数学奥林匹克初中训练题(4)

第 一 试

一、选择题(每小题 7 分,共 42 分)

1. 已知 A、B 两地间有 6 条网线并联,它们能通过的最大信息量分别是 1,1,2,2,3,4. 现从中任选三条网线且使这三条网线通过的最大信息量的和大于或等于 6 的方法共有(　　)种.

(A) 13　(B) 14　(C) 15　(D) 16

2. 设 a、b、c 是互不相等的任意正数,

$$x=\frac{b^2+1}{a},\ y=\frac{c^2+1}{b},\ z=\frac{a^2+1}{c}.$$

则 x、y、z 这三个数(　　).

(A) 都不大于 2　(B) 至少有一个大于 2

(C) 都不小于 2　(D) 至少有一个小于 2

3. 在凸四边形 $ABCD$ 中,$\angle B=\angle D=90°$,$AD=DC$. 若 $S_{四边形ABCD}=12$,则 $AB+BC=$(　　).

(A) 6　(B) $4\sqrt{3}$　(C) $5\sqrt{2}$　(D) $3\sqrt{6}$

4. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图像如图 1 所示. 记

$$p=|a-b+c|+|2a+b|,$$
$$q=|a+b+c|+|2a-b|.$$

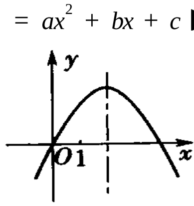

图 1

则有(　　).

(A) $p>q$　(B) $p=q$　(C) $p<q$

(D) p、q 的大小关系不能确定

5. 若 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 为互不相等的正奇数,且满足

$$(2\,005-x_1)(2\,005-x_2)(2\,005-x_3)\cdot(2\,005-x_4)(2\,005-x_5)=24^2,$$

则 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2$ 的末位数字是(　　).

(A) 1　(B) 3　(C) 5　(D) 7

6. 如图 2,在梯形 $ABCD$ 中,$DC\parallel AB$,过 AC 与 BD 的交点作 $MN\parallel AB$,点 M、N 分别在 AD、BC 上. 则 AB、DC、MN 所满足的关系式是(　　).

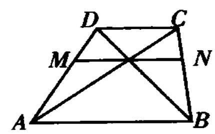

图 2

(A) $AB+DC=\sqrt{5}MN$

(B) $AB\cdot DC=MN^2$

(C) $\frac{AB}{MN}-1=\frac{MN}{DC}-1$

(D) $\frac{1}{AB}+\frac{1}{DC}=\frac{2}{MN}$

二、填空题(每小题 7 分,共 28 分)

1. 如图 3 所示的数阵的第 n 行第二个数是______.

1
3　3
5　6　5
7　11　11　7
9　18　22　18　9
……………………

图 3

2. 关于 x 的一元二次方程

$$m^2x^2+(2m+3)x+1=0$$

有两个乘积为 1 的实数根;关于 x 的一元二次方程

$$x^2+(2a+m)x+2a+1-m^2=0$$

有一个大于 0 且小于 4 的实数根. 则 a 的整数值是______.

3. 在某届篮球赛事中,小明共打了 10 场球. 他在第 6、7、8、9 场比赛中分别得 23 分、14 分、11 分和 20 分. 他的前 9 场比赛的平均得分比前 5 场比赛的平均得分要高. 若他所

打的 10 场比赛的平均得分超过 18 分，则他在第 10 场比赛中得分的最小值是______.

4. 如图 4，$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，$BC = a$，$CA = b$，且 $\angle A - \angle B = 90°$. 则 $\odot O$ 的半径为______.

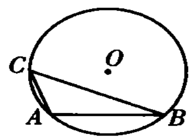

图 4

第 二 试

一、(20 分) 证明：存在正常数 c，使得对所有实数 x、y、z，有

$$1 + |x + y + z| + |xy + yz + zx| + |xyz| > c(|x| + |y| + |z|).$$

二、(25 分) 如图 5，以锐角 $\triangle ABC$ 的边 AB 为直径作半圆 $\odot O$ 交边 BC、CA 于点 E、F. 过点 E、F 分别作 $\odot O$ 的切线得交点 P. 求证：

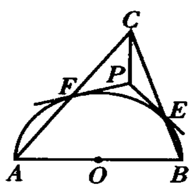

图 5

$CP \perp AB$.

三、(25 分) 已知二次函数

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

的图像过点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$，且满足

$$a^2 + (y_1 + y_2)a + y_1 y_2 = 0.$$

(1) 证明：$y_1 = -a$ 或 $y_2 = -a$；

(2) 证明：函数 $f(x)$ 的图像必与 x 轴有两个交点；

(3) 若关于 x 的不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $\{x \mid x > m$ 或 $x < n\}$ $(n < m < 0)$，解关于 x 的不等式 $cx^2 - bx + a > 0$.

参 考 答 案

第 一 试

一、**1.** C.

如图 6，依题意，第五、第六条网线必须至少有一条使用.

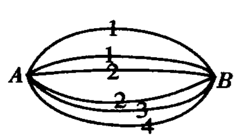

图 6

若选择第六条网线，则前五条网线中任选两条皆可，共有 10 种选法；

若选择第五条网线，则再选择第四、第三条 (3，2，2) 有 1 种选法；或从第三、第四条与第一、第二条中分别任选一条 (3，2，1) 有 $2 \times 2 = 4$ 种选法，此时，有 $1 + 4 = 5$ 种选法.

综上所述，共有 $10 + 5 = 15$ 种选法.

2. B.

注意到

$$xyz = \frac{b^2+1}{a} \cdot \frac{c^2+1}{b} \cdot \frac{a^2+1}{c}$$

$$= \frac{b^2+1}{b} \cdot \frac{c^2+1}{c} \cdot \frac{a^2+1}{a}$$

$$= \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)\left(c + \frac{1}{c}\right).$$

而 a、b、c 是互不相等的正数，所以，

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2,\ b + \frac{1}{b} \geqslant 2,\ c + \frac{1}{c} \geqslant 2,$$

且等号不能同时成立.

因此，$xyz > 8$. 故 x、y、z 中至少有一个大于 2.

3. B.

如图 7，将 $\triangle DAB$ 旋转到 $\triangle DCK$ 的位置.

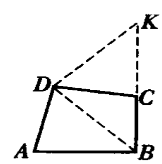

图 7

因为 $AD = DC$，所以，点 A 必重合于点 C.

因为 $\angle B = \angle D = 90°$，

所以，$\angle A + \angle C = 180°$.

故 B、C、K 三点共线.

此时，$\triangle DBK$ 为等腰直角三角形，则

$$S_{\triangle DBK} = S_{四边形ABCD} = 12.$$

所以，$DB = DK = 2\sqrt{6}$.

故 $AB + BC = BK = \sqrt{2}DB = 4\sqrt{3}$.

4. C.

由图 1 知，$f(0) = c = 0$，$f(1) = a + b + c > 0$，则 $a + b > 0$，$f(-1) = a - b + c = a - b < 0$.

又由 $a < 0$ 且对称轴 $x = -\dfrac{b}{2a} > 1$，得 $2a + b > 0$.

而 $2a - b = a + (a - b) < 0$，所以，

$$p = -(a - b) + (2a + b) = a + 2b,$$

$$q = (a + b) - (2a - b) = -a + 2b.$$

因为 $p - q = (a + 2b) - (-a + 2b) = 2a < 0$，故 $p < q$.

5. A.

因为 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 为互不相等的正奇数，所

以,已知等式左端 5 个因式为互不相等的偶数.而 24^2 分解为 5 个互不相等偶数之积,只有唯一的形式

$$24^2 = 2\times(-2)\times4\times6\times(-6),$$

所以,5 个因式 $(2\,005 - x_i)$ $(i = 1,2,3,4,5)$ 应分别等于 $2,-2,4,6,-6$.

故 $(2\,005 - x_1)^2 + (2\,005 - x_2)^2 + (2\,005 - x_3)^2 + (2\,005 - x_4)^2 + (2\,005 - x_5)^2$

$= 2^2 + (-2)^2 + 4^2 + 6^2 + (-6)^2 = 96.$

将上式左边展开,有

$5\times2\,005^2 - 4\,010(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2) = 96,$

故 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$

$= 96 - 5\times2\,005^2 + 4\,010(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$

$\equiv 1 \pmod{10}.$

6. D.

设 AC 与 BD 的交点为 O.

由相似三角形性质知

$$\frac{MO}{AB} = \frac{DO}{DB} = \frac{CO}{CA} = \frac{ON}{AB}.$$

所以,$MO = ON$,$MN = 2MO$.

又 $\frac{MO}{DC} + \frac{MO}{AB} = \frac{AM}{AD} + \frac{DM}{AD} = 1$,则

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{DC} = \frac{1}{MO} = \frac{2}{2MO} = \frac{2}{MN}.$$

二、1. $n^2 - 2n + 3$.

第 n 行第二个数为

$3 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 3)$

$= 2 + (1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2n - 3)$

$= 2 + \frac{(1 + 2n - 3)(n - 1)}{2} = n^2 - 2n + 3.$

2. -1.

依题意有 $m^2 = 1$,$m = \pm1$,且

$\Delta = (2m + 3)^2 - 4m^2 = 12m + 9 > 0.$

故 $m = 1$.

令 $f(x) = x^2 + (2a + 1)x + 2a$,应有

$f(0)f(4) = 2a(20 + 10a) < 0,$

即 $a(a + 2) < 0$.

所以,$-2 < a < 0$.故 $a = -1$.

3. 29.

设前 5 场比赛的平均分为 x,于是,前 9 场的平均分为

$$\frac{5x + 23 + 14 + 11 + 20}{9} = \frac{5x + 68}{9}.$$

依题意得 $\frac{5x + 68}{9} > x$.

解得 $x < 17$.

故前 5 场比赛的总分至多为 $5\times17 - 1 = 84$ 分.

设第 10 场比赛的得分为 y,则他所打的 10 场比赛得分至少为 $18\times10 + 1 = 181$ 分.

于是,有 $y + 84 + 68 \geqslant 181$,即 $y \geqslant 29$.

故第 10 场比赛的得分的最小值为 29.

4. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.

作 $\odot O$ 的直径 CD,联结 DB.

因为 $\angle A = \angle B + 90° = \angle B + \angle CBD = \angle ABD$,

所以,$\overset{\frown}{CDB} = \overset{\frown}{ACD}$.

从而,有 $AC = BD$,$BD = AC = b$.

此时,$CD = \sqrt{a^2 + b^2}$.

于是,$\odot O$ 的半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.

第 二 试

一、记不等式的左边为 M,显然,对任意 x、y、z,有

$M^2 > (x + y + z)^2 + 2|xy + yz + zx|$

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx + |xy + yz + zx|)$

$\geqslant x^2 + y^2 + z^2.$

而 $x^2 + y^2 \geqslant 2|xy|$,$y^2 + z^2 \geqslant 2|yz|$,$x^2 + z^2 \geqslant 2|xz|$,

则 $2(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant 2(|xy| + |yz| + |zx|)$.

两边同时加上 $x^2 + y^2 + z^2$,有

$3(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant (|x| + |y| + |z|)^2,$

即 $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{1}{3}(|x| + |y| + |z|)^2.$

故 $M^2 > \left[\frac{1}{\sqrt{3}}(|x| + |y| + |z|)\right]^2.$

因此,可取 $c = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

二、如图 8,联结 AE、BF 得交点 Q,显然,点 Q 为 $\triangle ABC$ 的垂心,有

$CQ \perp AB$. ①

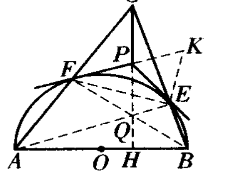

图 8

延长 FP 到点 K,使 $PK = PF$,联结 EF、KE.

易知 $\angle PEF = \angle PFE = \angle EAF$.

联结 PQ 并延长交 AB 于点 H.

因为 $\angle EQF = 180° - \angle AQF$

数学奥林匹克初中训练题(5)

第 一 试

一、选择题(每小题 7 分,共 42 分)

1. 若方程 $x^2-3x+1=0$ 的两根也是方程 $x^4-px^2+q=0$ 的根,则 $(p+q)^{2008}$ 的个位数字是(　　).

(A) 2　　(B) 4　　(C) 6　　(D) 8

2. 函数 $y=\frac{1}{x^2+ax+b}$ (其中,a、b 为非零常数) 取得最大值的条件是(　　).

(A) $a^2-4b\geqslant 0$　　(B) $a^2-4b\neq 0$

(C) $a^2-4b<0$

(D) 与 a、b 取值有关,不能确定

3. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r,$BC=a$,$AC=b$,$AB=c$,且其上的高分别为 h_a、h_b、h_c,满足 $h_a+h_b+h_c=9r$. 则 $\triangle ABC$ 的形状(　　).

(A) 一定是钝角三角形

(B) 一定是等边三角形

(C) 一定不是锐角三角形

(D) 不一定是直角三角形

4. 若三个互不相等的非零实数 x、y、z,满足关系式

$$x(y-z)=\frac{y(z-x)}{q}=\frac{z(y-x)}{q^2},$$

则 q 的取值为(　　).

$=180°-(90°-\angle EAF)$

$=90°+\angle EAF=90°+\angle PEF$,

$\angle K=\frac{1}{2}\angle EPF=\frac{1}{2}(180°-2\angle PEF)$

$=90°-\angle PEF$,

所以,$\angle EQF+\angle K=180°$.

故 K、F、Q、E 四点共圆.

注意到 $PK=PE=PF$,则 P 必是该圆的圆心.

此时,$PQ=PF$.

于是,$\angle PQF=\angle PFQ=\angle PFB$

$=\angle FAB=\angle FAH$.

故 A、H、Q、F 四点共圆.

此时,$\angle PHA=\angle QHA=180°-\angle QFA=90°$,

所以,$PH\perp AB$,即

$PQ\perp AB$.　　②

由式①、②知 C、P、Q 三点共线.

故 $CP\perp AB$.

三、(1) 由 $a^2+(y_1+y_2)a+y_1y_2=0$,得

$(a+y_1)(a+y_2)=0$.

解得 $y_1=-a$ 或 $y_2=-a$.

(2) 当 $a>0$ 时,二次函数 $f(x)$ 的图像开口向上,图像上的点 A、B 的纵坐标至少有一个为 $-a<0$,所以,图像与 x 轴有两个交点;

当 $a<0$ 时,二次函数 $f(x)$ 的图像开口向下,图像上的点 A、B 的纵坐标至少有一个为 $-a>0$,所以,图像与 x 轴有两个交点.

故函数 $f(x)$ 的图像与 x 轴有两个不同交点.

(3) 因为 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为

$\{x|\ x>m$ 或 $x<n\}(n<m<0)$,

所以,$a>0$,$b>0$,$c>0$.

从而,$cx^2+bx+a=0$ 的两个根为 $x_1=\frac{1}{m}$,$x_2=\frac{1}{n}$. 于是,$cx^2-bx+a=0$ 两个根为 $x_1=-\frac{1}{m}$,$x_2=-\frac{1}{n}$.

因为 $n<m<0$,所以,$-\frac{1}{n}<-\frac{1}{m}$.

故不等式 $cx^2-bx+a>0$ 的解集为

$x>-\frac{1}{m}$ 或 $x<-\frac{1}{n}$.

(孙　彦　安徽省安庆市教学研究室,246004
黄全福　安徽省怀宁县江镇中学,246142)