2007 中国数学奥林匹克试题答案

1. 设 a, b, c 是给定复数, 记 $|a+b|=m$, $|a-b|=n$, 已知 $mn \neq 0$, 求证:

$$\max\{|ac+b|, |a+bc|\} \geqslant \frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

证法一. 因为

$$\begin{aligned}
\max\{|ac+b|, |a+bc|\} &\geqslant \frac{|b|\cdot|ac+b|+|a|\cdot|a+bc|}{|b|+|a|} \\
&\geqslant \frac{|b(ac+b)-a(a+bc)|}{|a|+|b|} \\
&= \frac{|b^2-a^2|}{|a|+|b|} \\
&\geqslant \frac{|b+a|\cdot|b-a|}{\sqrt{2(|a|^2+|b|^2)}},
\end{aligned}$$

又

$$m^2+n^2=|a-b|^2+|a+b|^2=2(|a|^2+|b|^2),$$

所以

$$\max\{|ac+b|, |a+bc|\} \geqslant \frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

证法二. 注意到

$$\begin{aligned}
ac+b &= \frac{1+c}{2}(a+b)-\frac{1-c}{2}(a-b), \\
a+bc &= \frac{1+c}{2}(a+b)+\frac{1-c}{2}(a-b),
\end{aligned}$$

令

$$\alpha=\frac{1+c}{2}(a+b),\ \ \beta=\frac{1-c}{2}(a-b),$$

则

$$|ac+b|^2+|a+bc|^2=|\alpha-\beta|^2+|\alpha+\beta|^2=2(|\alpha|^2+|\beta|^2),$$

所以

$$(\max\{|ac+b, a+bc|\})^2 \geqslant |\alpha|^2+|\beta|^2=\left|\frac{1+c}{2}\right|^2 m^2+\left|\frac{1-c}{2}\right|^2 n^2,$$

因此只需要证明

$$\left|\frac{1+c}{2}\right|^2 m^2+\left|\frac{1-c}{2}\right|^2 n^2 \geqslant \frac{m^2n^2}{m^2+n^2},$$

等价变形为

$$\left|\frac{1+c}{2}\right|^2 m^4+\left|\frac{1-c}{2}\right|^2 n^4+\left(\left|\frac{1+c}{2}\right|^2+\left|\frac{1-c}{2}\right|^2\right)m^2n^2 \geqslant m^2n^2. \tag{1}$$

事实上,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1+c}{2}\right|^2 m^4+\left|\frac{1-c}{2}\right|^2 n^4+\left(\left|\frac{1+c}{2}\right|^2+\left|\frac{1-c}{2}\right|^2\right)m^2n^2\\
\geqslant\ & 2\left|\frac{1+c}{2}\right|\left|\frac{1-c}{2}\right|m^2n^2+\left(\left|\frac{1+2c+c^2}{4}\right|+\left|\frac{1-2c+c^2}{4}\right|\right)m^2n^2\\
=\ & \left(\left|\frac{1-c^2}{2}\right|+\left|\frac{1+2c+c^2}{4}\right|+\left|\frac{1-2c+c^2}{4}\right|\right)m^2n^2\\
\geqslant\ & \left|\frac{1-c^2}{2}+\frac{1+2c+c^2}{4}+\frac{1-2c+c^2}{4}\right|m^2n^2\\
=\ & m^2n^2,
\end{aligned}$$

故(1)得证.

证法三. 由已知得

$$m^2=|a+b|^2=(a+b)(\overline{a+b})=(a+b)(\bar a+\bar b)=|a|^2+|b|^2+a\bar b+\bar a b,$$

$$n^2=|a-b|^2=(a-b)(\overline{a-b})=(a-b)(\bar a-\bar b)=|a|^2+|b|^2-a\bar b-\bar a b,$$

从而

$$|a|^2+|b|^2=\frac{m^2+n^2}{2},\quad a\bar b+\bar a b=\frac{m^2-n^2}{2}.$$

令

$$c=x+yi,\quad x,y\in\mathbb{R},$$

则

$$\begin{aligned}
|ac+b|^2+|a+bc|^2 &= (ac+b)(\overline{ac+b})+(a+bc)(\overline{a+bc}) \\
&= |a|^2|c|^2+|b|^2+a\bar{b}c+\bar{a}b\bar{c}+|a|^2+|b|^2|c|^2+\bar{a}bc+a\bar{b}\bar{c} \\
&= (|c|^2+1)(|a|^2+|b|^2)+(c+\bar{c})(a\bar{b}+\bar{a}b) \\
&= (x^2+y^2+1)\frac{m^2+n^2}{2}+2x\frac{m^2-n^2}{2} \\
&\geqslant \frac{m^2+n^2}{2}x^2+(m^2-n^2)x+\frac{m^2+n^2}{2} \\
&= \frac{m^2+n^2}{2}\left(x+\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)^2-\frac{m^2+n^2}{2}\left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)^2+\frac{m^2+n^2}{2} \\
&\geqslant \frac{m^2+n^2}{2}-\frac{1}{2}\frac{(m^2-n^2)^2}{m^2+n^2} \\
&= \frac{2m^2n^2}{m^2+n^2},
\end{aligned}$$

所以

$$(\max\{|ac+b|,|a+bc|\})^2 \geqslant \frac{m^2n^2}{m^2+n^2},$$

即

$$\max\{|ac+b|,|a+bc|\} \geqslant \frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

2. 试证明: (1)若 $2n-1$ 为素数, 则对于任意 n 个互不相同的正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 都存在 $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 使得

$$\frac{a_i + a_j}{(a_i, a_j)} \geqslant 2n-1;$$

(2)若 $2n-1$ 为合数, 则存在 n 个互不相同的正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 使得对任意 $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 都有

$$\frac{a_i + a_j}{(a_i, a_j)} < 2n-1,$$

其中 (x, y) 表示正整数 x, y 的最大公约数.

证明. (1)记 $2n-1$ 为素数 p, 不妨设 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 1$. 若存在 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$, 使得 $p|a_i$. 必然存在 $j \neq i$使得 $p \nmid a_j$. 由于 $p \nmid (a_i, a_j)$, 则有

$$\frac{a_i + a_j}{(a_i, a_j)} \geqslant \frac{a_i}{(a_i, a_j)} \geqslant p = 2n-1.$$

以下只需要考虑 $(a_i, p) = 1, i = 1, 2, \cdots, n$, 则对任意 $i \neq j$ 都有 $p \nmid (a_i, a_j)$. 将 $1, 2, \cdots, p-1$ 分成 $n-1$ 类 $\{1, p-1\}, \{2, p-2\}, \cdots, \{n-1, n\}$.由抽屉原理可知存在 $i \neq j$, 使得 $a_i \equiv a_j \pmod p$ 或者 $a_i + a_j \equiv 0 \pmod p$.
当 $a_i \equiv a_j \pmod p$时,

$$\frac{a_i + a_j}{(a_i, a_j)} > \frac{a_i - a_j}{(a_i, a_j)} \geqslant p = 2n-1,$$

当 $a_i + a_j \equiv 0 \pmod p$时,

$$\frac{a_i + a_j}{(a_i, a_j)} \geqslant p = 2n-1,$$

故(1)得证.

(2) 以下我们来构造命题存在性的例子. 由于 $2n-1$ 为合数, 则存在两个大于 1的正整数 p, q 使得 $2n-1 = pq$. 可以构造如下 n 个数:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, \cdots, a_p = p, a_{p+1} = p+1, a_{p+2} = p+3, \cdots, a_n = pq-p,$$

其中前面为 p 个连续的整数, 从 $p+1$ 至 $pq-p$ 为 $n-p$ 个连续的偶数.
当 $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant p$ 时, 显然有

$$\frac{a_i + a_j}{(a_i, a_j)} \leqslant a_i + a_j \leqslant 2p < 2n-1;$$

当 $p+1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ 时, 因为 $2|(a_i, a_j)$, 所以有

$$\frac{a_i + a_j}{(a_i, a_j)} \leqslant \frac{a_i + a_j}{2} \leqslant pq-p < 2n-1;$$

当 $1 \leqslant i \leqslant p, p+1 \leqslant j \leqslant n$ 时, 分两种情况:

(1) 当 $i \neq p$ 或 $j \neq n$ 时, 显然有

$$\frac{a_i + a_j}{(a_i, a_j)} \leqslant pq - 1 < 2n - 1;$$

(2) 当 $i = p$且 $j = n$ 时, 由于 $(p, pq - p) = p$, 则有

$$\frac{a_p + a_n}{(a_p, a_n)} \leqslant \frac{pq}{p} \leqslant q < 2n - 1.$$

经过如上验证, 可以看出如上构造的一组数满足条件.

3. 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_{11}$ 为给定的 11 个互不相同的正整数, 且总和小于 2007. 在黑板上依次写着 $1,2,\cdots,2007$ 这 2007 个数. 将连续的 22 次操作定义为一个操作组: 第 i 次操作可以从黑板上现有的数中任选一个数, 当 $1\leqslant i\leqslant 11$ 时, 加上 a_i, 当 $12\leqslant i\leqslant 22$ 时, 减去 a_{i-11}. 如果最终结果为 $1,2,\cdots,2007$ 的偶排列, 则称这个操作组为优的; 如果最终结果为 $1,2,\cdots,2007$ 的奇排列, 则称这个操作组为次优的. 问: 优的操作组与次优的操作组哪种多，多多少?

注: $1,2,\cdots,n$ 的一个排列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为偶排列, 如果 $\prod\limits_{i>j}(x_i-x_j)$ 为正数; 否则称为奇排列.

解. 优的操作组更多, 多了 $\prod\limits_{i=1}^{11}a_i$ 个.

我们引入一般的记号: 如果黑板上写着 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数, 一个操作组被定义为 l 次连续操作: 第 i 次操作可以从黑板上现有的数中任选出一个, 加上 b_i, 这里 $b_i\in\mathbb{Z}(1\leqslant i\leqslant l)$. 如果最终结果为 $1,2,\cdots,n$ 的偶(奇)排列, 则称这操作组为优(次优)的, 优的操作组的数目与次优的操作组的数目之差记为 $f(b_1,b_2,\cdots,b_l;n)$. 以下先来讨论 f 的性质.

首先, 对任意 $1\leqslant i,j\leqslant l$, 交换 b_i 与 b_j的取值不会影响 f. 事实上, 只需要将操作组的第 i 次与第 j 次操作对调; 换言之, 第 i 次操作时进行原来的第 j 次操作, 把原来计划进行的第 j 次操作选定的数加上 b_j, 而第 j次操作时进行原来的第 i 次操作. 对调后操作组的结果不变, 因而优(次优)操作组的数目不变, 故 f 不变.

其次, 我们只需要计算这样的优的(次优的)操作组的数目: 每一步操作后, 黑板上没有任何两个数相同, 这样的操作组称为具有性质 P 的操作组. 可以证明, 具有性质 P 的优的操作组数目与次优的操作组数目之差也等于 $f(b_1,b_2,\cdots,b_l;n)$.

事实上, 只要证明, 在不具有性质 P 的操作组中, 优的操作组与次优的操作组一样多. 如果一个操作组最先第 i 步操作导致黑板上出现两个相等的数, 例如第 p 个数和第 q 个数相等($1\leqslant p<q\leqslant n$), 那么对该操作组的后 $l-i$ 步操作进行如下的改动: 对第 p 个数的操作改成对第 q个数进行, 对第 q 个数的操作改成对第 p 个数进行, 那么这个新的操作组最终显示的结果将是在原操作组的结果上对第 p,q 个数进行了对换, 不难发现, 对换一个排列中任何两个数都会导致排列的奇偶性改变. 所以, 优的操作组通过上述改动可以和次优的操作组构成一一对应, 因而不具备性质 P 的操作组中, 优的与次优的一样多.

现在我们对 m 用数学归纳法证明如下的结果:

$a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为 m 个互不相同的正整数且总和小于 n, 则

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_m,-a_1,-a_2,\cdots,-a_m;n)=\prod_{j=1}^{m}a_j. \tag{1}$$

当 $m=1$ 时, 考虑具有性质 P 的优的和次优的操作组, 必然是从后 a_1 个数中选上某个数加上 a_1, 然后再将这个数加上 $-a_1$(否则得不到 $1,2,\cdots,n$ 的排列), 所以优的操组组有 a_1 个, 次优的操作组有 0 个, 故(1)成立.

假设 $m-1$ 时命题成立. 考虑 m 时的命题. 不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$. 根据前面的讨论,

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_m,-a_1,-a_2,\cdots,-a_m;n)=f(a_1,-a_2,-a_3,\cdots,-a_m,a_2,a_3,\cdots,a_m,-a_1;n),$$

这时对于具有性质 P 的优的和次优的操作组来说, 第 1 步操作可以从末 a_1 个数中选取某数加上 a_1, 而第 2 步操作只能对前 a_2 个数进行, 第 3 步操作只能对前 a_2+a_3 个数进行$\cdots\cdots$, 第 m 步操作只能对前 $a_2+\cdots+a_m<n-a_1$ 个数进行, 而第 $m+1\sim 2m-1$ 步操作也只能对前 $n-a_1$ 个数进行, 否则前 $n-a_1$ 个数最终的和小于 $1+2+\cdots+(n-a_1)$, 操作组结束后黑板上的 n个数不为 $1,2,\cdots,n$ 的排列, 第 $2m$ 步操作只能对第 1 步操作时选定的数进行.

因此, 第 $2\sim 2m-2$ 步操作必然是对前 $n-a_1$ 个数进行, 它的结果也要得到 $1,2,\cdots,n-a_1$ 的偶(奇)排列, 才能使总共 $2m$ 步操作的结果得到 $1,2,\cdots,n$ 的偶(奇)排列. 所以, 中间$2m-2$步操作构成的对$n-a_1$个数进行的每个具有性质P的优（次优）的操作组都可以对应a_1个原来的具有性质P的优（次优）的操作组, 于是

$$\begin{aligned}&f(a_1,-a_2,-a_3,\cdots,-a_m,a_2,a_3,\cdots,a_m,-a_1;n)\\=\;&a_1\cdot f(-a_2,-a_3,\cdots,-a_m,a_2,a_3,\cdots,a_m;n-a_1).\end{aligned}$$

根据归纳假设

$$\begin{aligned}&f(-a_2,-a_3,\cdots,-a_m,a_2,a_3,\cdots,a_m;n-a_1)\\=\;&f(a_2,a_3,\cdots,a_m,-a_2,-a_3,\cdots,-a_m;n-a_1)\\=\;&\prod_{j=2}^{m}a_j,\end{aligned}$$

故 (1) 在 m时亦成立.

所以由归纳法, (1) 得证.

在 (1)中取 $n=2007,m=11$, 即得到本题的答案 $\prod\limits_{j=1}^{11}a_j$.

4. 设 O 和 I 分别为 $\triangle ABC$ 的外心和内心, $\triangle ABC$ 的内切圆与边 BC、CA、AB 分别相切于点 D、E、F, 直线 FD 与 CA 相交于点 P, 直线 DE 与 AB 相交于点 Q, 点 M、N 分别为线段 PE、QF 的中点, 求证: $OI \perp MN$.

证明. 考虑三角形 $\triangle ABC$ 与截线 PFD, 由 Menelaus定理, 有

$$\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}=1,$$

所以

$$\frac{PA}{PC}=\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}=\frac{AF}{DC}=\frac{p-a}{p-c}.$$

于是,

$$\frac{PA}{CA}=\frac{p-a}{a-c},$$

因此

$$PA=\frac{b(p-a)}{a-c},$$

这样

$$\begin{aligned}
PE &= PA+AE=\frac{b(p-a)}{a-c}+p-a=\frac{(p-c)(p-a)}{2(a-c)},\\
ME &= \frac{1}{2}PE=\frac{(p-c)(p-a)}{4(a-c)},\\
MA &= ME-AE=\frac{(p-c)(p-a)}{4(a-c)}-(p-a)=\frac{(p-a)^2}{4(a-c)},\\
MC &= ME+EC=\frac{(p-c)(p-a)}{4(a-c)}+(p-c)=\frac{(p-c)^2}{4(a-c)}.
\end{aligned}$$

于是 $MA\cdot MC=ME^2$, 因为 ME 是点 M 到 $\triangle ABC$的内切圆的切线长, 所以 ME^2 是点 M 到内切圆的幂, 而 $MA\cdot MC$ 是点 M 到 $\triangle ABC$ 的外接圆的幂, 等式 $MA\cdot MC=ME^2$ 表明点 M 到 $\triangle ABC$的外接圆与内切圆的幂相等, 因而点 M 在 $\triangle ABC$的外接圆与内切圆的根轴上. 同理, 点 N 也在 $\triangle ABC$的外接圆与内切圆的根轴上. 故 $OI \perp MN$.

5. 设有界数列 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 满足

$$a_n < \sum_{k=n}^{2n+2006} \frac{a_k}{k+1} + \frac{1}{2n+2007}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

证明:

$$a_n < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

证明. 设 $b_n = a_n - \frac{1}{n}$, 则

$$b_n < \sum_{k=n}^{2n+2006} \frac{b_k}{k+1}, \ n \geqslant 1. \tag{1}$$

下证 $b_n < 0$. 因为 a_n 有界, 故存在常数 M, 使得 $b_n < M$. 当 $n > 100000$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} b_n &< \sum_{k=n}^{2n+2006} \frac{b_k}{k+1} \\ &< M \sum_{k=n}^{2n+2006} \frac{1}{k+1} \\ &= M \sum_{k=n}^{[\frac{3n}{2}]} \frac{1}{k+1} + M \sum_{k=[\frac{3n}{2}]+1}^{2n+2006} \frac{1}{k+1} \\ &< M \cdot \frac{1}{2} + M \cdot \frac{\frac{n}{2} + 2006}{\frac{3n}{2} + 1} \\ &< \frac{6}{7} M. \end{aligned}$$

由此可以得到, 对任意的正整数 m 有

$$b_n < \left(\frac{6}{7}\right)^m M.$$

于是有

$$b_n \leqslant 0, \quad n \geqslant 100000.$$

将其代入 (1), 得

$$b_n < 0, \quad n \geqslant 100000.$$

再次利用 (1), 可以得: 如果当 $n \geqslant N+1$时 $b_n < 0$, 则 $b_N < 0$. 这就推出

$$b_n < 0, \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

即

$$a_n < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

6. 试求不小于 9 的最小正整数 n, 满足: 对任给的 n 个整数(可以相同) $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 总存在 9 个数 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_9}(1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_9 \leqslant n)$ 及 $b_i \in \{4,7\}(i=1,2,\cdots,9)$, 使得 $b_1 a_{i_1} + b_2 a_{i_2} + \cdots + b_9 a_{i_9}$ 为 9 的倍数.

解. 取 $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = a_4 = 3$, $a_5 = \cdots = a_{12} = 0$, 则其中任 9 个数均不满足要求, 因此 $n \geqslant 13$. 下证 $n = 13$ 可以. 为此, 只要证明如果 m 个整数(可以相同) $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 中, 不存在 3 个数 $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}$ 及 $b_1, b_2, b_3 \in \{4,7\}$, 使得 $b_1 a_{i_1} + b_2 a_{i_2} + b_3 a_{i_3}$ 为 9 的倍数, 则 $m \leqslant 6$ 或者 $7 \leqslant m \leqslant 8$ 且 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 中有 6个 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_6}$ 及 $b_1, b_2, \cdots, b_6 \in \{4,7\}$ 使得 $9 | b_1 a_{i_1} + b_2 a_{i_2} + \cdots + b_6 a_{i_6}$.

设

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{i \mid 1 \leqslant i \leqslant m, 9 | a_i\}, \\
A_2 &= \{i \mid 1 \leqslant i \leqslant m, a_i \equiv 3 \pmod 9\}, \\
A_3 &= \{i \mid 1 \leqslant i \leqslant m, a_i \equiv 6 \pmod 9\}, \\
A_4 &= \{i \mid 1 \leqslant i \leqslant m, a_i \equiv 1 \pmod 3\}, \\
A_5 &= \{i \mid 1 \leqslant i \leqslant m, a_i \equiv 2 \pmod 3\},
\end{aligned}
$$

则 $|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| = m$ 且
1) 若 $i \in A_2, j \in A_3$, 则 $9 | 4a_i + 4a_j$;
2) 若 $i \in A_4, j \in A_5$, 则 9 能整除 $4a_i + 4a_j$, $4a_i + 7a_j$, $7a_i + 4a_j$ 之一. 这是因为 $4a_i + 4a_j$, $4a_i + 7a_j$, $7a_i + 4a_j$ 均是 3 的倍数且模 9 两两不同余;
3) 若 $i, j, k \in A_2$ 或者 $i, j, k \in A_3$, 则 $9 | 4a_i + 4a_j + 4a_k$;
4) 若 $i, j, k \in A_4$ 或者 $i, j, k \in A_5$, 则 9 能整除 $4a_i + 4a_j + 4a_k$, $4a_i + 4a_j + 7a_k$, $4a_i + 7a_j + 7a_k$ 之一. 这是因为这三个数均是 3 的倍数且模 9 两两不同余.

由假设, 有$|A_i| \leqslant 2 (1 \leqslant i \leqslant 5)$.

若 $|A_1| \geqslant 1$, 则 $|A_2| + |A_3| \leqslant 2$, $|A_4| + |A_5| \leqslant 2$. 这样 $m = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| \leqslant 6$.

下设 $|A_1| = 0$, $m \geqslant 7$, 此时 $7 \leqslant m = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| \leqslant 8$.

因此

$$
\min\{|A_2|, |A_3|\} + \min\{|A_4|, |A_5|\} \geqslant 3.
$$

由 1)和 2) 知存在 $i_1, i_2, \cdots, i_6 \in A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_6$ 及 $b_1, b_2, \cdots, b_6 \in \{4,7\}$ 使 $9 | b_1 a_{i_1} + b_2 a_{i_2} + \cdots + b_6 a_{i_6}$.

综上, 所求的最小的 $n = 13$.