2008 中国国家集训队选拔考试

第 一 天

一、在 $\triangle ABC$ 中，$AB > AC$，它的内切圆切边 BC 于点 E，联结 AE 交内切圆于点 D（不同于点 E）. 在线段 AE 上取异于点 E 的一点 F，使得 $CE = CF$，联结 CF 并延长交 BD 于点 G. 求证：$CF = FG$. （熊　斌　提供）

二、数列$\{x_n\}$定义为

$$x_1 = 2,\ x_2 = 12,$$

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n\ (n = 1, 2, \cdots).$$

设 p 是一个奇质数，q 是 x_p 的一个质因子. 证明：若 $q \neq 2, 3$，则 $q \geq 2p - 1$.

（余红兵　提供）

三、将每个正整数任意染红、蓝两色之一. 证明：总存在一个无穷的正整数序列 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$，使得无穷序列

$$a_1, \frac{a_1 + a_2}{2}, a_2, \frac{a_2 + a_3}{2}, a_3, \frac{a_3 + a_4}{2}, \cdots$$

是一个同色的正整数序列. （冷岗松　提供）

第 二 天

四、证明：对任意正整数 $n\ (n \geq 4)$，可以将集合 $G_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的元素个数不小于 2 的子集排成一列 $P_1, P_2, \cdots, P_{2^n - n - 1}$，使得

$$|P_i \cap P_{i+1}| = 2\ (i = 1, 2, \cdots, 2^n - n - 2).$$

（刘诗雄　提供）

五、设 m、n 都是大于 1 的给定整数，a_{ij} $(i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m)$ 是不全为 0 的 mn 个非负实数. 求

$$f = \frac{n\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right)^2 + m\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right)^2 + mn\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2}$$

的最大值和最小值. （朱华伟　提供）

六、求最大的常数 $M\ (M > 0)$，使得对任意正整数 n，存在正实数数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 及 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 满足

(1) $\sum_{k=1}^{n} b_k = 1$，

$2b_k \geq b_{k-1} + b_{k+1}\ (k = 2, 3, \cdots, n - 1)$；

(2) $a_k^2 \leq 1 + \sum_{i=1}^{k} a_i b_i\ (k = 1, 2, \cdots, n,\ a_n = M)$.

（李伟固　提供）

参 考 答 案

第 一 天

一、如图 1，过点 D 作内切圆的切线 MNK，分别交 AB、AC、BC 于点 M、N、K.

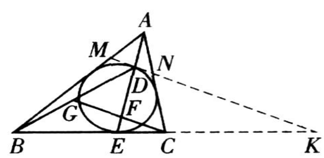

图 1

由 $\angle KDE = \angle AEK = \angle EFC$，知 $MK \parallel CG$.

由牛顿定理知 BN、CM、DE 三线共点.

由塞瓦定理有

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1. \qquad ①$$

由梅涅劳斯定理有

$$\frac{BK}{KC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1. \qquad ②$$

①÷②得 $BE \cdot KC = EC \cdot BK$. ③

由梅涅劳斯定理和式 ③有

$$1 = \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FG} \cdot \frac{GD}{DB} = \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FG} \cdot \frac{KC}{BK} = \frac{CF}{FG}.$$

所以，$CF = FG$.

二、易知

$$x_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}[(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n](n\geq 1).$$

设 a_n、$b_n\in\mathbf{N}_+$.

定义 $(3+2\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$. 则

$$(3-2\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}.$$

易知 $x_n=b_n$, $a_n^2-2b_n^2=1(n\geq 1)$.

设 $q\neq 2,3$.

下面证明: $q\geq 2p-1$.

由于 $q|x_p$, 即 $q|b_p$, 从而, 数列 $\{b_n\}$ 中有被 q 整除的项. 设 d 为最小的正整数, 使得 $q|b_d$. 有下面的引理.

引理　对正整数 n, 当且仅当 $d|n$ 时, 有 $q|b_n$.

引理的证明: 对整数 a、b、c、d, 用记号

$$a+b\sqrt{2}\equiv c+d\sqrt{2}\pmod q$$

表示 $a\equiv c\pmod q$, $b\equiv d\pmod q$.

若 $d|n$, 设 $n=du$. 则

$$a_n+b_n\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^{du}\equiv a_d^u\pmod q.$$

故 $b_n\equiv 0\pmod q$.

反之, 若 $q|b_n$, 设 $n=du+r(0\leq r<d)$.

若 $r\geq 1$, 则由

$$a_n\equiv(3+2\sqrt{2})^n$$
$$=(3+2\sqrt{2})^{du}(3+2\sqrt{2})^r$$
$$\equiv a_d^u(a_r+b_r\sqrt{2})\pmod q,$$

可知 $a_d^u b_r\equiv 0\pmod q$.　①

但 $a_d^2-2b_d^2=1$, 而 $q|b_d$, 故 $q\nmid a_d^2$.

因为 q 是质数, 所以, $q\nmid a_d$.

进而, $(q, a_d^u)=1$.

故由式①知 $q|b_r$, 与 d 的定义相违.

因此, $r=0$, 即 $d|n$. 引理得证.

回到原题.

因为 q 是质数, 所以, $\mathrm{C}_q^i(1\leq i\leq q-1)$ 都是 q 的倍数.

又 $q\neq 2,3$, 由费马小定理知

$$3^q\equiv 3\pmod q, 2^q\equiv 2\pmod q.$$

进而, $2^{\frac{q-1}{2}}\equiv\pm 1\pmod q$.

由二项式定理得

$$(3+2\sqrt{2})^q=\sum_{i=0}^{q}\mathrm{C}_q^i\cdot 3^{q-i}(2\sqrt{2})^i$$
$$\equiv 3^q+(2\sqrt{2})^q=3^q+2^q\cdot 2^{\frac{q-1}{2}}\sqrt{2}$$
$$\equiv 3\pm 2\sqrt{2}\pmod q.\quad ②$$

因而, 类似于式②的处理可得

$$(3+2\sqrt{2})^{q^2}\equiv(3\pm 2\sqrt{2})^q$$
$$\equiv 3+2\sqrt{2}\pmod q.\quad ③$$

由式③得

$$(a_{q^2-1}+b_{q^2-1}\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})$$
$$\equiv 3+2\sqrt{2}\pmod q.$$

所以, $\begin{cases}3a_{q^2-1}+4b_{q^2-1}\equiv 3\pmod q,\\ 2a_{q^2-1}+3b_{q^2-1}\equiv 2\pmod q.\end{cases}$

进而, $q|b_{q^2-1}$.

又 $q|b_p$, 故由引理得 $d|p$.

因为 q 是质数, 所以, $d=1$ 或 p.

若 $d=1$, 则 $q|b_1=2$, 这与假设不符. 故 $d=p$. 但 $q|b_{q^2-1}$, 故由引理知 $d|(q^2-1)$, 即 $p|(q^2-1)$. 从而, $p|(q-1)$ 或 $p|(q+1)$.

注意到 $q-1$ 和 $q+1$ 都是偶数, 于是,

$$q\geq 2p-1.$$

三、引理1　若正整数集 $\mathbf{N}_+$ 中存在一个无穷的等差数列, 则结论成立.

事实上, 设无穷序列 $c_1<c_2<\cdots<c_n<\cdots$ 是一个 $\mathbf{N}_+$ 中的红色的等差数列. 则取 $a_i=c_{2i-1}(i\in\mathbf{N}_+)$, 便得到一个满足要求的无穷的红色正整数序列

$$a_1<\frac{a_1+a_2}{2}<a_2<\frac{a_2+a_3}{2}<a_3<\cdots.$$

引理2　若对任意 $i\in\mathbf{N}_+$, 存在 $j\in\mathbf{N}_+$ $(j>i)$, 使得 i、$\frac{i+j}{2}$、j 同色, 则结论成立.

事实上, 取 $a_1=1$, 并设 a_1 为红色.

由于存在 $k\in\mathbf{N}_+$, 使得 a_1、$\frac{a_1+k}{2}$、k 同

色,因此,可取 $a_2 = k$;再由存在 $l \in \mathbf{N}_+$,使得 a_2、$\frac{a_2 + l}{2}$、l 同色,因此,可取 $a_3 = l$;如此下去,便得到一个满足要求的无穷的红色正整数序列

$$a_1 < \frac{a_1 + a_2}{2} < a_2 < \frac{a_2 + a_3}{2} < a_3 < \cdots.$$

引理 3 若 $\mathbf{N}_+$ 中不存在无穷项的同色的等差数列,且存在 $i_0 \in \mathbf{N}_+$,使得对任意 $j \in \mathbf{N}_+ (j > i_0)$,得 i_0、$\frac{i_0 + j}{2}$、j 不同色(即引理 1,2 的条件不成立),则存在一个同色的奇数的无穷正整数序列满足要求.

事实上,不妨设 $i_0 = 1$. 否则,考虑

$$\{ i \cdot i_0 | i = 1, 2, \cdots\}$$

而不改变问题的性质.

设 1 为红色. 则对任意 $j \in \mathbf{N}_+ (j \geq 2)$,都有

j、$2j - 1$ 不同为红色. ①

由于不存在无穷项的同色的等差数列,则 $\mathbf{N}_+$ 中存在无穷多个蓝色的奇数. 任取其中一个记为 a_1.

下面证明:存在以 a_1 为首项的无穷奇数数列 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$,使得无穷序列

$$a_1 < \frac{a_1 + a_2}{2} < a_2 < \frac{a_2 + a_3}{2} < a_3 < \cdots$$

的所有项都为蓝色.

对 n 用数学归纳法.

当 $n = 1$ 时,a_1 的存在性已证.

假设蓝色的奇数数列 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 存在. 接下来证明满足要求的 a_{n+1} 一定存在.

(1) 先考虑对任意 $i \in \mathbf{N}_+$,$a_n + i$、$a_n + 2i$ 不同色的情况.

假设此时没有满足要求的 a_{n+1},即不存在 $a_{n+1} > a_n$,使得

a_n、$\frac{a_n + a_{n+1}}{2}$、a_{n+1} 同为蓝色. ②

由于不存在无穷项的同色的等差数列,则 $\mathbf{N}_+$ 中红蓝两色的数均有无穷多个. 故存在某个 i,使得 $a_n + i$ 为红色,此时,$a_n + 2i$ 为蓝色. 记 $a_n = 2k + 1$. 则现有 $2k + 1$ 为蓝色,$2k + i + 1$ 为红色,$2k + 2i + 1$ 为蓝色. 由①知

$$2(2k + i + 1) - 1 = 4k + 2i + 1$$

为蓝色. 再由②知

$$\frac{(2k + 1) + (4k + 2i + 1)}{2} = 3k + i + 1$$

为红色. 再由①知

$$2(3k + i + 1) - 1 = 6k + 2i + 1$$

为蓝色. 如此递归下去,便得到一个蓝色的无穷序列 $\{2nk + 2i + 1\}_{n=1}^{\infty}$,它们的所有项都是蓝色,但注意到它是一个等差数列,矛盾. 这说明满足要求的 a_{n+1} 一定存在.

(2) 再考虑存在 $i \in \mathbf{N}_+$,使得 $a_n + i$、$a_n + 2i$ 同色的情况.

设 $a_n = 2k + 1$.

(i) 若 $a_n + i$、$a_n + 2i$ 同为蓝色,则取 $a_{n+1} = a_n + 2i$ 即可.

(ii) 若 $a_n + i$、$a_n + 2i$ 同为红色,由①知

$$2(2k + i + 1) - 1 = 4k + 2i + 1$$

及 $$2(2k + 2i + 1) - 1 = 4k + 4i + 1$$

均为蓝色.

因此,若

$$\frac{(2k + 1) + (4k + 4i + 1)}{2} = 3k + 2i + 1$$

为蓝色,取 $a_{n+1} = 4k + 4i + 1$ 即可;若

$$\frac{(2k + 1) + (4k + 4i + 1)}{2} = 3k + 2i + 1$$

为红色,再由①知

$$2(3k + 2i + 1) - 1 = 6k + 4i + 1$$

为蓝色. 此时,

$$\frac{(2k + 1) + (6k + 4i + 1)}{2} = 4k + 2i + 1$$

为蓝色,取 $a_{n+1} = 6k + 4i + 1$ 即可.

至此引理 3 证完.

综上三个引理便知结论成立.

第 二 天

四、首先,当 $n\geq 3$ 时,对 n 用数学归纳法证明下述命题:

对任意的正整数 $n(n\geq 3)$,**可以将集合** $G_n=\{1,2,\cdots,n\}$ **的全部非空子集排成一个序列** $P_1,P_2,\cdots,P_{2^n-1}$,**使得对任意的** $i\in\{1,2,\cdots,2^n-2\}$,**总有**

$|P_i\cap P_{i+1}|=1$,且 $P_1=\{1\}$, $P_{2^n-1}=G_n$.

当 $n=3$ **时**,**序列** $\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{2\}$, $\{2,3\}$, $\{1,3\}$, $\{3\}$, $\{1,2,3\}$ **满足要求**.

假设当 $n=k(k\geq 3)$ **时**,**存在** G_k **的非空子集的序列** P_1', P_2', $\cdots$, P'_{2^k-1} **满足要求**,**其中**, $P_1'=\{1\}$, $P'_{2^k-1}=G_k$.

对于 $n=k+1$,**构造如下序列**:

P_1', P'_{2^k-1}, $P'_{2^k-2}\cup\{k+1\}$, P'_{2^k-3}, $P'_{2^k-4}\cup\{k+1\}$, P'_{2^k-5}, $\cdots$, P_3', $P_2'\cup\{k+1\}$, $\{k+1\}$, $P_1'\cup\{k+1\}$, P_2', $P_3'\cup\{k+1\}$, P_4', $\cdots$, P'_{2^k-2}, $P'_{2^k-1}\cup\{k+1\}$. ①

显然, $P_1=P_1'=\{1\}$,

$P_{2^{k+1}-1}=P'_{2^k-1}\cup\{k+1\}=G_{k+1}$.

因为 $P_1'\cap P'_{2^k-1}=P_1'$,

$P'_{r+1}\cap(P_r'\cup\{k+1\})=P'_{r+1}\cap P_r'$,

$(P_2'\cup\{k+1\})\cap\{k+1\}=\{k+1\}$

$=\{k+1\}\cap(P_1'\cup\{k+1\})$,

$P_r'\cap(P'_{r+1}\cup\{k+1\})=P_r'\cap P'_{r+1}$, $r\leq 2^k-2$.

所以,**由归纳假设**,**序列** ①**满足要求**.

由数学归纳法,**命题得证**.

回到原题.

仍用数学归纳法证明下述加强命题:

对任意的正整数 $n(n\geq 4)$,**可以将集合** $G_n=\{1,2,\cdots,n\}$ **的全部元素个数不小于** 2 **的子集排成一序列** $P_1,P_2,\cdots,P_{2^n-n-1}$,**使得**

$|P_i\cap P_{i+1}|=2(i=1,2,\cdots,2^n-n-2)$,

且 $P_{2^n-n-1}=\{1,n\}$.

当 $n=4$ **时**,**序列**

$\{1,3\}$, $\{1,2,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3,4\}$, $\{1,2\}$, $\{1,2,4\}$, $\{2,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{1,4\}$

满足要求.

假设 $n=k(k\geq 4)$ **时**,**存在序列** P_1, P_2, $\cdots$, P_{2^k-k-1} **满足要求**,**且** $P_{2^k-k-1}=\{1,k\}$.

对于 $n=k+1$,**知道** $G_{k+1}=G_k\cup\{k+1\}$ **的全部子集可以分为两类**:**一类都不含元素** $k+1$,**而另一类都含元素** $k+1$. **由前述命题**,**存在** G_k **的全部非空子集排成一个序列** q_1, q_2, $\cdots$, q_{2^k-1},**使得对任意的** $i\in\{1,2,\cdots,2^k-2\}$,**总有**

$|q_i\cap q_{i+1}|=1$,且 $q_1=G_k$, $q_{2^k-1}=\{1\}$.

于是,**有序列**

P_1, P_2, $\cdots$, P_{2^k-k-1}, $q_1\cup\{k+1\}$, $q_2\cup\{k+1\}$, $\cdots$, $q_{2^k-1}\cup\{k+1\}$.

由归纳假设及命题知,**上述序列满足要求**,**且**

$P_{2^{k+1}-(k+1)-1}=q_{2^k-1}\cup\{k+1\}$

$=\{1,k+1\}$.

由数学归纳法,**原命题得证**.

五、f **的最大值为** 1.

先证明 $f\leq 1$.

这等价于

$$n\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\right)^2+m\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)^2 \leq\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\right)^2+mn\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^2. \quad ①$$

记 $G=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\right)^2+mn\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^2-n\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\right)^2-m\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)^2$.

只需证明 $G\geq 0$.

现将所有的 a_{ij} **排成一个** n **行** m **列的数表**,**使** a_{ij} **位于第** i **行第** j **列**. **考虑数表中位置构成矩形的** 4 **个数** a_{pq}、a_{pr}、a_{sq}、a_{sr},**并把它们叫做一个矩形数组**,**记作** $[psqr]$,**其中**, $1\leq p<s\leq n$, $1\leq q<r\leq m$.

记 $G^* = \sum_{[psqr]}(a_{pq}+a_{sr}-a_{pr}-a_{sq})^2$,其中,求和跑遍所有的矩形数组$[psqr]$.

下面证明:$G=G^*$. ②

首先,比较形如 a_{ij}^2 项的系数. 对确定的 i、j,易见 G 中 a_{ij}^2 项的系数为 $mn+1-m-n$. 而在 G^* 中,因为以 a_{ij} 为一个顶点的矩形数组恰有$(m-1)(n-1)$个,所以,G^* 中 a_{ij}^2 项的系数为

$$(m-1)(n-1)=mn+1-m-n.$$

这说明 G 和 G^* 中 a_{ij}^2 项的系数相等.

其次,比较形如 $a_{ij}a_{ik}(j\neq k)$ 项的系数. G 中的系数为 $-2(n-1)$,而 G^* 中这种项对应的矩形数组$[psqr]$中还有一个行标 s 有 $n-1$ 种选择,因此,它在 G^* 中的系数也为 $-2(n-1)$. 这表明 G 和 G^* 中形如 $a_{ij}a_{ik}(j\neq k)$ 项的系数相等.

再次,与上述类似,G 和 G^* 中形如 $a_{ik}a_{jk}(i\neq j)$ 项的系数都为 $-2(m-1)$.

最后,G 和 G^* 中形如 $a_{pq}a_{st}(p\neq s,q\neq t)$ 项的系数都为 2.

综上所述,式②成立.

从而,$G\geq 0$,亦即式①得证.

当所有 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$ 均为 1 时,$f=1$,故 f 的最大值为 1.

f 的最小值为$\dfrac{m+n}{mn+\min\{m,n\}}$.

先证明:$f\geq\dfrac{m+n}{mn+\min\{m,n\}}$.

不妨设 $n\leq m$. 此时,只需证明

$$f\geq\frac{m+n}{mn+n}. \quad ③$$

记 $S=\dfrac{n^2(m+1)}{m+n}\sum_{i=1}^{n}r_i^2+\dfrac{mn(m+1)}{m+n}\sum_{j=1}^{m}c_j^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\right)^2-mn\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^2$,

其中,$r_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(i=1,2,\cdots,n)$,$c_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(j=1,2,\cdots,m)$. 欲证式③,只需证明

$$S\geq 0. \quad ④$$

在拉格朗日恒等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)-\sum_{1\leq k<l\leq n}(a_kb_l-a_lb_k)^2$$

中,令 $a_i=r_i$,$b_i=1(i=1,2,\cdots,n)$得

$$-\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\right)^2=-n\sum_{i=1}^{n}r_i^2+\sum_{1\leq k<l\leq n}(r_k-r_l)^2.$$

将上式代入 S 的表达式可得

$$S=\frac{mn(n-1)}{m+n}\sum_{i=1}^{n}r_i^2+\frac{mn(m+1)}{m+n}\sum_{j=1}^{m}c_j^2-mn\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^2+\sum_{1\leq k<l\leq n}(r_k-r_l)^2.$$

因为 $mn=\dfrac{mn(n-1)}{m+n}+\dfrac{mn(m+1)}{m+n}$,所以,上面的 S 可重写为

$$S=\frac{mn(n-1)}{m+n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(r_i-a_{ij})+\frac{mn(m+1)}{m+n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(c_j-a_{ij})+\sum_{1\leq k<l\leq n}(r_k-r_l)^2. \quad ⑤$$

因为所有的 $a_{ij}\geq 0$,且 $r_i-a_{ij}\geq 0$,$c_j-a_{ij}\geq 0(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$,故由式⑤便知 $S\geq 0$,即式④成立.

当 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=1$,其他元素都取 0 时,$f=\dfrac{m+n}{mn+n}$,所以,$f$ 的最小值为$\dfrac{m+n}{mn+m}$.

同理,当 $n\geq m$ 时,f 的最小值为 $\dfrac{m+n}{mn+m}$.

因此,f 的最小值为$\dfrac{m+n}{mn+\min\{m,n\}}$.

六、引理 $\max\limits_{1\leq k\leq n}\{a_k\}<2$,$\max\limits_{1\leq k\leq n}\{b_k\}<\dfrac{2}{n-1}$.

引理的证明:令 $L=\max\limits_{1\leq k\leq n}\{a_k\}$. 由(2)得 $L^2\leq 1+L$,所以,$L<2$.

令 $b_m=\max\limits_{1\leq k\leq n}\{b_k\}$. 由(1)得

$$b_k \geq \begin{cases} \dfrac{(k-1)b_m+(m-k)b_1}{m-1} \geq \dfrac{k-1}{m-1}b_m, & 1 \leq k \leq m; \\ \dfrac{(k-m)b_n+(n-k)b_m}{n-m} > \dfrac{n-k}{n-m}b_m, & m < k \leq n. \end{cases}$$

故 $1 = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{m} b_k + \sum_{k=m+1}^{n} b_k$

$> \frac{m}{2} b_m + \frac{n-m-1}{2} b_m = \frac{n-1}{2} b_m$.

此即 $b_m < \frac{2}{n-1}$. **引理得证**.

回到原题.

令 $f_0 = 1$,

$f_k = 1 + \sum_{i=1}^{k} a_i b_i \ (k = 1, 2, \cdots, n)$.

则 $f_k - f_{k-1} = a_k b_k \leq b_k \sqrt{f_k}$.

由此可得

$$\sqrt{f_k} - \sqrt{f_{k-1}} \leq b_k \cdot \frac{\sqrt{f_k}}{\sqrt{f_k} + \sqrt{f_{k-1}}}$$

$$= b_k \left[\frac{1}{2} + \frac{f_k - f_{k-1}}{2(\sqrt{f_k} + \sqrt{f_{k-1}})^2} \right]$$

$$< b_k \left[\frac{1}{2} + \frac{2b_k}{2(\sqrt{f_k} + \sqrt{f_{k-1}})^2} \right]$$

$$< b_k \left[\frac{1}{2} + \frac{b_k}{4} \right]$$

$$< b_k \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2(n-1)} \right].$$

对 k **从** 1 **到** n **求和得**

$M = a_n \leq \sqrt{f_n}$

$< \sqrt{f_0} + \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2(n-1)} \right]$

$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2(n-1)}$.

由 n **的任意性得** $M_{\max} \leq \frac{3}{2}$.

$M = \frac{3}{2}$ **是能够达到的**. **例子如下**:

$a_k = 1 + \frac{k}{2n}, b_k = \frac{1}{n} \ (k = 1, 2, \cdots, n)$,

则 $a_k^2 = \left(1 + \frac{k}{2n}\right)^2 \leq 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{i}{2n}\right)$

成立.

综上所述, M **的最大值为** $\frac{3}{2}$.

(熊　斌　提供)