2006年IMO中国国家集训队选拔考试

第 一 天

一、设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，D、E、F 为 $\triangle ABC$ 外接圆上的三点，使得 $AD \parallel BE \parallel CF$，$S$、$T$、$U$ 分别为 D、E、F 关于边 BC、CA、AB 的对称点. 求证：S、T、U、H 四点共圆.

二、给定正整数 n. 求最大的实数 c，满足：若一组大于 1 的整数（可以相同）的倒数之和小于 c，则一定可以将这一组数分成不超过 n 组，使得每一组数的倒数之和都小于 1.

三、对正整数 M，如果存在整数 a、b、c、d，使得 $M \leq a < b \leq c < d \leq M + 49$，$ad = bc$，则称 M 为好数，否则称 M 为坏数. 试求最大的好数和最小的坏数.

第 二 天

四、设 $k(k \geq 3)$ 是奇数. 证明：存在一个次数为 k 的非整系数的整值多项式 $f(x)$，具有下面的性质：

(1) $f(0) = 0$，$f(1) = 1$；

(2) 有无穷多个正整数 n 使得，若方程

$$n = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_s)$$

有整数解 $x_1, x_2, \cdots, x_s$，则 $s \geq 2^k - 1$.

（若对每个整数 x，都有 $f(x) \in \mathbf{Z}$，则称 $f(x)$ 为整值多项式.）

五、给定正整数 m、a、b，$(a, b) = 1$. A 是正整数集的非空子集，使得对任意的正整数 n 都有 $an \in A$ 或 $bn \in A$. 对所有满足上述性质的集合 A，求 $|A \cap \{1, 2, \cdots, m\}|$ 的最小值.

六、已知 $\triangle ABC$ 覆盖凸多边形 M. 证明：存在一个与 $\triangle ABC$ 全等的三角形，能够覆盖 M，并且它的一条边所在的直线与 M 的一条边所在的直线平行或者重合.

参 考 答 案

一、先证如下的引理.

引理　如图 1，设 O、H 分别为 $\triangle ABC$ 的外心、垂心，P 为 $\triangle ABC$ 的外接圆上任意一点，P 关于 BC 的中点的对称点为 Q. 则 QH 的垂直平分线与直线 AP 关于 OH 的中点对称.

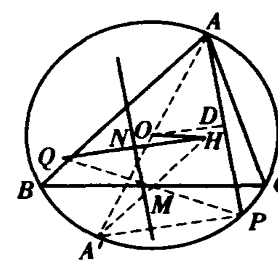

图 1

引理的证明：过点 A 作 $\triangle ABC$ 外接圆的直径 AA'，则点 A' 与 $\triangle ABC$ 的垂心 H 也关于 BC 的中点对称. 所以，$QH \mathrel{\underline{\parallel}} A'P$.

又 $A'P \perp AP$，则 $QH \perp AP$.

设 D、N 分别为 AP、QH 的中点，则

$A'P = 2OD$，$QH = 2NH$.

而 $AP \perp OD$，于是，$OD \mathrel{\underline{\parallel}} NH$.

故 QH 的垂直平分线与直线 AP 关于 OH 的中点对称.

下面证明原题.

如图 2，过点 D 作 BC 的平行线与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 P.

由 $AD \parallel BE \parallel CF$，易知 $PE \parallel CA$，$PF \parallel AB$.

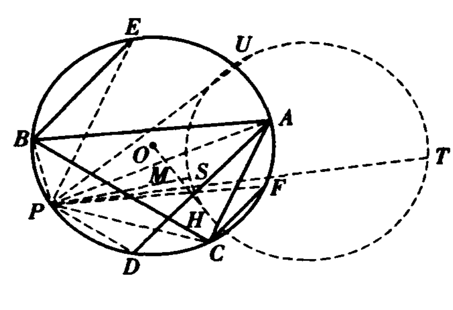

图 2

因 $PD \parallel BC$，S 是点 D 关于 BC 的对称点，所以，点 P 关于 BC 的中点的对称点是 S. 于是，可设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，OH 的中点为 M. 由引理，直线

AP 关于点 M 的对称直线是 HS 的垂直平分线.

同理,直线 BP、CP 关于点 M 的对称直线分别是 HT 的垂直平分线和 HU 的垂直平分线.

而 AP、BP、CP 有公共点 P,因此,HS、HT、HU 这三条线段的三条垂直平分线交于一点.

故 S、T、U、H 四点共圆.

二、$c=\frac{n+1}{2}$.

取这一组数为 $a_1,a_2,\cdots,a_s$,若 $a_1=a_2=\cdots=a_s=2$,知 $c\leq\frac{n+1}{2}$.

下面对 n 用数学归纳法证明:

若 $\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{a_i}<\frac{n+1}{2}$,则可将 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 分成不超过 n 组,使得每组数的倒数之和小于 1.

(1) 当 $n=1$ 时,结论成立.

(2) 假设 $n-1$ 时,结论成立.现看 n 的情形.

注意到 $a_1\geq2$,即 $\frac{1}{a_1}\leq\frac{1}{2}$.

设 t 为最大的正整数,使得 $\sum_{i=1}^{t-1}\frac{1}{a_i}<\frac{1}{2}$.

若 $t=s+1$,则结论成立.

若 $t\leq s$,则 $\sum_{i=1}^{t-1}\frac{1}{a_i}<\frac{1}{2}\leq\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{a_i}$.

又 $\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{a_i}<\frac{1}{2}+\frac{1}{a_t}\leq1$,故 $t=s$ 时,结论成立.

下设 $t<s$,则 $\sum_{i=t+1}^{s}\frac{1}{a_i}<\frac{n+1}{2}-\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{a_i}\leq\frac{n}{2}$.

由归纳假设知 $a_{t+1},\cdots,a_s$ 可分成 $n-1$ 组,每一组的倒数之和小于 1.又 $a_1,a_2,\cdots,a_t$ 的倒数之和小于 1,故 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 可分成 n 组,每一组的倒数之和小于 1.

由数学归纳法原理知,结论对所有 $n\geq1$ 成立.

三、最大的好数是 576,最小的坏数是 443.

引理 若正整数 a、b、c、d 满足 $a<b\leq c<d$,$ad=bc$,则存在正整数 u、v,使得

$$a\leq(u-1)(v-1)<uv\leq d.$$

从而(不妨设 $u\leq v$),

$$a\leq(u-1)(v-1)<(u-1)v\leq u(v-1)<uv\leq d,$$

$$[(u-1)(v-1)][uv]=[(u-1)v][u(v-1)].$$

引理的证明:由 $ad=bc$,知

$$\frac{a}{(a,c)}\cdot\frac{d}{(b,d)}=\frac{b}{(b,d)}\cdot\frac{c}{(a,c)}.$$

因 $\left(\frac{a}{(a,c)},\frac{c}{(a,c)}\right)=1$,$\left(\frac{d}{(b,d)},\frac{b}{(b,d)}\right)=1$,

则 $\frac{a}{(a,c)}=\frac{b}{(b,d)}=s$,$\frac{d}{(b,d)}=\frac{c}{(a,c)}=t$.

因此,$a=(a,c)s$,$b=(b,d)s$,

$c=(a,c)t$,$d=(b,d)t$.

由 $a<b$,知 $(a,c)<(b,d)$.

由 $a<c$,知 $s<t$.

令 $u=(b,d)$,$v=t$,则

$a=(a,c)s\leq(u-1)(v-1)$,$d=uv$.

引理得证.

下面证明原题.

(1) 576 是最大的好数.

由 $576=24\times24<24\times25=25\times24<25\times25=625$,知 576 为好数.

设 $M\geq577$.若 M 为好数,则由引理知存在正整数 u、$v(u\leq v)$,使得

$$M\leq(u-1)(v-1)<uv\leq M+49.$$

由此知 $uv-(u-1)(v-1)\leq49$,即 $u+v\leq50$.

另一方面,由

$$577\leq M\leq(u-1)(v-1)\leq\left(\frac{u+v-2}{2}\right)^2,$$

知 $(u+v-2)^2\geq2308>48^2$.

从而,$u+v-2\geq49$,即 $u+v\geq51$,矛盾.

所以,576 是最大的好数.

(2) 当 $1\leq M\leq288$ 时,取整数 n,使得

$13n\leq M+49<13(n+1)$.

则 $13n\leq M+49\leq337$.从而,$n\leq25$.这样,

$$12(n-1)=13(n+1)-n-25$$
$$\geq M+50-n-25\geq M,$$

即 $M\leq12(n-1)<13n\leq M+49$.

因此,当 $1\leq M\leq288$ 时,M 为好数.

取 $\{(u_i,v_i)\}_{i=1}^{23}=\{(13,26),(14,25),(19,19),(14,26),(15,25),(19,20),(15,26),(20,20),(17,24),(19,22),(20,21),(13,33),(18,24),(20,22),(21,21),(15,30),(19,24),(16,29),(18,26),(19,25),(20,24),(21,23),(14,35)\}$.

验证知,对 $i=2,3,\cdots,23$,有

$u_iv_i\leq(u_{i-1}-1)(v_{i-1}-1)+50$,

$(u_{i-1}-1)(v_{i-1}-1)<(u_i-1)(v_i-1)$,

$(u_1-1)(v_1-1)=300$,$u_1v_1=338$,

$(u_{23}-1)(v_{23}-1)=442$.

当 $288<M\leq300$ 时,

$M\leq(u_1-1)(v_1-1)<u_1v_1\leq M+49$.

当 $(u_{i-1}-1)(v_{i-1}-1)<M\leq(u_i-1)(v_i-1)$

时,有

$$M \le (u_i-1)(v_i-1) < u_i v_i$$
$$\le (u_{i-1}-1)(v_{i-1}-1)+50 \le M+49,$$

$i=2,3,\cdots,23$.

因此,当 $288\le M\le 442$ 时,M 为好数.

下证 443 为坏数.

假设 443 为好数,则由引理知存在正整数 u、v ($u\le v$),使得 $443\le(u-1)(v-1)<uv\le 492$.

因此,$uv-(u-1)(v-1)\le 49$,即

$u+v\le 50$.

又 $443\le(u-1)(v-1)\le\left(\frac{u+v-2}{2}\right)^2$,得

$u+v\ge45$.

由 $443\le(u-1)(v-1)=uv-u-v+1$

$\le uv-2\sqrt{uv}+1=(\sqrt{uv}-1)^2$,

知 $\sqrt{uv}\ge22$,$uv\ge484$.

故 $uv=484,485,486,487,488,489,490,491,492$ 中满足 $45\le u+v\le50$ 只有

$(u,v)=(14,35),(18,27)$.

而 $13\times34=442$,$17\times26=442$ 与 $(u-1)(v-1)\ge443$ 矛盾.

所以,443 为最小的坏数.

四、首先证明一个引理.

引理 存在一个 k 次整值多项式 $f(x)$,系数不全是整数,满足

$f(0)=0$,$f(1)=1$,

以及 $f(x)\equiv\begin{cases}0\pmod{2^k}, & x\text{ 为偶数;}\\ 1\pmod{2^k}, & x\text{ 为奇数.}\end{cases}$

引理的证明:满足 $f(0)=0$,$f(1)=1$ 的 k 次整值多项式 $f(x)$ 可表示为

$$f(x)=a_kF_k(x)+a_{k-1}F_{k-1}(x)+\cdots+a_1F_1(x), \qquad ①$$

其中,$F_i(x)=\frac{x(x-1)\cdots(x-i+1)}{i!}$,$a_k,a_{k-1},\cdots,a_1$ 为整数,$a_k>0$,$a_1=1$.

易证 $F_i(x+2)=F_i(x)+2F_{i-1}(x)+F_{i-2}(x)$.

故由式①易知

$$f(x+2)-f(x)$$
$$=2a_kF_{k-1}(x)+\sum_{i=1}^{k-1}(2a_i+a_{i+1})F_{i-1}(x). \qquad ②$$

现在取 $a_k,a_{k-1},\cdots,a_2$ 满足

$$\begin{cases}2a_k=2^k,\\ 2a_i+a_{i+1}=0,1\le i\le k-1.\end{cases}$$

则易解得(注意 $a_1=1$)

$a_k=2^{k-1}$,$a_{k-1}=-2^{k-2}$,$\cdots$,$a_2=-2$.

从而,式②化为

$f(x+2)-f(x)=2^kF_{k-1}(x)$.

由此得,对所有整数 x 有

$$f(x+2)-f(x)\equiv0\pmod{2^k}. \qquad ③$$

由于 $f(0)=0$,$f(1)=1$,故由式③推出多项式

$$f(x)=2^{k-1}F_k(x)-2^{k-2}F_{k-1}(x)+\cdots-2F_2(x)+F_1(x)$$

满足引理的要求(注意 x^k 的系数是 $\frac{2^{k-1}}{k!}$,这在 $k\ge3$ 时非整数).

下面证明原题.

取 $n\equiv-1\pmod{2^k}$,若有整数 $x_1,x_2,\cdots,x_s$,使得 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_s)=n$,则更有

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_s)\equiv-1\pmod{2^k}. \qquad ④$$

由引理知,式④中左边每一项模 2^k 是 0 或 1.故加项至少有 2^k-1 个,即 $s\ge2^k-1$.

五、(1) 当 $a=b=1$ 时,有

$A\cap\{1,2,\cdots,m\}=\{1,2,\cdots,m\}$,

$|A\cap\{1,2,\cdots,m\}|=m$.

(2) 不妨设 $a>b$.令

$A_1=\{k\mid$ 若 $a^\alpha\mid k$,$a^{\alpha+1}\nmid k$,则 α 为奇数$\}$.

现验证 A_1 满足条件.

任取正整数 n,设 $n=a^\alpha n_1$,$a\nmid n_1$.

若 $2\mid\alpha$,则 $an=a^{\alpha+1}n_1\in A_1$;

若 $2\nmid\alpha$,则 $bn=a^\alpha bn_1\in A_1$.

有 $|A_1\cap\{1,2,\cdots,m\}|=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\left[\frac{m}{a^i}\right]$.

(3) 对任何正整数 n,取 $c_n=a$ 或 b,使 $nc_n\in A$.令 $B=\{c_1,2c_2,3c_3,\cdots\}$.因此,

$$|A\cap\{1,2,\cdots,m\}|\ge|B\cap\{1,2,\cdots,m\}|. \qquad ①$$

对任何 n,设 $n=a^\alpha n_1$,$a\nmid n_1$,取

$$d_n=\begin{cases}a, & \text{若 } 2\mid\alpha;\\ b, & \text{若 } 2\nmid\alpha.\end{cases}$$

令 $B_n=\{d_1,2d_2,\cdots,nd_n,(n+1)c_{n+1},(n+2)c_{n+2},\cdots\}$,

$B_0=B$.

下面证明:

$$|B_i\cap\{1,2,\cdots,m\}|\ge|B_{i+1}\cap\{1,2,\cdots,m\}|,$$

$i=0,1,\cdots$. ②

对 i 用数学归纳法.

(i) 当 $i=0$ 时,若 $c_1=b$,则 $c_1<ic_i$ ($i\ge2$),并且

$|B_0\cap\{1,2,\cdots,m\}|$

$=1+|\{2c_2,3c_3,\cdots\}\cap\{1,2,\cdots,m\}|$,

$|B_1\cap\{1,2,\cdots,m\}|$

$\leq 1+|\{2c_2,3c_3,\cdots\}\cap\{1,2,\cdots,m\}|$

$=|B_0\cap\{1,2,\cdots,m\}|$.

若 $c_1=a$,则 $B_0=B_1$.

因此,对 $i=0$,式②成立.

(ii)设 $i\geq1$,假设 $c_{i+1}\neq d_{i+1}$, $i+1=a^{\alpha}n_i$, $a\nmid n_i$.

i)若 $2|\alpha$,则 $d_{i+1}=a$.从而,$c_{i+1}=b$.

此时,$(i+1)c_{i+1}=a^{\alpha}bn_i$, $a\nmid bn_i$.

由于 $d_1,2d_2,\cdots,id_i$ 中每一个含 a 的最高幂均为奇数,$2|\alpha$,故

$(i+1)c_{i+1}\neq d_1,2d_2,\cdots,id_i$.

当 $j>i+1$ 时,$(i+1)c_{i+1}=(i+1)b<jb\leq jc_j$.

此时,若 $(i+1)c_{i+1}\leq m$,则

$|B_i\cap\{1,2,\cdots,m\}|$

$=1+|\{d_1,2d_2,\cdots,id_i,(i+2)c_{i+2},\cdots\}\cap\{1,2,\cdots,m\}|$

$\geq|\{d_1,2d_2,\cdots,id_i,(i+1)d_{i+1},(i+2)c_{i+2},\cdots\}\cap\{1,2,\cdots,m\}|$

$=|B_{i+1}\cap\{1,2,\cdots,m\}|$.

若 $(i+1)c_{i+1}>m$,则

$(i+1)d_{i+1}=(i+1)a$

$>(i+1)b=(i+1)c_{i+1}>m$.

此时,式②中等号成立.

ii)若 $2\nmid\alpha$,则 $d_{i+1}=b$.从而,$c_{i+1}=a$.此时,

$(i+1)d_{i+1}=a^{\alpha}bn_i=i'd_{i'}$, $i'=a^{\alpha-1}bn_i<i+1$.

故 $|B_i\cap\{1,2,\cdots,m\}|$

$=|\{d_1,2d_2,\cdots,id_i,(i+1)c_{i+1},\cdots\}\cap\{1,2,\cdots,m\}|$

$\geq|\{d_1,2d_2,\cdots,id_i,(i+2)c_{i+2},\cdots\}\cap\{1,2,\cdots,m\}|$

$=|\{d_1,2d_2,\cdots,id_i,(i+1)d_{i+1},(i+2)c_{i+2},\cdots\}\cap\{1,2,\cdots,m\}|$

$=|B_{i+1}\cap\{1,2,\cdots,m\}|$.

因此,式②成立.

这就证明了式②对所有的 i 都成立.

设 n 为最大的正整数,使得 $nd_n\leq m$.则由式①、②知

$|A\cap\{1,2,\cdots,m\}|$

$\geq|B\cap\{1,2,\cdots,m\}|=|B_0\cap\{1,2,\cdots,m\}|$

$\geq|B_n\cap\{1,2,\cdots,m\}|=|A_1\cap\{1,2,\cdots,m\}|$

$=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\left[\frac{m}{a^i}\right]$.

六、首先,不妨设 M 有三个顶点位于△ABC 的边上(如图3)或 M 有一个顶点与△ABC 的某顶点重合(如点 B),M 的另一顶点位于点 B 的对边上(如图4).

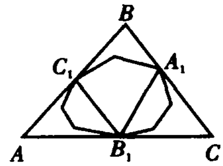

图3

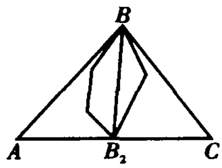

图4

设初始状态下 $\angle AC_1B_1=\theta_0$,分别将 M 绕点 C_1 顺时针和逆时针旋转.设顺时针转 δ_1 时,M 第一次出现某一边与△ABC 某一边平行;逆时针转 δ_2 时,M 第一次出现某一边与△ABC 某一边平行.对 $\theta\in[\theta_1,\theta_2]$,$\theta_1=\theta_0-\delta_1$,$\theta_2=\theta_0+\delta_2$,设 M 首先绕点 C_1 旋转到相应的 θ 角度,然后,再分别作以点 A、B 为中心的位似变换,使得 M 的像(记为 M_θ)的相应的两顶点重新分别位于 AC、BC 上.设

$C_1B_1=mf(\theta)$, $A_1B_1=nf(\theta)$, $f(\theta_0)=1$,

其中,m、n 分别是初始状态下相应的距离.

令 $\varphi=\angle B+\angle C_1B_1A_1$(为定值),则

$$AC=AB_1+B_1C=\frac{mf(\theta)\sin\theta}{\sin A}+\frac{nf(\theta)}{\sin C}\sin(\varphi-\theta).$$

故 $$f(\theta)=\frac{AC\sin A\cdot\sin C}{m\sin\theta\cdot\sin C+n\sin(\varphi-\theta)\cdot\sin A}$$

$$=\frac{AC\sin A\cdot\sin C}{a\sin(\theta+\varphi_1)},$$

其中,a、φ_1 为常数.

由于 $\sin(\theta+\varphi_1)$ 为上凸函数,因此,其必然在端点处达到最小值.

故 $\max\{f(\theta_1),f(\theta_2)\}\geq f(\theta_0)=1$.

则 M_{θ_1} 或 M_{θ_2} 与 M 相似,比例常数不小于1,并且位于△ABC 中.

对于第二种情况可以类似讨论.

设 $BB_2=mf(\theta)$, $f(\theta_0)=1$, $AB_2=\frac{BB_2}{\sin A}\cdot\sin\theta$,

$CB_2=\frac{BB_2}{\sin C}\cdot\sin(B-\theta)$.

故 $$AC=\frac{mf(\theta)\sin\theta}{\sin A}+\frac{mf(\theta)}{\sin C}\cdot\sin(B-\theta)$$

$$=\frac{f(\theta)a\sin(\theta+\varphi_1)}{\sin A\cdot\sin C}.$$

从而,$f(\theta)=\frac{AC\sin A\cdot\sin C}{a\sin(\theta+\varphi_1)}$.

结论一样.

(李胜宏　提供)