的定义知 $b\leq m$, $c\leq n$.

又因为 $a+hd$不能表示成 2^m+3^l或 2^k+3^n的形式,所以,$b\leq m-1$, $c\leq n-1$.

若 $b\leq m-2$,则

$$a+hd\leq 2^{m-2}+3^{n-1}=\frac{1}{4}\times 2^m+\frac{1}{3}\times 3^n$$

$$\leq\frac{7}{12}(a+39d)<a+26d,$$

矛盾;

若 $c\leq n-2$,则

$$a+hd\leq 2^{m-1}+3^{n-2}=\frac{1}{2}\times 2^m+\frac{1}{9}\times 3^n$$

2008年全国高中数学联赛甘肃赛区预赛

1. 设 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{x}{2}\mathrm{i}\right)^{2008}=f(x)+\mathrm{i}\,g(x)$ ($f(x)$、$g(x)$均为实系数多项式). 则 $f(x)$的系数之和是( ).

(A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

2. 方程 $10\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=x$ 的根的个数为( ).

(A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5

3. 六个家庭依次编号为 1、2、3、4、5、6. 每家三人,大家一起聚会做游戏,游戏按每组三人依次进行. 那么,同一组的成员来自不同家庭的概率为( ).

(A) $\frac{5}{68}$ (B) $\frac{15}{68}$ (C) $\frac{45}{68}$ (D) $\frac{5}{204}$

4. 已知 $f(x)=ax^3+x^2+x+d$ 满足 a、d 为实数,当 $|x|\le 1$ 时,$|f(x)|\le 1$. 则 a、d 一定属于( ).

(A) $[-2,0]$ (B) $[0,2]$

(C) $[-1,0]$ (D) $[0,1]$

5. 设 $A=\{x|1\le x\le 9, x\in \mathbf{Z}\}$,

$B=\{(a,b)|a、b\in A\}$,

定义 B 到 $\mathbf{Z}$ 的映射

$f:(a,b)\to ab-a-b$.

则满足 $(a,b)\xrightarrow{f}11$ 的有序数对共有( )对.

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 12

6. 若实数 x、y 满足

$(x-3)^2+4(y-1)^2=4$,

则 $\frac{x+y-3}{x-y+1}$ 的最大值和最小值是( ).

(A) 1, 0 (B) 0, -1

(C) 1, -1 (D) $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$

二、填空题(每小题 9分,共 54分)

7. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_{17}=170$, $a_{2000}=2001$. 则 $S_{2008}=$______.

8. 设 z 是复数,且 $|z|=1$. 则 $u=|z^2-z+1|$ 的最大值与最小值是______.

9. 已知函数

$f(x)=\cos^2\theta x+\cos\theta x\cdot\sin\theta x$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$. 则 $\theta f(x)$ 的最大值是______.

$$\le\frac{11}{18}(a+39d)<a+26d,$$

矛盾.

因此,只有 $b=m-1$, $c=n-1$, 即 $a+26d$, $a+27d$, $\cdots$, $a+39d$ 中至多有一个不能表示成 2^m+3^l 或者 2^k+3^n 的形式.

所以,这 14个数中至少有 13个可以写成 2^m+3^l 或者 2^k+3^n 的形式.

由抽屉原理,至少有 7个数可表示为同一种形式.

下面分两种情形.

(1)有 7个数可表示成 2^m+3^l 的形式.

设它们为 $2^m+3^{l_1}$, $2^m+3^{l_2}$, $\cdots$, $2^m+3^{l_7}$ ($l_1<l_2<\cdots<l_7$). 则 3^{l_1}, 3^{l_2}, $\cdots$, 3^{l_7} 是某个公差为 d 的 14项等差数列中的 7项. 但

$$13d\ge 3^{l_7}-3^{l_1}\ge\left(3^5-\frac{1}{3}\right)\times 3^{l_2}$$
$$>13(3^{l_2}-3^{l_1})\ge 13d,$$

矛盾.

(2)有 7个数可表示成 2^k+3^n 的形式.

设它们为 $2^{k_1}+3^n$, $2^{k_2}+3^n$, $\cdots$, $2^{k_7}+3^n$ ($k_1<k_2<\cdots<k_7$). 则 2^{k_1}, 2^{k_2}, $\cdots$, 2^{k_7} 是某个公差为 d 的 14项等差数列中的 7项. 但

$$13d\ge 2^{k_7}-2^{k_1}\ge\left(2^5-\frac{1}{2}\right)\times 2^{k_2}$$
$$>13(2^{k_2}-2^{k_1})\ge 13d,$$

矛盾.

综上,假设不成立. 故原题得证.

(朱华伟 提供)