数学奥林匹克初中训练题(8)

第 一 试

一、选择题(每小题 7 分,共 42 分)

1. 如果 a、b、c 是三个任意的整数,那么,$\frac{a+b}{2}$、$\frac{b+c}{2}$、$\frac{c+a}{2}$中( ).

(A)都不是整数 (B)至少有一个整数

(C)都是整数 (D)至少有两个整数

2. 如图 1,E、F 分别是长方形 $ABCD$ 边 AD、BC 上的点,且△ABG、△DCH 的面积分别为 15、20. 则图 1 中阴影部分的面积为( ).

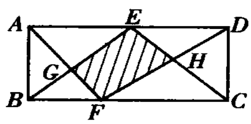

图 1

(A)15 (B)20 (C)35 (D)40

3. 能判定四边形 $ABCD$ 是菱形的条件是( ).

(A)对角线 AC 平分对角线 BD,且 $AC\perp BD$

(B)对角线 AC 平分对角线 BD,且 $\angle A=\angle C$

(C)对角线 AC 平分对角线 BD,且平分 $\angle A$、$\angle C$

(D)对角线 AC 平分 $\angle A$、$\angle C$,且 $\angle A=\angle C$

4. 当 $x-y=1$ 时,$x^4-xy^3-x^3y-3x^2y+3xy^2+y^4$ 的值为( ).

(A) -1 (B)0 (C)1 (D)2

5. 设 b 取 1 到 11 之间的偶数,c 取任意正整数. 则可以组成有两个不相等实数根的一元二次方程 $x^2-bx+c=0$ ( )个.

(A)50 (C)55 (C)57 (D)58

6. 甲、乙、丙、丁四人做相互传球游戏,第一次甲传给其他三人中的一人,第二次由拿到球的人再传给其他三人中的一人,这样的传球共进行了 4 次. 则第四次仍传回到甲的概率是( ).

(A)$\frac{7}{27}$ (B)$\frac{5}{27}$ (C)$\frac{7}{8}$ (D)$\frac{21}{64}$

二、填空题(每小题 7 分,共 28 分)

1. 已知 $a+b+c=0$, $a>b>c$. 则$\frac{c}{a}$的取值范围是______.

2. 计算:$\frac{1^2}{1^2-100+5\,000}+\frac{3^2}{3^2-300+5\,000}+\frac{5^2}{5^2-500+5\,000}+\cdots+\frac{99^2}{99^2-9\,900+5\,000}=$______.

3. 如图 2,以 Rt△ABC 的三边为边分别向外作面积各为 S_1、S_2、S_3 的半圆、正方形和正三角形,则显然有 $S_1=S_2+S_3$.

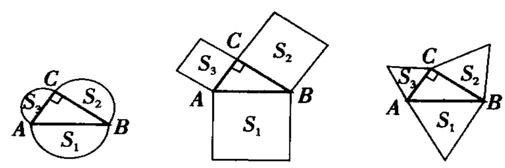

图 2

分别以 Rt△ABC 的三边为边向外作三个面积各为 S_1、S_2、S_3 的任意三角形,且 $S_1=S_2+S_3$. 类比以上结论,则这三个三角形满足的一个条件是______.

4. 5 支足球队进行循环比赛(每两支球队都赛一场),已知甲队已赛 3 场,乙队比甲队赛的场数多,丙队比甲队赛的场数少,丁队

与戊队赛的场数一样多,但丁队与戊队没赛过.那么,总比赛场数是______.

第 二 试

一、(20 分) 已知 t 是一元二次方程 $x^2-x-1=0$ 的一个根.对任意的有理数 a,有理数 b、c 满足 $(at+1)(bt+c)=1$.

(1) 求 b 和 c(用 a 的代数式表示);

(2) 是否存在这样的有理数 a,使得 b 或 c 中至少有一个等于 $\frac{1}{2\ 008}$?若存在,求出这样的 a 值;若不存在,说明理由.

二、(25 分) 团体购买某公园门票,票价如表 1:

表 1

购票人数	1~50	51~100	100 以上
每人门票价	13 元	11 元	9 元

今有甲、乙两个旅游团,若分别购票,两团总计应付门票费 1 314 元;若合在一起作为一个团体购票,总计支付门票费 1 008 元.问这两个旅游团各有多少人?

三、(25 分) 如图 3,$\triangle ABC$ 被三条共点直线 AD、BE、CF 分成六个小三角形.若 $\triangle BPF$、$\triangle CPD$、$\triangle APE$ 的面积均为 1,求 $\triangle APF$、$\triangle DPB$、$\triangle EPC$ 的面积.

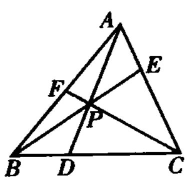

图 3

参 考 答 案

第 一 试

一、**1.** C.

注意到三个任意整数 a、b、c 中至少有两个数的奇偶性相同,不妨设这两个数为 a、b,则 $\frac{a+b}{2}$ 为整数.

2. C.

联结 EF.在梯形 $ABEF$ 中,由 $S_{\triangle EGF}=S_{\triangle ABG}$,得 $S_{\triangle EGF}=15$.

同理,$S_{\triangle EFH}=20$.

所以,阴影部分面积为 35.

3. D.

如图 4,AC 平分 BD,$AC\perp BD$,AC 也平分 $\angle A$ 和 $\angle C$,故可排除选项(A)、(C).而选项(B)的条件只能推出四边形 $ABCD$ 是平行四边形,故排除选项(B).

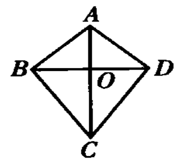

图 4

4. C.

当 $x-y=1$ 时,

$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$=x^2+xy+y^2=(x-y)^2+3xy=1+3xy$,

故 $x^4-xy^3-x^3y-3x^2y+3xy^2+y^4$

$=x(x^3-y^3)+y(y^3-x^3)+3xy(y-x)$

$=(x-y)(x^3-y^3)-3xy(x-y)$

$=1+3xy-3xy=1$.

5. A.

当 $b=2$ 时,由 $b^2-4c=4-4c>0$,得 $c<1$,无解;

当 $b=4$ 时,由 $b^2-4c=16-4c>0$,得 $c<4$,所以,$c=1,2,3$;

当 $b=6$ 时,由 $b^2-4c=36-4c>0$,得 $c<9$,所以,$c=1,2,\cdots,8$;

当 $b=8$ 时,由 $b^2-4c=64-4c>0$,得 $c<16$,所以,$c=1,2,\cdots,15$;

当 $b=10$ 时,由 $b^2-4c=100-4c>0$,得 $c<25$,所以,$c=1,2,\cdots,24$.

故满足条件的方程共有

$3+8+15+24=50$(个).

6. A.

画树状图如图 5.

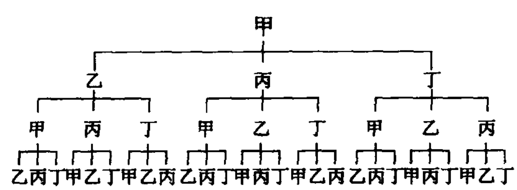

图 5

由图 5 可知,第三次传球不能传给甲.能传给甲的有 6 次,所以,满足条件的有 $27-6=21$ 次.4 次传球的种数为 3^4,故满足条件的概率为 $\frac{21}{3^4}=\frac{7}{27}$.

二、**1.** $-2<\frac{c}{a}<-\frac{1}{2}$.

由 $a+b+c=0$, $a>b>c$, 得 $a>0$, $c<0$.

由 $1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=0$, 得

$$\frac{b}{a}=-1-\frac{c}{a}. \qquad ①$$

由 $a>b>c$, 得

$$1>\frac{b}{a}>\frac{c}{a}. \qquad ②$$

将式①代入式②得

$$1>-1-\frac{c}{a}>\frac{c}{a}.$$

解得 $-2<\frac{c}{a}<-\frac{1}{2}$.

2. 50.

注意到

$$\frac{k^2}{k^2-100k+5000}+\frac{(100-k^2)}{(100-k)^2-100(100-k)+5000}$$
$$=\frac{k^2}{k^2-100k+5000}+\frac{10000-200k+k^2}{k^2-100k+5000}$$
$$=\frac{2(k^2-100k+5000)}{k^2-100k+5000}=2.$$

令 $k=1,3,5,\cdots,49$, 相加, 知原式 $=2\times25=50$.

3. 三个三角形相似.

若这三个三角形相似, 由相似三角形面积比等于相似比的平方得

$$S_1:S_2:S_3=AB^2:BC^2:CA^2.$$

在 Rt $\triangle ABC$ 中, 有 $AB^2=BC^2+CA^2$.

所以, $S_1=S_2+S_3$.

4. 6.

乙队已赛过 4 场. 若丙队只赛过 1 场, 则丙队与甲队没赛过, 甲队必与丁、戊两队赛过, 故丁、戊两队均赛过 2 场. 于是, 总比赛场数是

$$(3+4+1+2+2)\div2=6.$$

若丙队赛过 2 场, 戊、丁两队均赛过 x 场, 则有 $3+4+2+x+x=9+2x$ 不是偶数, 引出矛盾.

第 二 试

一、(1) 因 t 是 $x^2-x-1=0$ 的根, 则, $t^2=t+1$.

由 $(at+1)(bt+c)=1$, 得

$$abt^2+act+bt+c-1=0,$$

即 $$ab(t+1)+act+bt+c-1=0.$$

从而, $(ab+ac+b)t+ab+c-1=0$.

又 t 是无理数, a、b、c 是有理数, 所以,

$$\begin{cases}ab+ac+b=0,\\ ab+c-1=0.\end{cases}$$

解得 $b=\frac{a}{a^2-a-1}$, $c=-\frac{a+1}{a^2-a-1}$.

(2) 不存在.

若 $b=\frac{1}{2008}$, 则 $\frac{a}{a^2-a-1}=\frac{1}{2008}$, 即

$$a^2-2009a-1=0,$$

此方程的根是无理数.

若 $c=\frac{1}{2008}$, 则 $-\frac{a+1}{a^2-a-1}=\frac{1}{2008}$, 即

$$a^2+2007a+2007=0,$$

此方程无有理数根.

故满足条件的有理数 a 不存在.

二、人数若不超过 100 人, 费用至多 1 300 元, 所以, 两个旅游团的总人数超过 100 人.

又 $1008\div9=112$, 知两个旅游团总人数为 112 人.

设两个旅游团人数分别为 x 人、y 人. 由 $x+y=112$, 知 x、y 中至少有一个大于 50. 又由 $112\times11=1232<1314$, 可知 x 与 y 不会都大于 50.

若一个旅游团超过 100 人, 另一个旅游团不足 12 人时, 门票总钱数至多为

$$900+13\times12=1056<1314.$$

于是, 可以断定有一个旅游团人数不超过 50 人, 另一个旅游团人数超过 50 人但不超过 100 人.

不妨设 $1\leq x\leq50$, $51\leq y\leq100$, 则有

$$\begin{cases}x+y=112,\\ 13x+11y=1314.\end{cases}$$

解得 $x=41$, $y=71$.

故两个旅游团的人数分别为 41 人和 71 人.

三、设 $\triangle APF$、$\triangle DPB$、$\triangle EPC$ 的面积分别为 x、y、z.

因为 $\frac{S_{\triangle DPB}}{S_{\triangle DPC}}=\frac{BD}{DC}$, $\frac{S_{\triangle DAB}}{S_{\triangle DAC}}=\frac{BD}{DC}$,

则 $\frac{S_{\triangle DPB}}{S_{\triangle DPC}}=\frac{S_{\triangle DAB}}{S_{\triangle DAC}}$, 即 $\frac{y}{1}=\frac{x+y+1}{z+2}$.

所以, $x-y=yz-1$.

同理, $y-z=zx-1$, $z-x=xy-1$.

不妨设 $x\geq y\geq z$, 则

$$yz-1=x-y\geq0,\ xy-1=z-x\leq0.$$

于是, 有 $xy\leq yz$, 即 $x\leq z$.

因此, $x=y=z$.

由 $0=x-y=yz-1=z^2-1$, 得 $z=1$.

所以, $x=y=z=1$.

故所求三个三角形的面积均为 1.

(鲁有专　南京大学附属中学, 210008)