

竞赛之窗

2007 中国数学奥林匹克

第一天

一、设 a, b, c 是给定复数, 记 $|a + b| = m, |a - b| = n$, 已知 $mn \neq 0$. 求证:

$$\max\{|ac + b|, |a + bc|\} \leq \frac{mn}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

(朱华伟 供题)

二、试证明:

(1) 若 $2n - 1$ 为质数, 则对于任意 n 个互不相同的正整数 a_1, a_2, \dots, a_n , 都存在 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得

$$\frac{a_i + a_j}{(a_i, a_j)} \leq 2n - 1;$$

(2) 若 $2n - 1$ 为合数, 则存在 n 个互不相同的正整数 a_1, a_2, \dots, a_n , 使得对任意的 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 都有

$$\frac{a_i + a_j}{(a_i, a_j)} < 2n - 1.$$

其中, (x, y) 表示正整数 x, y 的最大公约数. (李胜宏 供题)

三、已知 a_1, a_2, \dots, a_{11} 为给定的 11 个互不相同的正整数, 且总和小于 2007. 在黑板上依次写着 $1, 2, \dots, 2007$ 这 2007 个数. 将连续的 22 次操作定义为一个操作组: 第 i 次操作可以从黑板上现有的数中任选一个数, 当 $1 \leq i \leq 11$ 时, 加上 a_i ; 当 $12 \leq i \leq 22$ 时, 减去 a_{i-11} . 如果最终结果为 $1, 2, \dots, 2007$ 的偶排列, 则称这个操作组为优的; 如果最终结果为 $1, 2, \dots, 2007$ 的奇排列, 则称这个操作组为次优的. 问: 优的操作组与次优的操作组哪种多, 多多少?

注: $1, 2, \dots, n$ 的一个排列 x_1, x_2, \dots, x_n

称为偶排列, 如果 $(x_i - x_j)$ 为正数; 否则称为奇排列. (刘志鹏 供题)

第二天

四、设 O 和 I 分别为 $\triangle ABC$ 的外心和内心, $\triangle ABC$ 的内切圆与边 BC, CA, AB 分别相切于点 D, E, F , 直线 FD 与 CA 相交于点 P , 直线 DE 与 AB 相交于点 Q , 点 M, N 分别为线段 PE, QF 的中点. 求证: $OI \perp MN$.

(冷岗松 供题)

五、设有界数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$a_n < \sum_{k=n}^{2n+2006} \frac{a_k}{k+1} + \frac{1}{2n+2007}, n=1, 2, \dots$$

证明: $a_n < \frac{1}{n}, n=1, 2, \dots$

(李伟固 供题)

六、试求不小于 9 的最小正整数 n , 满足对任给的 n 个整数 a_1, a_2, \dots, a_n (可以相同), 总存在 9 个数 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_9}$ ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_9 \leq n$) 及 $b_i \in \{4, 7\}$ ($i=1, 2, \dots, 9$), 使得 $b_1 a_{i_1} + b_2 a_{i_2} + \dots + b_9 a_{i_9}$ 为 9 的倍数.

(陈永高 供题)

参考答案

一、证法 1: 因为

$$\max\{|ac + b|, |a + bc|\}$$

$$\leq \frac{|b| + |ac + b| + |a| + |a + bc|}{|b| + |a|}$$

$$\leq \frac{|b(ac + b) - a(a + bc)|}{|a| + |b|} = \frac{|b^2 - a^2|}{|a| + |b|}$$

$$\leq \frac{|b + a| + |b - a|}{\sqrt{2}(|a|^2 + |b|^2)},$$

又 $m^2 + n^2 = |a - b|^2 + |a + b|^2$

$$= 2(|a|^2 + |b|^2),$$

$$\text{所以, } \max\{|ac + b|, |a + bc|\} = \frac{mn}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

证法 2: 注意到

$$ac + b = \frac{1+c}{2}(a+b) - \frac{1-c}{2}(a-b),$$

$$a + bc = \frac{1+c}{2}(a+b) + \frac{1-c}{2}(a-b).$$

$$\text{令 } \begin{cases} u = \frac{1+c}{2}(a+b), \\ v = \frac{1-c}{2}(a-b), \end{cases} \text{ 则}$$

$$|ac + b|^2 + |a + bc|^2 = |u - v|^2 + |u + v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2).$$

$$\text{所以, } (\max\{|ac + b|, |a + bc|\})^2 = \frac{|u|^2 + |v|^2}{2} = \frac{\left|\frac{1+c}{2}\right|^2 m^2 + \left|\frac{1-c}{2}\right|^2 n^2}{2}.$$

因此, 只要证明

$$\left|\frac{1+c}{2}\right|^2 m^2 + \left|\frac{1-c}{2}\right|^2 n^2 \leq \frac{m^2 n^2}{m^2 + n^2},$$

等价变形为

$$\left|\frac{1+c}{2}\right|^2 m^4 + \left|\frac{1-c}{2}\right|^2 n^4 + \left(\left|\frac{1+c}{2}\right|^2 + \left|\frac{1-c}{2}\right|^2\right) m^2 n^2 \leq m^2 n^2.$$

事实上

$$\begin{aligned} & \left|\frac{1+c}{2}\right|^2 m^4 + \left|\frac{1-c}{2}\right|^2 n^4 + \left(\left|\frac{1+c}{2}\right|^2 + \left|\frac{1-c}{2}\right|^2\right) m^2 n^2 \\ &= 2 \left|\frac{1+c}{2}\right| \left|\frac{1-c}{2}\right| m^2 n^2 + \left(\left|\frac{1+2c+c^2}{4}\right| + \left|\frac{1-2c+c^2}{4}\right|\right) m^2 n^2 \\ &= \left(\left|\frac{1-c^2}{2}\right| + \left|\frac{1+2c+c^2}{4}\right| + \left|\frac{1-2c+c^2}{4}\right|\right) m^2 n^2 \\ &= m^2 n^2. \end{aligned}$$

故式 得证.

证法 3: 由已知得

$$\begin{aligned} m^2 &= |a + b|^2 = (a + b)(\overline{a + b}) \\ &= (a + b)(\overline{a} + \overline{b}) = |a|^2 + |b|^2 + \overline{ab} + a\overline{b}, \\ n^2 &= |a - b|^2 = (a - b)(\overline{a - b}) \\ &= (a - b)(\overline{a} - \overline{b}) = |a|^2 + |b|^2 - \overline{ab} - a\overline{b}. \end{aligned}$$

$$\text{故 } |a|^2 + |b|^2 = \frac{m^2 + n^2}{2}, \quad \overline{ab} + a\overline{b} = \frac{m^2 - n^2}{2}.$$

令 $c = x + yi$ ($x, y \in \mathbf{R}$). 于是,

$$|ac + b|^2 + |a + bc|^2 = (ac + b)(\overline{ac + b}) + (a + bc)(\overline{a + bc})$$

$$\begin{aligned} &= |a|^2 |c|^2 + |b|^2 + \overline{abc} + \overline{abc} + |a|^2 + |b|^2 |c|^2 + \overline{abc} + \overline{abc} \\ &= (|c|^2 + 1)(|a|^2 + |b|^2) + (c + \overline{c})(\overline{ab} + ab) \\ &= (x^2 + y^2 + 1) \frac{m^2 + n^2}{2} + 2x \cdot \frac{m^2 - n^2}{2} \\ &= \frac{m^2 + n^2}{2} \cdot x^2 + (m^2 - n^2)x + \frac{m^2 + n^2}{2} \\ &= \frac{m^2 + n^2}{2} \left(x + \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \right)^2 - \frac{m^2 + n^2}{2} \left(\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \right)^2 + \frac{m^2 + n^2}{2} \\ &= \frac{m^2 + n^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(m^2 - n^2)^2}{m^2 + n^2} \\ &= \frac{2m^2 n^2}{m^2 + n^2}. \end{aligned}$$

$$\text{则 } (\max\{|ac + b|, |a + bc|\})^2 \leq \frac{m^2 n^2}{m^2 + n^2}, \text{ 即}$$

$$\max\{|ac + b|, |a + bc|\} \leq \frac{mn}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

二、(1) 记 $2n - 1$ 为质数 p , 不妨设

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1.$$

若存在 $i(1 \leq i \leq n)$, 使得 $p | a_i$, 必然存在 $j \neq i$, 使得 $p \nmid a_j$. 由于 $p \nmid (a_i, a_j)$, 则有

$$\frac{a_i + a_j}{(a_i, a_j)} \equiv \frac{a_i}{(a_i, a_j)} \pmod{p=2n-1}.$$

以下只要考虑 $(a_i, p) = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 则对任意 $i \neq j$ 都有 $p \nmid (a_i, a_j)$. 将 $1, 2, \dots, p - 1$ 分成 $n - 1$ 类 $\{1, p - 1\}, \{2, p - 2\}, \dots, \{n - 1, n\}$. 由抽屉原理可知, 存在 $i \neq j$, 使得

$$a_i \equiv a_j \pmod{p} \text{ 或者 } a_i + a_j \equiv 0 \pmod{p}.$$

当 $a_i \equiv a_j \pmod{p}$ 时,

$$\frac{a_i + a_j}{(a_i, a_j)} > \frac{a_i - a_j}{(a_i, a_j)} \pmod{p=2n-1};$$

当 $a_i + a_j \equiv 0 \pmod{p}$ 时,

$$\frac{a_i + a_j}{(a_i, a_j)} \pmod{p=2n-1}.$$

故(1)得证.

(2) 下面构造命题存在性的例子.

由于 $2n - 1$ 为合数, 则存在两个大于 1 的正整数 p, q , 使得 $2n - 1 = pq$. 可以构造如下 n 个数:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, a_2 = 2, \dots, a_p = p, a_{p+1} = p + 1, \\ a_{p+2} &= p + 3, \dots, a_n = pq - p, \end{aligned}$$

其中, 前面为 p 个连续的整数, 从 $p + 1$ 至 $pq - p$ 为 $n - p$ 个连续的偶数.

当 $1 \leq i < j \leq p$ 时, 显然有

$$\frac{a_i + a_j}{(a_i, a_j)} \equiv a_i + a_j \pmod{2p < 2n - 1}.$$

当 $p+1 \leq i < j \leq n$ 时, 因为 $2 \mid (a_i, a_j)$, 所以, 有

$$\frac{a_i + a_j}{(a_i, a_j)} = \frac{a_i + a_j}{2} \quad pq - p < 2n - 1.$$

当 $1 \leq i < p, p+1 \leq j \leq n$ 时, 分两种情况:

(i) 当 $i < p$ 或 $j \leq n$ 时, 显然有

$$\frac{a_i + a_j}{(a_i, a_j)} = pq - 1 < 2n - 1;$$

(ii) 当 $i = p$ 且 $j = n$ 时, 由 $(p, pq - p) = p$, 则有

$$\frac{a_p + a_n}{(a_p, a_n)} = \frac{pq}{p} = q < 2n - 1.$$

经过如上验证, 可以看出如上构造的一组数满足条件.

3. 优的操作组更多, 多了 $\prod_{i=1}^{n-1} a_i$ 个.

我们引入一般的记号: 如果黑板上写着 $1, 2, \dots, n$ 这 n 个数, 一个操作组被定义为 l 次连续操作: 第 i 次操作可以从黑板上现有的数中任选出一个, 加上 b_i , 这里 $b_i \in \mathbf{Z} (1 \leq i \leq l)$. 如果最终结果为 $1, 2, \dots, n$ 的偶(奇)排列, 则称此操作为优(次优)的. 优的操作组的数目与次优的操作组的数目之差记为 $f(b_1, b_2, \dots, b_l; n)$.

下面讨论 f 的性质.

首先, 对任意 $1 \leq i, j \leq l$, 交换 b_i 与 b_j 的取值不会影响 f . 事实上, 只需要将操作组的第 i 次与第 j 次操作对调; 换言之, 第 i 次操作时进行原来的第 j 次操作, 把原来计划进行的第 j 次操作选定的数加上 b_j , 而第 j 次操作时进行原来的第 i 次操作. 对调后操作组的结果不变, 因而, 优(次优)操作组的数目不变, 故 f 不变.

其次, 只需要计算这样的优的(次优的)操作组的数目: 每一步操作后, 黑板下没有任何两个数相同, 这样的操作组称为具有性质 P 的操作组. 可以证明: 具有性质 P 的优的操作组数目与次优的操作组数目之差也等于 $f(b_1, b_2, \dots, b_l; n)$.

事实上, 只要证明, 在不具有性质 P 的操作组中, 优的操作组与次优的操作组一样多. 如果一个操作组最先第 i 步操作导致黑板上出现两个相等的数, 例如, 第 p 个数和第 q 个数相等 ($1 \leq p < q \leq n$), 那么, 对该操作组的后 $l - i$ 步操作进行如下的改动: 对第 p 个数的操作改成对第 q 个数进行, 对第 q 个数的操作改成对第 p 个数进行, 那么, 这个新的操作组最终显示的结果将是在原操作组的结果上对第 p, q 个数进行了对换, 不难发现, 对换一个排列中任何两个数都会导致排列的奇偶性改变. 所以, 优的操作组通过上述改动可以和次优的操作组构成一一对

应. 因而, 不具备性质 P 的操作组中, 优的与次优的一样多.

现在对 m 用数学归纳法证明:

若 a_1, a_2, \dots, a_m 为 m 个互不相同的正整数且总和小于 n , 则

$$f(a_1, a_2, \dots, a_m, -a_1, -a_2, \dots, -a_m; n) = \prod_{j=1}^m a_j.$$

当 $m = 1$ 时, 考虑具有性质 P 的优的和次优的操作组, 必然是从后 a_1 个数中选出某个数加上 a_1 , 然后再将这个数加上 $-a_1$ (否则得不到 $1, 2, \dots, n$ 的排列), 所以, 优的操作组有 a_1 个, 次优的操作组有 0 个. 故式 (1) 成立.

假设 $m - 1$ 时命题成立. 考虑 m 时的命题.

不妨设 $a_1 < a_2 < \dots < a_m$. 根据前面的讨论,

$$f(a_1, a_2, \dots, a_m, -a_1, -a_2, \dots, -a_m; n) = f(a_1, -a_2, -a_3, \dots, -a_m, a_2, a_3, \dots, a_m, -a_1; n),$$

这时, 对于具有性质 P 的优的和次优的操作组来说, 第 1 步操作可以从后 a_1 个数中选取某数加上 a_1 , 而第 2 步操作只能对前 a_2 个数进行, 第 3 步操作只能对前 $a_2 + a_3$ 个数进行, ..., 第 m 步操作只能对前 $a_2 + \dots + a_m < n - a_1$ 个数进行, 而第 $m + 1 \sim 2m - 1$ 步操作也只能对前 $n - a_1$ 个数进行 (否则, 前 $n - a_1$ 个数最终的和小于 $1 + 2 + \dots + (n - a_1)$, 操作组结束后黑板上的 n 个数不为 $1, 2, \dots, n$ 的排列), 第 $2m$ 步操作只能对第 1 步操作时选定的数进行.

因此, 第 $2 \sim 2m - 2$ 步操作必然是对前 $n - a_1$ 个数进行, 它的结果也要得到 $1, 2, \dots, n - a_1$ 的偶(奇)排列, 才能使总共 $2m$ 步操作的结果得到 $1, 2, \dots, n$ 的偶(奇)排列. 所以, 中间 $2m - 2$ 步操作构成的对 $n - a_1$ 个数进行的每个具有性质 P 的优(次优)的操作组都可以对应 a_1 个原来的具有性质 P 的优(次优)的操作组. 于是,

$$f(a_1, -a_2, -a_3, \dots, -a_m, a_2, a_3, \dots, a_m, -a_1; n) = a_1 f(-a_2, -a_3, \dots, -a_m, a_2, a_3, \dots, a_m; n - a_1).$$

根据归纳假设

$$f(-a_2, -a_3, \dots, -a_m, a_2, a_3, \dots, a_m; n - a_1) = f(a_2, a_3, \dots, a_m, -a_2, -a_3, \dots, -a_m; n - a_1) = \prod_{j=2}^m a_j.$$

故式 (1) 在 m 时亦成立.

所以, 由归纳法, 式 (1) 得证.

在式 (1) 中取 $n = 2007, m = 11$, 即得到本题的答

案 $\prod_{j=1}^n a_j$.

四、不妨设 $a > c$. 考虑 $\triangle ABC$ 与截线 PFD , 由梅涅劳斯定理有 $\frac{CF}{PA} \cdot \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} = 1$. 所以,

$$\frac{PA}{PC} = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} = \frac{AF}{DC} = \frac{p-a}{p-c}.$$

于是, $\frac{PA}{CA} = \frac{p-a}{a-c}$. 因此, $PA = \frac{b(p-a)}{a-c}$.

$$\text{则 } PE = PA + AE = \frac{b(p-a)}{a-c} + p - a$$

$$= \frac{2(p-c)(p-a)}{a-c},$$

$$ME = \frac{1}{2} PE = \frac{(p-c)(p-a)}{a-c},$$

$$MA = ME - AE = \frac{(p-c)(p-a)}{a-c} - (p-a) = \frac{(p-a)^2}{a-c},$$

$$MC = ME + EC = \frac{(p-c)(p-a)}{a-c} + (p-c) = \frac{(p-c)^2}{a-c}.$$

于是, $MA \cdot MC = ME^2$.

因为 ME 是点 M 到 $\triangle ABC$ 的内切圆的切线长, 所以, ME^2 是点 M 到内切圆的幂. 而 $MA \cdot MC$ 是点 M 到 $\triangle ABC$ 的外接圆的幂, 等式 $MA \cdot MC = ME^2$ 表明, 点 M 到 $\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆的幂相等. 因而, 点 M 在 $\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆的根轴上.

同理, 点 N 也在 $\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆的根轴上.

故 $OI \perp MN$.

五、设 $b_n = a_n - \frac{1}{n}$, 则

$$b_n < \prod_{k=n}^{2n+2006} \frac{b_k}{k+1} \quad (n \geq 1).$$

下证 $b_n < 0$.

因为 a_n 有界, 故存在常数 M , 使得 $b_n < M$.

当 $n \geq 100000$ 时, 有

$$\begin{aligned} b_n &< \prod_{k=n}^{2n+2006} \frac{b_k}{k+1} < M \prod_{k=n}^{2n+2006} \frac{1}{k+1} \\ &= M \prod_{k=n}^{\lfloor \frac{3}{2}n \rfloor} \frac{1}{k+1} + M \prod_{k=\lfloor \frac{3}{2}n \rfloor+1}^{2n+2006} \frac{1}{k+1} \\ &< M \cdot \frac{1}{2} + M \cdot \frac{2}{\frac{3}{2}n+1} < \frac{6}{7} M. \end{aligned}$$

由此可以得到, 对任意的正整数 m 有

$$b_n < \left(\frac{6}{7}\right)^m M.$$

于是, $b_n < 0$ ($n \geq 100000$).

将其代入式 得 $b_n < 0$ ($n \geq 100000$).

再次利用式 可得, 如果当 $n \geq N+1$ 时, $b_n < 0$, 则 $b_N < 0$. 这就推出 $b_n < 0$ ($n = 1, 2, \dots$), 即

$$a_n < \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

六、取 $a_1 = a_2 = 1, a_3 = a_4 = 3, a_5 = \dots = a_{12} = 0$, 则其中任 9 个数均不满足要求. 因此, $n \geq 13$.

下证 $n = 13$ 可以. 为此, 只要证明如果 m 个整数 a_1, a_2, \dots, a_m (可以相同) 中, 不存在 3 个数 a_i, a_j, a_k 及 $b_1, b_2, b_3 \in \{4, 7\}$, 使得 $b_1 a_i + b_2 a_j + b_3 a_k$ 为 9 的倍数, 则 $m \leq 6$ 或者 $7 \leq m \leq 8$ 且 a_1, a_2, \dots, a_m 中有 6 个数 a_1, a_2, \dots, a_6 及 $b_1, b_2, \dots, b_6 \in \{4, 7\}$ 使得 $9 \mid (b_1 a_1 + b_2 a_2 + \dots + b_6 a_6)$.

$$\text{设 } A_1 = \{i \mid 1 \leq i \leq m, 9 \mid a_i\},$$

$$A_2 = \{i \mid 1 \leq i \leq m, a_i \equiv 3 \pmod{9}\},$$

$$A_3 = \{i \mid 1 \leq i \leq m, a_i \equiv 6 \pmod{9}\},$$

$$A_4 = \{i \mid 1 \leq i \leq m, a_i \equiv 1 \pmod{3}\},$$

$$A_5 = \{i \mid 1 \leq i \leq m, a_i \equiv 2 \pmod{3}\}.$$

则 $|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| = m$, 且

(1) 若 $i \in A_2, j \in A_3$, 则 $9 \mid (4a_i + 4a_j)$;

(2) 若 $i \in A_4, j \in A_5$, 则 9 能整除 $4a_i + 4a_j, 4a_i + 7a_j, 7a_i + 4a_j$ 之一 (因为这三个数均是 3 的倍数且模 9 两两不同余);

(3) 若 $i, j, k \in A_2$ 或者 $i, j, k \in A_3$, 则

$$9 \mid (4a_i + 4a_j + 4a_k);$$

(4) 若 $i, j, k \in A_4$ 或者 $i, j, k \in A_5$, 则 9 能整除 $4a_i + 4a_j + 4a_k, 4a_i + 4a_j + 7a_k, 4a_i + 7a_j + 7a_k$ 之一 (因为这三个数均是 3 的倍数且模 9 两两不同余).

由假设, 有 $|A_i| \leq 2$ ($1 \leq i \leq 5$).

若 $|A_1| = 1$, 则

$$|A_2| + |A_3| \leq 2, |A_4| + |A_5| \leq 2.$$

这样, $m = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| \leq 6$.

下设 $|A_1| = 0, m \geq 7$, 此时

$$7 \leq m = |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| \leq 8.$$

因此, $\min\{|A_2|, |A_3|\} + \min\{|A_4|, |A_5|\} \geq 3$.

由 (i) 和 (ii) 知, 存在 $i_1, i_2, \dots, i_6 \in A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5, i_1 < i_2 < \dots < i_6$ 及 $b_1, b_2, \dots, b_6 \in \{4, 7\}$ 使 $9 \mid (b_1 a_{i_1} + b_2 a_{i_2} + \dots + b_6 a_{i_6})$.

综上所述, 所求的最小的 $n = 13$.

(朱华伟 提供)