数学奥林匹克初中训练题(2)

第 一 试

一、选择题(每小题 7 分,共 42 分)

1. 若 x、y、z 均为实数,且满足

$$\frac{xy}{(y+z)(z+x)}+\frac{yz}{(z+x)(x+y)}+\frac{zx}{(x+y)(y+z)}=1,$$

则 x、y、z 的取值情况是( ).

(A) 全为正数 (B) 全为非负数

(C) 全为负数 (D) 有且仅有一个为零

2. 如图 1,在钝角 $\triangle ABC$ 中,$BC=1$,$\angle A=30°$,D 为边 BC 的中点,G 为 $\triangle ABC$ 的重心. 若 B、C 为定点,当点 A 运动时,线段 GD 长度的取值范围是( ).

(A) $0<GD\leqslant\frac{\sqrt{13}}{6}$

(B) $\frac{1}{6}<GD<\frac{\sqrt{13}}{6}$

(C) $0<GD\leqslant\frac{2+\sqrt{3}}{6}$

(D) $\frac{1}{6}\leqslant GD\leqslant\frac{2+\sqrt{5}}{6}$

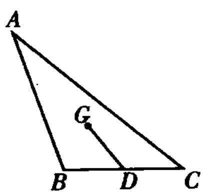

图 1

3. 设 a、b 为正整数,且 $a+b$、$a+5$、$b-2$ 是某个直角三角形的三边长. 则正整数对 (a,b) 的个数是( )个.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

4. 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 与直线 $y=k(x-1)-\frac{k^2}{4}$. 无论 k 取任何实数,此抛物线与直线都只有一个公共点. 那么,抛物线的解析式是( ).

(A) $y=x^2$

(B) $y=x^2-2x$

(C) $y=x^2-2x+1$

(D) $y=2x^2-4x+2$

5. 若 x 为实数,记 $\{x\}=x-[x]$($[x]$表示不超过 x 的最大整数),则方程

$$2\,006x+\{x\}=\frac{1}{2\,007}$$

的实根的个数是( ).

(A) 0 (B) 1 (C) 2

(D) 大于 2 的整数

6. 如图 2,正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$,P 为劣弧 $\overset{\frown}{CD}$ 上一点,PA 交 BD 于点 M,PB 交 AC 于点 N,记 $\angle PAC=\theta$. 若 $MN\perp PA$,则 $2\cos^2\theta-\tan\theta$ 的值等于( ).

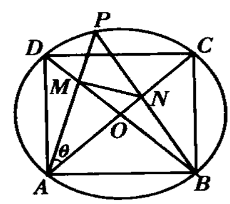

图 2

(A) 1 (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

二、填空题(每小题 7 分,共 28 分)

1. 已知 x、y 为实数,且满足

$$(x+\sqrt{x^2+2\,008})(y+\sqrt{y^2+2\,008})=2\,008.$$

则 $x^2-3xy-4y^2-6x-6y+2\,008$ 的值等于______.

2. 设实数 a、b、c 满足

$$a+b+c=0,\ abc=2.$$

则 $u=|a|^3+|b|^3+|c|^3$ 的最小值为______.

3. 在直角坐标平面内,已知 $A(-\sqrt{3},0)$、$B(\sqrt{3},0)$,点 P 在直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+4)+1$ 上运

动. 当 $\angle APB$ 最大时, $\frac{PA}{PB}$ 的值为______.

4. 设 Rt $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a、b、c, 且 $a<b<c$. 若 $\frac{b}{c+a}+\frac{a}{c+b}=\frac{17}{20}$. 则 $a:b:c$ = ______.

第 二 试

一、(20 分) 已知 m、n 均为正整数, 且 $m>n$, $2\,006m^2+m=2\,007n^2+n$. 问 $m-n$ 是否为完全平方数? 并证明你的结论.

二、(25 分) 如图 3, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AD=12$, E 是边 CD 上一点, 且 $\frac{CE}{ED}=\frac{5}{4}$. 设过 A、B、C、E 四点的 $\odot O_1$ 的半径为 R_1, 过 A、C、D 三点的 $\odot O_2$ 的半径为 R_2, 且边 BC 与 $\odot O_2$ 相切.

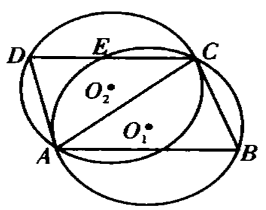

图 3

(1) 求边 CD 的长;

(2) 求 $\frac{R_1}{R_2}$ 的取值范围.

三、(25 分) 求实数 a 的值, 使得函数

$$f(x)=(x+a)(|x-a+1|+|x-3|)-2x+4a$$

的图像为中心对称图形.

参 考 答 案

第 一 试

一、1. D.

显然, $(x+y)(y+z)(z+x)\neq 0$.

去分母得

$$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$$
$$=(x+y)(y+z)(z+x).$$

化简整理得 $xyz=0$.

所以, x、y、z 中至少有一个为零.

若 x、y、z 中有两个或三个为零, 则 $x+y$、$y+z$、$z+x$ 中至少有一个为零, 等式无意义.

故 x、y、z 中有且仅有一个为零.

2. B.

因为 $\angle A=30°$, 且 $\triangle ABC$ 为钝角三角形, 所以, 点 A 在如图 4 所示的不含端点的 $\overset{\frown}{A_1B}$、$\overset{\frown}{A_2C}$ 上 (其中, $A_1B\perp BC$, $A_2C\perp BC$).

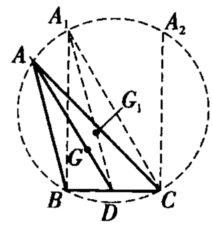

图 4

设 G_1 为 Rt $\triangle A_1BC$ 的重心, 则

$$\frac{1}{3}BD<GD<G_1D.$$

易知 $A_1B=\sqrt{3}$, 则

$$G_1D=\frac{1}{3}A_1D=\frac{1}{3}\sqrt{A_1B^2+BD^2}=\frac{\sqrt{13}}{6}.$$

又 $\frac{1}{3}BD=\frac{1}{6}$, 所以, $\frac{1}{6}<GD<\frac{\sqrt{13}}{6}$.

3. A.

若 $a+b$ 为斜边长, 则

$$(a+b)^2=(a+5)^2+(b-2)^2,$$

即 $2(ab-5a+2b)=29$.

上式左边为偶数, 右边为奇数, 矛盾.

若 $a+5$ 为斜边长, 则

$$(a+5)^2=(a+b)^2+(b-2)^2,$$

即 $2(5a-ab-b^2+2b)=-21$.

矛盾.

若 $b-2$ 为斜边长, 则

$$(b-2)^2=(a+b)^2+(a+5)^2,$$

即 $2(a^2+ab+5a+2b)=-21$.

矛盾.

故满足条件的正整数对 (a,b) 不存在.

4. C.

由 $\begin{cases} y=ax^2+bx+c, \\ y=k(x-1)-\frac{k^2}{4} \end{cases}$ 得

$$ax^2+(b-k)x+c+k+\frac{k^2}{4}=0. \qquad ①$$

由题设知, 方程 ①有两个相等的实根, 则

$$\Delta=(b-k)^2-4a\left(c+k+\frac{k^2}{4}\right)=0,$$

即 $(1-a)k^2-2(2a+b)k+b^2-4ac=0$.

因为 k 为任意实数, 所以,

$$\begin{cases}1-a=0,\\2a+b=0,\\b^2-4ac=0.\end{cases}$$

解得 $a=1, b=-2, c=1$.

故抛物线的解析式为 $y=x^2-2x+1$.

5. C.

因为 $x=[x]+\{x\}$,所以,原方程可化为

$$2\,006[x]+2\,007\{x\}=\frac{1}{2\,007}.$$

又 $0\leqslant 2\,007\{x\}<2\,007$,所以,

$[x]=-1$ 或 $[x]=0$.

若 $[x]=-1$,则

$$\{x\}=\frac{2\,006\times 2\,007+1}{2\,007^2}=\frac{2\,007^2-2\,007+1}{2\,007^2}$$

$$=1-\frac{2\,006}{2\,007^2}<1.$$

所以,$x=-1+1-\frac{2\,006}{2\,007^2}=-\frac{2\,006}{2\,007^2}$.

若 $[x]=0$,则 $\{x\}=\frac{1}{2\,007^2}$,即 $x=\frac{1}{2\,007^2}$.

综上所述,$x_1=-\frac{2\,006}{2\,007^2}$, $x_2=\frac{1}{2\,007^2}$.

6. A.

设 $\odot O$ 的半径为 1,则 $AC=2$.

如图 2,联结 PC. 则 $\angle APC=90°$. 从而,

$PA=AC\cos\theta=2\cos\theta$.

在 Rt $\triangle AOM$ 中,$AM=\frac{OA}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}$;

在 Rt $\triangle AMN$ 中,$MN=AM\tan\theta=\frac{\tan\theta}{\cos\theta}$;

在 Rt $\triangle PMN$ 中,因为

$\angle MPN=\angle APB=\angle ADB=45°$,

所以,$PM=MN=\frac{\tan\theta}{\cos\theta}$.

又 $AM+PM=PA$,得 $\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\tan\theta}{\cos\theta}=2\cos\theta$.

故 $2\cos^2\theta-\tan\theta=1$.

二、**1.** 2 008.

由题设得

$$x+\sqrt{x^2+2\,008}=\frac{2\,008}{y+\sqrt{y^2+2\,008}}.$$

分母有理化得

$$x+\sqrt{x^2+2\,008}=\sqrt{y^2+2\,008}-y. \quad ①$$

同理,$y+\sqrt{y^2+2\,008}=\sqrt{x^2+2\,008}-x$.　②

①+②得 $x+y=0$.

故 $x^2-3xy-4y^2-6x-6y+2\,008$

$=(x+y)(x-4y)-6(x+y)+2\,008$

$=2\,008$.

2. 10.

由题设知,a、b、c 必为一正两负.

不妨设 $a>0$、$b<0$、$c<0$.

因为 $b+c=-a$, $bc=\frac{2}{a}$,所以,b、c 为方程 $x^2+ax+\frac{2}{a}=0$ 的两个负根. 于是,有

$$\Delta=a^2-\frac{8}{a}\geqslant 0.$$

解得 $a^3\geqslant 8$.

故 $u=a^3-b^3-c^3$

$=a^3-(b+c)[(b+c)^2-3bc]$

$=a^3+a\left(a^2-\frac{6}{a}\right)=2a^3-6$

$\geqslant 2\times 8-6=10$.

当且仅当 $a^3=8$,即 $a=2$ 时,上式等号成立.

此时,$b=c=-1$.

因此,u 的最小值为 10.

3. $\sqrt{3}-1$.

如图 5,设直线与 x 轴的交点为 M. 由平面几何知识即知,要使 $\angle APB$ 最大,则过 A、B、P 三点的圆必和直线相切于点 P.

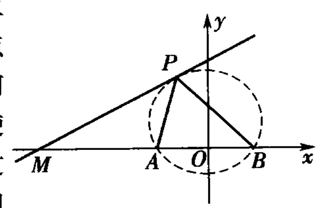

图 5

因为 $\angle MPA=\angle MBP$,所以,$\triangle MPA\backsim\triangle MBP$.

则有 $\frac{PA}{PB}=\frac{MP}{MB}$.

又由切割线定理得

$MP^2=MA\cdot MB$.

故 $\frac{PA}{PB}=\sqrt{\frac{MP^2}{MB^2}}=\sqrt{\frac{MA}{MB}}$.

因 $M(-4-\sqrt{3},0)$、$A(-\sqrt{3},0)$、$B(\sqrt{3},0)$,所以,

$MA=4$, $MB=4+2\sqrt{3}$.

故 $\frac{PA}{PB}=\sqrt{\frac{4}{4+2\sqrt{3}}}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$.

4. $8:15:17$.

因为 $c^2-a^2=b^2, c^2-b^2=a^2$，所以，

$$\frac{17}{20}=\frac{b}{c+a}+\frac{a}{c+b}=\frac{b(c-a)}{c^2-a^2}+\frac{a(c-b)}{c^2-b^2}$$

$$=\frac{c-a}{b}+\frac{c-b}{a}=\frac{c(a+b)-(a^2+b^2)}{ab}$$

$$=\frac{c(a+b-c)}{ab}.$$

又 $ab=\frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}$

$$=\frac{(a+b)^2-c^2}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)(a+b-c),$$

所以，$\frac{17}{20}=\frac{2c}{a+b+c}$，即

$17(a+b)=23c$.

两边平方得

$289(a^2+2ab+b^2)=529c^2=529(a^2+b^2)$.

整理得 $(15a-8b)(8a-15b)=0$.

所以，$\frac{a}{b}=\frac{8}{15}$ 或 $\frac{a}{b}=\frac{15}{8}$.

又 $8^2+15^2=17^2$，且 $a<b<c$，故

$a:b:c=8:15:17$.

第二试

一、$m-n$ 为完全平方数.

证明如下：

设 $m=n+k$（k 为正整数）.

代入 $2\,006m^2+m=2\,007n^2+n$，得

$n^2-2\times2\,006kn-(2\,006k^2+k)=0$.

因为 n 为正整数，所以，

$\Delta=4(2\,006k)^2+4(2\,006k^2+k)$

为完全平方数.

故 $\frac{\Delta}{4}=k[(2\,006^2+2\,006)k+1]$ 为完全平方数.

又因 $(k,(2\,006^2+2\,006)k+1)=1$，所以，$k$ 与 $(2\,006^2+2\,006)k+1$ 均为完全平方数.

故 $m-n$ 为完全平方数.

二、(1) 因为 BC 是 $\odot O_2$ 的切线，所以，

$\angle ACB=\angle CDA$.

又 $AB\parallel CD$，则 $\angle BAC=\angle ACD$.

所以，$\triangle ABC\backsim\triangle CAD$.

从而，$\angle ABC=\angle CAD$.

故 AD 是 $\odot O_1$ 的切线.

由切割线定理得 $AD^2=DE\cdot DC$.

则 $12^2=\frac{4}{9}DC^2$. 解得 $CD=18$.

(2) 由 (1) 知，$\triangle ABC\backsim\triangle CAD$，$CD=18$.

所以，$\frac{R_1}{R_2}=\frac{AC}{CD}$，即 $\frac{R_1}{R_2}=\frac{AC}{18}$.

因为 $6=CD-AD<AC<CD+AD=30$，所以，

$\frac{1}{3}<\frac{R_1}{R_2}<\frac{5}{3}$.

又 $AC\neq CD$（否则，四边形 $ABCD$ 为平行四边形），所以，$\frac{R_1}{R_2}\neq1$.

故 $\frac{R_1}{R_2}$ 的取值范围是 $\frac{1}{3}<\frac{R_1}{R_2}<\frac{5}{3}$，且 $\frac{R_1}{R_2}\neq1$.

三、为叙述方便，用

$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$、$\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$

分别表示 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中的最大数和最小数.

当 $x\leq\min\{a-1,3\}$ 时，有

$f(x)=(x+a)(-2x+a+2)-2x+4a$

$=-2x^2-ax+a^2+6a$.

当 $x\geq\max\{a-1,3\}$ 时，有

$f(x)=(x+a)(2x-a-2)-2x+4a$

$=2x^2+(a-4)x-a^2+2a$.

当 $\min\{a-1,3\}<x<\max\{a-1,3\}$ 时，$f(x)$ 为一次函数.

可见，函数 $f(x)$ 的图像在左、右两边为两段抛物线弧，而在中间这一段上为一条线段. 当且仅当它的对称中心为中间这一线段的中点 M，且左、右两端抛物线弧的顶点 A、B 也关于点 M 对称时，函数 $f(x)$ 的图像为中心对称图形.

因为 $x_M=\frac{(a-1)+3}{2}=\frac{a+2}{2}$，

$x_A=-\frac{a}{4}$，$x_B=-\frac{a-4}{4}$，

所以，$\frac{x_A+x_B}{2}=x_M$，即

$$-\frac{a+(a-4)}{8}=\frac{a+2}{2}.$$

解得 $a=-\frac{2}{3}$.

经检验，$a=-\frac{2}{3}$ 满足要求.

（刘康宁　陕西省西安市铁一中学，710054
吕建恒　陕西省兴平市教研室，713100）