全国初中数学竞赛辅导

全国初中数学竞赛辅导(初一分册)

前言

根据原国家教委的批示，中国教育学会中学数学教学专业委员会于1998年4月18日举办了全国初中数学竞赛，这次竞赛的宗旨是：“积极推进素质教育，根据原国家教委颁布的《义务教育初中数学课程计划》和《初中数学教学大纲》提出的要求，促进初中数学课外活动的开展和初中数学活动课的实施，激发学生学习数学的兴趣，培养学生应用数学的意识和能力，满足学有余力的学生学习数学的愿望，发展他们的数学才能。”

根据竞赛的宗旨，命题组本着“命题范围以义务教育《初中数学教学大纲》的内容、要求为基本依据，着重考查学生对数学知识的理解和应用数学知识解决实际问题的能力”进行了命题。实践表明，这次竞赛活动受到了全国广大参赛学生和指导老师们的欢迎。有不少同志提出，为满足学有余力的学生发展数学才能和开展初中数学活动课程的要求,有必要编写一套初中数学活动的辅导读物。为此，经命题组大多数成员的研究和交流，我们确定本书的编写目的是：

(1)为贯彻《初中数学教学大纲》、开展数学活动课程提供研究资料；

(2)为全国初中数学竞赛提供一套较好的辅导材料；

(3)为初中学有余力的学生和数学爱好者提供数学课外读物；

(4)为初中数学教学与学习提供扩展性背景材料，为数学教师提供教学、辅导参考书。

为此，本书注重：使学生对初中数学基础知识的深刻理解和融会贯通；并力求通过灵活运用数学知识，在解决问题中提高数学能力；同时，加强理论与实际的联系，提高应用意识，发展创造才能。

本书由第一册、第二册、第三册组成，分别供初一、初二、初三年级学生使用。在每册中都按基础篇、提高篇、应用篇编写，每篇由若干讲组成，每讲后配有练习题。有些较难或扩展视野的知识加了“*”号，以便于读者选读。每册后配有全书的复习题和自测题，并在书后备有参考答案。为了便于学生参加全国初中数学竞赛，在第三册书后，附有若干套综合训练题，并附有参考答案。这样，本书为使用者提供了自我评价和综合评价的测试资料，以便于学习与辅导。

我国著名数学家、中国科学院院士王梓坤教授和著名数学教育家、北京师范大学钟善基教授为本书顾问。钟善基先生特为本书写了序言，这是对我们的极大鼓励，在此，深表敬意。

本书的编写过程中，我们参阅了不少国内外有关资料，收益匪浅。本书编写成后，南京师范大学单墫教授审阅了部分稿件，提出了一些有益的意见。此外，北京大学出版社的王明舟先生、王艳女士对本书的出版给予了很多帮助。在此，一并表示感谢。

由于我们水平有限，尽管我们做了努力，但其中缺点、甚至错误在所难免，恳请读者批评指正。

编者 1998年8月

序

1998 年春，中国教育学会中学数学教学专业委员会举办了全国初中学生的数学竞赛。赛后，在各方面都取得了良好的反映。首先是参加竞赛的学生人数，远远超出始料。其次是各省、市、区对竞赛的组织系统而严密，工作的同志是高度负责的。参赛的学生赛后反映说，赛题比预料的容易些、简单些，但又不是仅凭摹仿解过习题的方法而易于解出的。参赛学生的老师反映说，赛题反映出与课内教学的实际结合得较紧密。从赛题的解法上说，需要参赛学生具有灵活运用所学基础知识的技能和能力。这样的赛题，从参赛的学生方面来说，可使他们深刻体会学好基础知识的重要性，同时也体会到老师经常所说的“学数学要学习、练好‘举一反三’应用的本领”的重要性。此外，可增强他们学好数学的信心和决心。从参赛学生的数学老师方面来说，在应该与如何重视及加强基础教学方面，受到一定的启发；在训练学生的技能、培养学生的能力，特别是在解题上，对应该与如何进行训练及培养，也受到一定的启发。有的参赛学生的家长反映说，这次赛题与学生课内学习的内容结合得比较紧密，繁简、难易的层次也较为鲜明，竞赛按这样的标准命题，学生准备起来，心中有底也费不了多少时间，而收获又是很实际的。这样的数学竞赛应该继续办下去。

分析取得良好反映的原因,主要的首先在于这次数学竞赛的举办宗旨对初中数学教育而言是正确的。举办这次数学竞赛的宗旨是：“积极推进素质教育，根据原国家教委(现在的教育部)颁布的《义务教育初中数学课程计划》和《初中数学教学大纲》提出的要求，促进初中数学课外活动的开展和初中数学活动课的实施,激发学生学习数学的兴趣,培养学生应用数学的意识和能力，满足学有余力的学生学习数学的愿望，发展他们的数学才能。”如果与多年来开展的高中学生数学竞赛的宗旨相比，则高中学生数学竞赛的首要宗旨在于发现有特殊的数学才能，并对数学有浓厚兴趣的学生，给予一定的培养，作为研究数学的后备力量输送给国家。这次初中学生数学竞赛的首要宗旨在于普遍地激发初中学生对数学的学习兴趣;在于普遍地促进初中数学教学质量的提高。两者的宗旨是迥然不同的。而这次初中学生数学竞赛的赛题就是坚决按照后者命题的。

再一个取得良好反映的主要原因则是命题委员的组成。这次命题委员中，有大学、研究所的数学教育研究人员，有中学教学第一线的数学教师。他们都是各省、市、区数学教学研究会推荐而聘任的。他们不仅业务水平高，教学经验丰富，而且对中学数学教学大纲也有较深入的研究，对目前中学数学教学的实际情况更有较充分的了解。因而在仔细研究竞赛宗旨后，拟订的参赛题具有较强的针对性。

竞赛过后，几位命题委员根据各方面对这次竞赛的反映，并鉴于目前初中数学教育之所需，乃有“何不编写一套书”的动议，即编写一套既可供开展初中数学课外活动参考，又可供实施初中数学活动课参考，也供初中数学教师与学生熟习数学竞赛使用的辅助读物。经筹划、执笔、校订，于近日完成脱稿，并纳入《初中数学活动课程研究丛书》，定书名为《全国初中数学竞赛辅导》，即将付印。

为初中师生阅读方便，本书以现行《初中数学教学大纲》的规定为基础，按初中三年的划分，分别编为第一册、第二册和第三册。每册均按课内、课外及理论、应用的划分，各编为三篇，即基础篇、提高篇和应用篇。

基础篇的内容，基本上就是《初中数学教学大纲》中规定的“基本要求”的教学内容。通过阅读基础篇的内容，不仅可使学生对课内所学习的知识得到再现、复习的机会，还可使他们对知识得到进一步的、系统的认识，同时也有利于继续阅读提高篇和应用篇。

提高篇是贯彻《初中数学教学大纲》中“对学有余力的学生，要通过讲授选学内容和组织课外活动等多种形式，满足他们的学习愿望，发展他们的数学才能”的规定之作。《初中数学教学大纲》中对选学内容未作(也不必作)规定，本书各册的提高篇的内容，都是作者根据多年的教学经验，根据对初中学生学习数学所需的认识而编写的。一方面具有范例的作用，而另一方面也还是只具参考的作用。

应用篇是贯彻《初中数学教学大纲》中“要训练学生的应用知识的技能与培养学生的应用知识的能力”之作；也是贯彻《初中数学教学大纲》中“要使学生受到把实际问题抽象成数学问题的训练，逐步培养他们的分析问题和解决问题的能力，形成用数学的意识”的规定之作。通过阅读应用篇及练习的实践，不仅可使学生提高应用的技能和能力，还可使他们了解更多的抽象理论知识的用途和用法。当然，和提高篇的作用一样，一方面具有范例的作用，而另一方面也还是只具参考的作用。

为了使用本书的方便，考虑到以本书作为教师给学生讲授的依据时，本书的编写均按“分讲”的体裁编写，以便更有利于教师的讲授与学生的学习。

值此《全国初中数学竞赛辅导》即将付印之际，略志数如上，以对本书的出版，聊表祝贺之意。

钟善基

1998 年 8 月于北京师大

基础

第一讲 有理数的巧算

有理数运算是中学数学中一切运算的基础．它要求同学们在理解有理数的有关概念、法则的基础上，能根据法则、公式等正确、迅速地进行运算．不仅如此，还要善于根据题目条件，将推理与计算相结合，灵活巧妙地选择合理的简捷的算法解决问题，从而提高运算能力，发展思维的敏捷性与灵活性．

1．括号的使用

在代数运算中，可以根据运算法则和运算律，去掉或者添上括号，以此来改变运算的次序，使复杂的问题变得较简单．

例 1 计算：

（1）$\left[47-\left(18.75-1\div\frac{8}{15}\right)\times 2\frac{6}{25}\right]\div 0.46;$

（2）$\dfrac{(-2)^3\times(-1)^{1998}-|-12|\div\left[-\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]}{(-1)\div\left(-\frac{4}{5}\right)\times 1\frac{1}{4}}$.

分析 中学数学中，由于负数的引入，符号“+”与“-”具有了双重涵义，它既是表示加法与减法的运算符号，也是表示正数与负数的性质符号．因此进行有理数运算时，一定要正确运用有理数的运算法则，尤其是要注意去括号时符号的变化．

解 （1）原式 $=\left[47-\left(18\frac{3}{4}-1\frac{7}{8}\right)\times 2\frac{6}{25}\right]\div 046$

$$=\left[47-\frac{135}{8}\times\frac{56}{25}\right]\div\frac{23}{50}$$

$$=\left[47-37\frac{4}{5}\right]\div\frac{23}{50}$$

$$=\frac{46}{5}\times\frac{50}{23}=20.$$

$$（2）原式=\frac{(-8)-12\div\left(-\frac{1}{4}\right)}{\frac{5}{4}\times1\frac{1}{4}}=\frac{(-8)+12\times4}{\frac{5}{4}\times\frac{5}{4}}$$

$$=\frac{40}{\frac{25}{16}}=40\div\frac{25}{16}=40\times\frac{16}{25}=25\frac{3}{5}.$$

注意 在本例中的乘除运算中，常常把小数变成分数，把带分数变成假分数，这样便于计算．

例 2 计算下式的值：

211×555+445×789+555×789+211×445．

分析 直接计算很麻烦，根据运算规则，添加括号改变运算次序，可使计算简单．本题可将第一、第四项和第二、第三项分别结合起来计算．

解 原式=(211×555+211×445)+(445×789+555×789)

=211×(555+445)+(445+555)×789

=211×1000+1000×789

=1000×(211+789)

=1 000 000．

说明 加括号的一般思想方法是“分组求和”，它是有理数巧算中的常用技巧．

例 3 计算：$S=1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot n$．

分析 不难看出这个算式的规律是任何相邻两项之和或为“1”或为“-1”．如果按照将第一、第二项，第三、第四项，…，分别配对的方式计算，就能得到一系列的“-1”，于是一改“去括号”的习惯，而取“添括号”之法．

解 $S=(1-2)+(3-4)+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot n$．

下面需对 n 的奇偶性进行讨论：

当 n 为偶数时，上式是 n／2 个(-1)的和，所以有

$$S=(-1)\times\frac{n-1}{2}+n=\frac{n+1}{2}.$$

当 n 为奇数时，上式是(n-1)／2 个(-1)的和，再加上最后一项$(-1)^{n+1}\cdot n=n$，所以有

$$S=(-1)\times\frac{n-1}{2}+n=\frac{n+1}{2}.$$

例 4 在数 1，2，3，…，1998 前添符号“+”和“-”，并依次运算，所得可能的最小非负数是多少?

分析与解 因为若干个整数和的奇偶性，只与奇数的个数有关，所以在 1，2，3，…，1998 之前任意添加符号“+”或“-”，不会改变和的奇偶性．在 1，2，3，…，1998 中有 1998÷2 个奇数，即有 999 个奇数，所以任意添加符号“+”或“-”之后，所得的代数和总为奇数，故最小非负数不小于 1．

现考虑在自然数 n，n+1，n+2，n+3 之间添加符号“+”或“-”，显然

$$n-(n+1)-(n+2)+(n+3)=0.$$

这启发我们将 1，2，3，…，1998 每连续四个数分为一组，再按上述规则添加符号，即

$$(1-2-3+4)+(5-6-7+8)+\cdots+(1993-1994-1995+1996)-1997+1998=1.$$

所以，所求最小非负数是 1．

说明 本例中，添括号是为了造出一系列的“零”，这种方法可使计算大大简化．

2．用字母表示数

我们先来计算(100+2)×(100-2)的值:

$$(100+2)\times(100-2)=100\times100-2\times100+2\times100-4$$

$$=100^2-2^2.$$

这是一个对具体数的运算，若用字母 a 代换 100，用字母 b 代换 2，上述运算过程变为

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2.$$

于是我们得到了一个重要的计算公式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,\quad ①$$

这个公式叫平方差公式，以后应用这个公式计算时，不必重复公式的证明过程，可直接利用该公式计算．

例 5 计算 3001×2999 的值．

解 3001×2999=(3000+1)(3000-1)

$$=3000^2-1^2=8\ 999\ 999.$$

例 6 计算 $103\times97\times10\ 009$ 的值.

解 原式$=(100+3)(100-3)(10000+9)$

$$=(100^2-9)(100^2+9)$$

$$=100^4-9^2=99\ 999\ 919.$$

例 7 计算:

$$\frac{24\ 690}{12\ 346^2-12\ 345\times12\ 347}.$$

分析与解 直接计算繁.仔细观察,发现分母中涉及到三个连续整数:12 345,12 346,12 347.可设字母 $n=12\ 346$，那么 $12\ 345=n-1$，$12\ 347=n+1$，于是分母变为 $n^2-(n-1)(n+1)$．应用平方差公式化简得

$$n^2-(n^2-1^2)=n^2-n^2+1=1,$$

即原式分母的值是 1，所以原式=24 690.

例 8 计算:

$$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1).$$

分析 式子中 2，2^2，2^4，…每一个数都是前一个数的平方，若在(2+1)前面有一个(2-1)，就可以连续递进地运用 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 了.

解 原式$=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\times(2^{16}+1)(2^{32}+1)$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\times(2^{32}+1)$

$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)=\cdots\cdots$

$=(2^{32}-1)(2^{32}+1)$

$=2^{64}-1.$

例 9 计算:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$$

分析 在前面的例题中，应用过公式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

这个公式也可以反着使用，即

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

本题就是一个例子.

解 原式$=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots$

$$\times\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{1}{10}\right)$$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{10}\right)\right]$$

$$\times\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{10}\right)\right]$$

$$=\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{11}{9}\right]\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{10}\right]$$

$$=\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{11}{20}.$$

通过以上例题可以看到，用字母表示数给我们的计算带来很大的益处．下面再看一个例题，从中可以看到用字母表示一个式子，也可使计算简化．

例 10 计算：

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1999}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1998}\right)$$
$$-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1999}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1998}\right).$$

分析 四个括号中均包含一个共同部分：$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1998}$，

我们用一个字母表示它以简化计算．

解 设$A=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1998}$，则

$$\text{原式}=\left(A+\frac{1}{1999}\right)(1+A)-\left(1+A+\frac{1}{1999}\right)A$$
$$=\left(A+A^2+\frac{1}{1999}+\frac{A}{1999}\right)-\left(A+A^2+\frac{A}{1999}\right)=\frac{1}{1999}.$$

3．观察算式找规律

例 11 某班 20 名学生的数学期末考试成绩如下，请计算他们的总分与平均分．

87，91，94，88，93，91，89，87，92，86，90，92，88，90，91，86，89，92，95，88．

分析与解 若直接把 20 个数加起来，显然运算量较大，粗略地估计一下，这些数均在 90 上下，所以可取 90 为基准数，大于 90 的数取“正”，小于 90 的数取“负”，考察这 20 个数与 90 的差，这样会大大简化运算．所以总分为

$90\times20+(-3)+1+4+(-2)+3+1+(-1)+(-3)$

$+2+(-4)+0+2+(-2)+0+1+(-4)+(-1)$

$+2+5+(-2)$

$=1800-1=1799$，

平均分为 $90+(-1)\div20=89.95$．

例 12 计算 $1+3+5+7+\cdots+1997+1999$ 的值．

分析 观察发现：首先算式中，从第二项开始，后项减前项的差都等于 2；其次算式中首末两项之和与距首末两项等距离的两项之和都等于 2000，于是可有如下解法．

解 用字母 S 表示所求算式，即

$$S=1+3+5+\cdots+1997+1999.\quad ①$$

再将 S 各项倒过来写为

$$S=1999+1997+1995+\cdots+3+1.\quad ②$$

将①，②两式左右分别相加，得

$2S=(1+1999)+(3+1997)+\cdots+(1997+3)+(1999+1)$

$=2000+2000+\cdots+2000+2000$(500 个 2000)

$=2000\times500$．

从而有 S=500 000．

说明 一般地，一列数，如果从第二项开始，后项减前项的差都相等(本题 3-1=5-3=7-5=…=1999-1997，都等于 2)，那么，这列数的求和问题，都可以用上例中的“倒写相加”的方法解决．

例 13 计算 $1+5+5^2+5^3+\cdots+5^{99}+5^{100}$ 的值．

分析 观察发现，上式从第二项起，每一项都是它前面一项的 5 倍．如果将和式各项都乘以 5，所得新和式中除个别项外，其余与原和式中的项相同，于是两式相减将使差易于计算．

解 设

$$S=1+5+52+\cdots+5^{99}+5^{100},\quad ①$$

所以

$$5S=5+5^2+5^3+\cdots+5^{100}+5^{101}.\quad ②$$

②—①得

$$4S=5^{101}-1,$$

所以 $$S=\frac{5^{101}-1}{4}$$

说明 如果一列数，从第二项起每一项与前一项之比都相等(本例中是都等于 5)，那么这列数的求和问题，均可用上述“错位相减”法来解决．

例 14 计算：

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{30133}+\dots+\frac{1}{1998\times1999}.$$

分析 一般情况下，分数计算是先通分．本题通分计算将很繁，所以我们不但不通分，反而利用如下一个关系式

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

来把每一项拆成两项之差，然后再计算，这种方法叫做拆项法．

解 由于

$$\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2},\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},\cdots$$

所以

$$\begin{aligned}原式&=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\\&\quad+\cdots\left(\frac{1}{1998}-\frac{1}{1999}\right)\\&=1-\frac{1}{1999}=\frac{1998}{1999}\end{aligned}$$

说明 本例使用拆项法的目的是使总和中出现一些可以相消的相反数的项，这种方法在有理数巧算中很常用．

练习一

1．计算下列各式的值：

(1)-1+3-5+7-9+11-…-1997+1999；

(2)11+12-13-14+15+16-17-18+…+99+100；

(3)1991×1999-1990×2000；

(4)$472634^2+472\,635^2-472\,633\times472\,635-472\,634\times472\,636$；

（5）$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{1997\times1999}$

(6)1+4+7+…+244；

（7）$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{2000}}$

（8）$1\frac{1}{3}-\frac{7}{12}+\frac{9}{20}-\frac{11}{30}+\frac{13}{42}-\frac{15}{56}$.

2．某小组20名同学的数学测验成绩如下，试计算他们的平均分．

81，72，77，83，73，85，92，84，75，63，76，97，80，90，76，91，86，78，74，85．

第二讲 绝对值

绝对值是初中代数中的一个基本概念，在求代数式的值、化简代数式、证明恒等式与不等式，以及求解方程与不等式时，经常会遇到含有绝对值符号的问题，同学们要学会根据绝对值的定义来解决这些问题.

下面我们先复习一下有关绝对值的基本知识，然后进行例题分析.

一个正实数的绝对值是它本身；一个负实数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零. 即

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{当} a>0 \text{时；} \\ 0, & \text{当} a=0 \text{时；} \\ -a, & \text{当} a<0 \text{时.} \end{cases}$$

绝对值的几何意义可以借助于数轴来认识，它与距离的概念密切相关. 在数轴上表示一个数的点离开原点的距离叫这个数的绝对值.

结合相反数的概念可知，除零外，绝对值相等的数有两个，它们恰好互为相反数. 反之，相反数的绝对值相等也成立. 由此还可得到一个常用的结论：任何一个实数的绝对值是非负数.

例 1 a，b 为实数，下列各式对吗？若不对，应附加什么条件？

(1) $|a+b|=|a|+|b|$；

(2) $|ab|=|a|\,|b|$； (3) $|a-b|=|b-a|$；

(4)若 $|a|=b$，则 $a=b$；

(5)若 $|a|<|b|$，则 $a<b$；

(6)若 $a>b$，则 $|a|>|b|$.

解 (1)不对. 当 a，b 同号或其中一个为 0 时成立. (2)对.

(3)对.

(4)不对. 当 $a\geqslant 0$ 时成立.

(5)不对. 当 $b>0$ 时成立.

(6)不对. 当 $a+b>0$ 时成立.

例 2 设有理数 a，b，c 在数轴上的对应点如图 1-1 所示，化简 $|b-a|+|a+c|+|c-b|$.

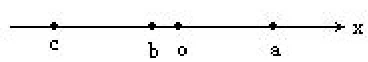


图 1-1

解 由图 1-1 可知，$a>0$，$b<0$，$c<0$，且有 $|c|>|a|>|b|>0$．根据有理数加减运算的符号法则，有 $b-a<0$，$a+c<0$，$c-b<0$．

再根据绝对值的概念，得

$$|b-a|=a-b,\quad |a+c|=-(a+c),\quad |c-b|=b-c.$$

于是有

原式$=(a-b)-(a+c)+(b-c)=a-b-a-c+b-c=-2c$．

例 3 已知 $x<-3$，化简：$|3+|2-|1+x|||$．

分析 这是一个含有多层绝对值符号的问题，可从里往外一层一层地去绝对值符号．

解 原式$=|3+|2+(1+x)||$(因为 $1+x<0$)

$=|3+|3+x||$

$=|3-(3+x)|$(因为 $3+x<0$)

$=|-x|=-x$．

例4 若$abc\neq 0$，则$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}$的所有可能值是什么？

解 因为 $abc\neq 0$，所以 $a\neq 0$，$b\neq 0$，$c\neq 0$．

(1)当 a，b，c 均大于零时，原式=3；

(2)当 a，b，c 均小于零时，原式=-3；

(3)当 a，b，c 中有两个大于零，一个小于零时，原式=1；

(4)当 a，b，c 中有两个小于零，一个大于零时，原式=-1．

所以$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}$所有可能的值为$\pm 3$，$\pm 1$.

说明 本例的解法是采取把 a，b，c 中大于零与小于零的个数分情况加以解决的，这种解法叫作分类讨论法，它在解决绝对值问题时很常用．

例 5 若 $|x|=3$，$|y|=2$，且 $|x-y|=y-x$，求 $x+y$ 的值．

解 因为｜x-y｜≥0，所以 y-x≥0，y≥x．由｜x｜=3，｜y｜=2 可知，x<0，即 x=-3．

(1)当 y=2 时，x+y=-1；

(2)当 y=-2 时，x+y=-5．

所以 x+y 的值为-1 或-5．

例 6 若 a，b，c 为整数，且 $|a-b|^{19}+|c-a|^{99}=1$，试计算｜c-a｜+｜a-b｜+｜b-c｜的值．

解 a，b，c 均为整数，则 a-b，c-a 也应为整数，且 $|a-b|^{19}$，$|c-a|^{99}$ 为两个非负整数，和为 1，所以只能是

｜a-b｜19=0 且｜c-a｜99=1， ①

或

｜a-b｜19=1 且｜c-a｜99=0． ②

由①有 a=b 且 c=a±1，于是｜b-c｜=｜c-a｜=1；由②有 c=a 且 a=b±1，于是｜b-c｜=｜a-b｜=1．无论①或②都有

｜b-c｜=1 且｜a-b｜+｜c-a｜=1，

所以

｜c-a｜+｜a-b｜+｜b-c｜=2．

例7 若｜x-y+3｜与｜x+y-1999｜互为相反数，求 $\frac{x+2y}{x-y}$ 的值．

解 依相反数的意义有

｜x-y+3｜=-｜x+y-1999｜．

因为任何一个实数的绝对值是非负数，所以必有｜x-y+3｜=0 且｜x+y-1999｜=0．即

$$\begin{cases} x-y+3=0, & ① \\ x+y-1999=0. & ② \end{cases}$$

由①有 x-y=-3，由②有 x+y=1999．②-①得

2y=2002， y=1001，

所以

$$\frac{x+2y}{x-y}=\frac{x+y+y}{x-y}=\frac{1999+1001}{-3}=-1000.$$

例 8 化简：｜3x+1｜+｜2x-1｜.

分析 本题是两个绝对值和的问题．解题的关键是如何同时去掉两个绝对值符号．若分别去掉每个绝对值符号，则是很容易的事．例如，化简｜3x+1｜，只要考虑 3x+1 的正负，即可去掉绝对值符号．这里我们

是分$x\geqslant -\frac{1}{3}$与$x<-\frac{1}{3}$两种情况加以讨论的，此时，$x=\frac{1}{3}$是一个分界点．类似地，对于｜2x-1｜而言，$x=\frac{1}{2}$是一个分界点．为同时去掉两个绝对值符号，我们把两个分界点$-\frac{1}{3}$和$\frac{1}{2}$标在数轴上，把数轴分

为三个部分(如图 1－2 所示)，即

$$x<-\frac{1}{3},\quad -\frac{1}{3}\leqslant x<\frac{1}{2},\quad x\geqslant\frac{1}{2}.$$

这样我们就可以分类讨论化简了．

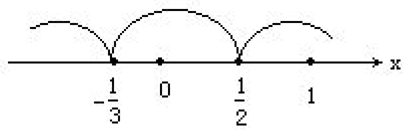


图 1-2

解 （1）当$x<-\frac{1}{3}$时，

原式=-(3x+1)-(2x-1)=5x;

（2）当$-\frac{1}{3}\leqslant x<\frac{1}{2}$时，

原式=(3x+1)-(2x-1)=x+2;

（3）当$x\geqslant\frac{1}{2}$时，

原式$=(3x+1)+(2x-1)=5x$.

即

$$|3x+1|+|2x-1|=\begin{cases}-5x，当x<-\dfrac{1}{3}时；\\ x+2，当-\dfrac{1}{3}\leqslant x<\dfrac{1}{2}时；\\ 5x，当x\geqslant\dfrac{1}{2}时.\end{cases}$$

说明 解这类题目，可先求出使各个绝对值等于零的变数字母的值，即先求出各个分界点，然后在数轴上标出这些分界点，这样就将数轴分成几个部分，根据变数字母的这些取值范围分类讨论化简，这种方法又称为“零点分段法”．

例 9 已知 $y=|2x+6|+|x-1|-4|x+1|$，求 y 的最大值．

分析 首先使用“零点分段法”将 y 化简，然后在各个取值范围内求出 y 的最大值，再加以比较，从中选出最大者．

解 有三个分界点：-3，1，-1．

(1)当 $x\leqslant-3$ 时，

$$y=-(2x+6)-(x-1)+4(x+1)=x-1,$$

由于 $x\leqslant-3$，所以 $y=x-1\leqslant-4$，y 的最大值是-4．

(2)当 $-3\leqslant x\leqslant-1$ 时，

$$y=(2x+6)-(x-1)+4(x+1)=5x+11,$$

由于 $-3\leqslant x\leqslant-1$，所以 $-4\leqslant 5x+11\leqslant 6$，y 的最大值是 6．

(3)当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$y=(2x+6)-(x-1)-4(x+1)=-3x+3,$$

由于 $-1\leqslant x\leqslant 1$，所以 $0\leqslant -3x+3\leqslant 6$，y 的最大值是 6．

(4)当 $x\geqslant 1$ 时，

$$y=(2x+6)+(x-1)-4(x+1)=-x+1,$$

由于 $x\geqslant 1$，所以 $1-x\leqslant 0$，y 的最大值是 0．

综上可知，当 $x=-1$ 时，y 取得最大值为 6．

例 10 设 $a<b<c<d$，求

$$|x-a|+|x-b|+|x-c|+|x-d|$$

的最小值．

分析 本题也可用“零点分段法”讨论计算，但比较麻烦．若能利用 $|x-a|$，$|x-b|$，$|x-c|$，$|x-d|$ 的几何意义来解题，将显得更加简捷便利．

解 设 a，b，c，d，x 在数轴上的对应点分别为 A，B，C，D，X，则 $|x-a|$ 表示线段 AX 之长，同理，$|x-b|$，$|x-c|$，$|x-d|$ 分别表示线段 BX，CX，DX 之长．现要求 $|x-a|$，$|x-b|$，$|x-c|$，$|x-d|$ 之和的值最小，就是要在数轴上找一点 X，使该点到 A，B，C，D 四点距离之和最小．

因为 $a<b<c<d$，所以 A，B，C，D 的排列应如图 1－3 所示：

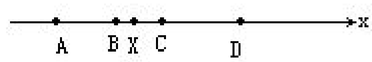


图 1-3

所以当 X 在 B，C 之间时，距离和最小，这个最小值为 AD+BC，即 $(d-a)+(c-b)$．

例 11 若 $2x+|4-5x|+|1-3x|+4$ 的值恒为常数，求 x 该满足的条件及此常数的值．

分析与解 要使原式对任何数 x 恒为常数，则去掉绝对值符号，化简合并时，必须使含 x 的项相加为零，即 x 的系数之和为零．故本题只有 $2x-5x+3x=0$ 一种情况．因此必须有

$$|4-5x|=4-5x \text{ 且 } |1-3x|=3x-1.$$

故 x 应满足的条件是

$$\begin{cases}4-5x\geqslant 0,\\ 3x-1\geqslant 0.\end{cases}$$

解之得

$$\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant \frac{4}{5}.$$

此时

$$原式=2x+(4-5x)-(1-3x)+4$$

$$=7.$$

练习二

1．x 是什么实数时，下列等式成立：

(1)｜(x-2)+(x-4)｜=｜x-2｜+｜x-4｜；

(2)｜(7x+6)(3x-5)｜=(7x+6)(3x-5)．

2．化简下列各式：

(1) $\frac{|x-|x||}{x}$

(2)｜x+5｜+｜x-7｜+｜x+10｜．

3．若 a＋b＜0，化简｜a+b-1｜-｜3-a-b｜．

4．已知 y=｜x+3｜+｜x-2｜-｜3x-9｜，求 y 的最大值．

5．设 T=｜x-p｜+｜x-15｜+｜x-p-15｜，其中 0＜p＜15，对于满足 p≤x≤15 的 x 来说，T 的最小值是多少？

6．已知 a＜b，求｜x-a｜+｜x-b｜的最小值．

7．不相等的有理数 a，b，c 在数轴上的对应点分别为 A，B，C，如果｜a-b｜+｜b-c｜=｜a-c｜，那么 B 点应为()．

(1)在 A，C 点的右边；

(2)在 A，C 点的左边；

(3)在 A，C 点之间；

(4)以上三种情况都有可能．

第三讲 求代数式的值

用具体的数代替代数式里的字母进行计算，求出代数式的值，是一个由一般到特殊的过程．具体求解代数式值的问题时，对于较简单的问题，代入直接计算并不困难，但对于较复杂的代数式，往往是先化简，然后再求值．下面结合例题初步看一看代数式求值的常用技巧．

例 1 求下列代数式的值：

(1) $5ab-4\frac{1}{2}a^3b^2-2\frac{1}{4}ab+\frac{1}{2}a^3b^2-2\frac{3}{4}ab-a^2b-5$ 其中 $a=1, b=-2$；

（2）$3x^2y-\{xyz-(2xyz-x^2z)-4x^2z+[3x^2y-(4xyz-5x^2z-3xyz)]\}$，其中$x=-1$，$y=2$，$z=-3$.

分析 上面两题均可直接代入求值，但会很麻烦，容易出错．我们可以利用已经学过的有关概念、法则，如合并同类项，添、去括号等，先将代数式化简，然后再求值，这样会大大提高运算的速度和结果的准确性．

解 （1）原式$=\left(5ab-2\frac{1}{4}ab-2\frac{3}{4}ab\right)+\left(-4\frac{1}{2}a^3b^2+\frac{1}{2}a^3b^2\right)-a^2b-5$

$=0-4a^3b^2-a^2b-5$

$=-4\times1^3\times(-2)^2-1^2\times(-2)-5$

$=-16+2-5=-19$.

(2)原式$=3x^2y-xyz+(2xyz-x^2z)+4x^2$?$[3x^2y-(xyz-5x^2z)]$

$=3x^2y-xyz+2xyz-x^2z+4x^2z-3x^2y+(xyz-5x^2z)$

$=(3x^2y-3x^2y)+(-xyz+2xyz+xyz)+(-x^2z+4x^2z-5x^2z)$

$=2xyz-2x^2z$

$=2\times(-1)\times2\times(-3)-2\times(-1)2\times(-3)$

$=12+6=18$.

说明 本例中(1)的化简是添括号，将同类项合并后，再代入求值；(2)是先去括号，然后再添括号，合并化简后，再代入求值．去、添括号时，一定要注意各项符号的变化．

例 2 已知 $a-b=-1$，求 $a^3+3ab-b^3$ 的值．

分析 由已知条件 $a-b=-1$，我们无法求出 a，b 的确定值，因此本题不能像例 1 那样，代入 a，b 的值求代数式的值．下面给出本题的五种解法．

解法 1 由 $a-b=-1$ 得 $a=b-1$，代入所求代数式化简

$a^3+3ab-b^3=(b-1)^3+3(b-1)b-b^3$

$=b3-3b2+3b-1+3b2-3b-b3$

$=-1$.

说明 这是用代入消元法消去 a 化简求值的.

解法 2 因为 $a-b=-1$，所以

原式$=(a^3-b^3)+3ab=(a-b)(a^2+ab+b^2)+3ab$

$=-1\times(a^2+ab+b^2)+3ab=-a^2-ab-b^2+3ab$

$=-(a^2-2ab+b^2)=-(a-b)^2$

$=-(-1)^2=-1$.

说明 这种解法是利用了乘法公式，将原式化简求值的. 解法 3 因为 $a-b=-1$，所以

原式$=a^3-3ab(-1)-b^3=a^3-3ab(a-b)-b^3$

$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

$=(-1)^3=-1$.

说明 这种解法巧妙地利用了$-1=a-b$，并将 3ab 化为$-3ab(-1)=-3ab(a-b)$，从而凑成了(a-b)3.

解法 4 因为 $a-b=-1$，所以

$$(a-b)^3=(-1)^3=1,$$

即 $a^3+3ab^2-3a^2b-b^3=-1$,

$$a^3-b^3-3ab(a-b)=-1,$$

所以 $a^3-b^3-3ab(-1)=-1$,

即 $a^3-b^3+3ab=-1$.

说明 这种解法是由 $a-b=-1$，演绎推理出所求代数式的值.

解法 5

$a^3+3ab-b^3=a^3+3ab^2-3a^2b-b^3-3ab^2+3a^2b+3ab$

$=(a-b)^3+3ab(a-b)+3ab$

$=(-1)^3+3ab(-1)+3ab$

$=-1$.

说明 这种解法是添项，凑出$(a-b)^3$，然后化简求值．通过这个例题可以看出，求代数式的值的方法是很灵活的，需要认真思考，才能找到简便的算法．在本例的各种解法中，用到了几个常用的乘法公式，现总结如下：

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2;$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3;$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

例3 已知$\frac{xy}{x+y}=2$，求代数式$\frac{3x-5y+3y}{-x+3xy-y}$的值．

解 由已知，$xy=2(x+y)$，代入所求代数式中，消去 xy，然后化简．所以

$$\begin{aligned}\frac{3x-5xy+3y}{-x+3xy-y}&=\frac{3x+xy-5\times 2(x+y)}{-x-y+3\times 2(x+y)}\\&=\frac{3(x+y)-10(x+y)}{-(x+y+6(x+y))}\\&=\frac{-7(x+y)}{5(x+y)}=-\frac{7}{5}\end{aligned}$$

例4 已知$a=3b$，$c=5a$，求$\frac{a+b+c}{a+b-c}$的值．

解 因为 $a=3b$，所以

$$c=5a=5\times(3b)=15b.$$

将 a，c 代入所求代数式，化简得

$$\frac{a+b+c}{a+b-c}=\frac{(3b)+b+(15b)}{(3b)+b-(15b)}=\frac{19b}{11b}=-\frac{19}{11}.$$

例5 已知m，x，y满足条件：（1）$\frac{2}{3}(x-5)^2+5|m|=0$；

（2）$-2a^2b^{y11}$与$3a^2b^3$是同类项．求代数式$0.375x^2y+5m^2x$

$$-\left\{-\frac{7}{16}x^2y+\left[-\frac{1}{4}xy^2+\left(-\frac{3}{16}x^2y-3.475xy^2\right)\right]-6.275^2\right\}$$的值．

解 因为$(x-5)^2$，｜m｜都是非负数，所以由(1)有

$$\begin{cases}(x-5)\ 2=0,\\ |m|=0.\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}x=5,\\ m=0.\end{cases}$$

由(2)得 y+1=3，所以 y=2．

下面先化简所求代数式，然后再代入求值．

$$原式=0.375x^2y+5m^2x+\frac{7}{16}x^2y$$
$$-\left[-\frac{1}{4}xy^2+\left(-\frac{3}{16}x^2y-3.475xy^2\right)\right]+6.275xy^2$$
$$=0.375x^2y+5m^2x+\frac{7}{16}x^2y+\frac{1}{4}xy^2$$

$$-\left(-\frac{3}{16}x^2y+\frac{7}{16}x^2y+\frac{3}{16}x^2y\right)+6.275xy^2$$
$$=\left(0.375x^2y+\frac{7}{16}x^2y+\frac{3}{16}x^2y\right)+5m^2x$$
$$+\left(\frac{1}{4}xy^2+3.475xy^2+6.275xy^2\right)$$

$=x^2y+5m^2x+10xy^2$

$=5^2\times2+0+10\times5\times2^2=250$

例 6 如果 4a-3b=7，并且 3a+2b=19，求 14a-2b 的值．

分析 此题可以用方程组求出 a，b 的值，再分别代入 14a-2b 求值．下面介绍一种不必求出 a，b 的值的解法．

解 14a-2b=2(7a-b)

$=2[(4a+3a)+(-3b+2b)]$

$=2[(4a-3b)+(3a+2b)]$

$=2(7+19)=52$.

例7 当$x=2\frac{17}{31}$时，求代数式

$|x|+|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|$的值.

分析 所求代数式中六个绝对值的分界点，分别为：0，1，2，

3，4，5. 其中比$x=2\frac{17}{31}$大的有3个，比$x=2\frac{17}{31}$小的有3个，所以根

据绝对值的意义去掉绝对值的符号，将有3个x和3个-x，这样将抵消掉x，使求值变得容易.

解 由于$x=2\frac{17}{31}$，所以

原式$=x+(x-1)+(x-2)-(x-3)-(x-4)-(x-5)$

$=-1-2+3+4+5=9$.

说明 实际上，本题只要x的值在2与3之间，那么这个代数式的值就是9，即它与x具体的取值无关.

例8 若$x:y:z=3:4:7$，且$2x-y+z=18$，那么$x+2y-z$的值是多少？

分析 $x:y:z=3:4:7$可以写成

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{7}$$

的形式，对于等比，我们通常可以设它们的比值为常数k，这样可以给问题的解决带来便利.

解 设$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{7}=k$，则有

$$x=3k，y=4k，z=7k.$$

因为

$$2x-y+z=18,$$

所以

$$2\times 3k-4k+7k=18,$$

所以 k=2，所以 x=6，y=8，z=14，所以

$$x+2y-z=6+16-14=8.$$

例 9 已知 x=y=11，求

$$(xy-1)^2+(x+y-2)(x+y-2xy)\text{的值}.$$

分析 本题是可直接代入求值的．下面采用换元法，先将式子改写得较简洁，然后再求值．

解 设 x+y=m，xy=n．

原式 $=(n-1)^2+(m-2)(m-2n)$

$=(n-1)^2+m^2-2m-2mn+4n$

$=n^2-2n+1+4n-2m-2mn+m^2$

$=(n+1)^2-2m(n+1)+m^2$

$=(n+1-m)^2$

$=(11\times 11+1-22)^2$

$=(121+1-22)^2$

$=100^2=10000$．

说明 换元法是处理较复杂的代数式的常用手法，通过换元，可以使代数式的特征更加突出，从而简化了题目的表述形式．

练习三

1．求下列代数式的值：

(1)$a^4+3ab-6a^2b^2-3ab^2+4ab+6a^2b-7a^2b^2-2a^4$，其中 a=-2，b=1；

（2）$2a-\{7b+[4a-7b-(2a-6a-4b)]-3a\}$，其中 $a=-\frac{2}{7}$，$b=0.4$．

的值．

2．已知$\frac{1}{4}+4\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{x}+\frac{1}{3y}\right)=\frac{5}{4}$，求代数式

$$3+48\times\left(\frac{xy+12y+4x}{12xy}\right)$$

3．已知 a=3.5，b=-0.8，求代数式

$$|6-5b|-|3a-2b|-|8b-1|$$ 的值．

4．已知$(a+1)^2-(3a^2+4ab+4b^2+2)=0$，求 a，b 的值．

5．已知

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=0\\ \frac{1}{x}-\frac{6}{y}-\frac{5}{z}=0\end{cases}$$

试求$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$的值．

第四讲 一元一次方程

方程是中学数学中最重要的内容．最简单的方程是一元一次方程，它是进一步学习代数方程的基础，很多方程都可以通过变形化为一元一次方程来解决．本讲主要介绍一些解一元一次方程的基本方法和技巧．

用等号连结两个代数式的式子叫等式．如果给等式中的文字代以任何数值，等式都成立，这种等式叫恒等式．一个等式是否是恒等式是要通过证明来确定的．

如果给等式中的文字(未知数)代以某些值，等式成立，而代以其他的值，则等式不成立，这种等式叫作条件等式．条件等式也称为方程．使方程成立的未知数的值叫作方程的解．方程的解的集合，叫作方程的解集．解方程就是求出方程的解集．

只含有一个未知数(又称为一元)，且其次数是 1 的方程叫作一元一次方程．任何一个一元一次方程总可以化为 $ax=b(a\neq 0)$的形式，这是一元一次方程的标准形式(最简形式)．

解一元一次方程的一般步骤：(1)去分母；(2)去括号；(3)移项；(4)合并同类项，化为最简形式 ax=b；(5)方程两边同除以未知数的系数，得出方程的解．

一元一次方程 ax=b 的解由 a，b 的取值来确定：

(1) 若a≠0，则方程有唯一解$x=\frac{b}{a}$；

⑵若 a=0，且 b=0，方程变为 0 · x=0，则方程有无数多个解；

⑶若 a=0，且 b≠0，方程变为 0 · x=b，则方程无解．

例 1 解方程

$$\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}\left[x-\frac{1}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)\right]-\frac{3}{4}=x+\frac{3}{4},$$

解法 1 从里到外逐级去括号．去小括号得

$$\frac{1}{2}\left\{x-\frac{1}{3}\left[\frac{3}{4}x+\frac{1}{6}\right]-\frac{3}{2}\right\}=x+\frac{3}{4},$$

去中括号得

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{3}{4}x-\frac{14}{9}\right\}=x+\frac{3}{4},$$

去大括号得

$$\frac{3}{8}x-\frac{7}{9}=x+\frac{3}{4},$$

所以有 $x=-\frac{22}{9}.$

解法 2 按照分配律由外及里去括号．去大括号得

$$\frac{1}{2}\left\{x-\frac{1}{3}\left[x-\frac{1}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)\right]-\frac{3}{2}\right\}=x+\frac{3}{4}.$$

化简为

$$-\frac{1}{6}\left[x-\frac{1}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)\right]=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2},$$

去中括号得

$$\frac{1}{24}\left(x-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}x+\frac{3}{2},$$

去小括号得

$$\frac{1}{24}x-\frac{1}{36}=\frac{2}{3}x+\frac{3}{2},$$

化简得 $$\frac{5}{8}x=-\frac{55}{36},$$

所以$x=-\frac{22}{9}$为原方程的解.

例 2 已知下面两个方程

3(x+2)=5x，①

4x-3(a-x)=6x-7(a-x) ②

有相同的解，试求 a 的值.

分析 本题解题思路是从方程①中求出 x 的值，代入方程②，求出 a 的值.

解 由方程①可求得 3x-5x=-6，所以 x=3．由已知，x=3 也是方程②的解，根据方程解的定义，把 x=3 代入方程②时，应有

4×3-3(a-3)=6×3-7(a-3)，

7(a-3)-3(a-3)=18-12，

所以$4a=18$，所以$a=4\frac{1}{2}$.

例 3 已知方程 2(x+1)=3(x-1)的解为 a+2，求方程 2[2(x+3)-3(x-a)]=3a 的解.

解 由方程 2(x+1)=3(x-1)解得 x=5．由题设知 a+2=5，所以 a=3．于是有

2[2(x+3)-3(x-3)]=3×3，-2x=-21，

所以 $$x=10\frac{1}{2}.$$

例 4 解关于 x 的方程(mx-n)(m+n)=0.

分析 这个方程中未知数是 x，m，n 是可以取不同实数值的常数，因此需要讨论 m，n 取不同值时，方程解的情况．

解 把原方程化为

$$m^2x+mnx-mn-n^2=0,$$

整理得 $m(m+n)x=n(m+n)$．

当 $m+n\neq 0$，且 $m\neq 0$ 时，方程有唯一解 $x=\frac{n}{m}$；

当 $m+n\neq 0$，且 $m=0$ 时，方程无解；

当 $m+n=0$ 时，方程的解为一切实数．

说明 含有字母系数的方程，一定要注意字母的取值范围．解这类方程时，需要从方程有唯一解、无解、无数多个解三种情况进行讨论．

例 5 解方程

$$(a+x-b)(a-b-x)=(a^2-x)(b^2+x)-a^2b^2.$$

分析 本题将方程中的括号去掉后产生 x^2 项，但整理化简后，可以消去 x^2，也就是说，原方程实际上仍是一个一元一次方程．

解 将原方程整理化简得

$$(a-b)^2-x^2=a^2b^2+a^2x-b^2x-x^2-a^2b^2,$$

即 $(a^2-b^2)x=(a-b)^2$．

(1)当 $a^2-b^2\neq 0$ 时，即 $a\neq \pm b$ 时，方程有唯一解

$$x=\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}=\frac{a-b}{a+b};$$

(2)当 $a^2-b^2=0$ 时，即 $a=b$ 或 $a=-b$ 时，若 $a-b\neq 0$，即 $a\neq b$，即 $a=-b$ 时，方程无解；若 $a-b=0$，即 $a=b$，方程有无数多个解．

例 6 已知 $(m^2-1)x^2-(m+1)x+8=0$ 是关于 x 的一元一次方程，求代数式 $199(m+x)(x-2m)+m$ 的值．

解 因为 $(m^2-1)x^2-(m+1)x+8=0$ 是关于 x 的一元一次方程，所以

$$m^2-1=0，即 m=\pm 1.$$

(1)当 m=1 时，方程变为-2x+8=0，因此 x=4，代数式的值为

$$199(1+4)(4-2\times1)+1=1991;$$

(2)当 m=-1 时，原方程无解．

所以所求代数式的值为 1991．

例 7 已知关于 x 的方程 a(2x-1)=3x-2 无解，试求 a 的值．

解 将原方程变形为

$$2ax-a=3x-2,$$

即 (2a-3)x=a-2．

由已知该方程无解，所以

$$\begin{cases}2a-3=0,\\ a-2\neq 0,\end{cases}$$

解得$a=\frac{3}{2}$．所以$a=\frac{3}{2}$即为所求．

例 8 k 为何正数时，方程 $k^2x-k^2=2kx-5k$ 的解是正数？

分析 当方程$ax=b$有唯一解$x=\frac{b}{a}$时，此解的正负可由a，b的取值来确定：

(1)若 b=0 时，方程的解是零；反之，若方程 ax=b 的解是零，则 b=0 成立．

(2)若 ab＞0 时，则方程的解是正数；反之，若方程 ax=b 的解是正数，则 ab＞0 成立．

(3)若 ab＜0 时，则方程的解是负数；反之，若方程 ax=b 的解是负数，则 ab＜0 成立．

解 按未知数 x 整理方程得

$$(k^2-2k)x=k^2-5k.$$

要使方程的解为正数，需要

$$(k^2-2k)(k^2-5k)>0.$$

看不等式的左端

$$(k^2-2k)(k^2-5k)=k^2(k-2)(k-5).$$

因为 $k^2\geqslant 0$，所以只要 $k>5$ 或 $k<2$ 时上式大于零，所以当 $k<2$ 或 $k>5$ 时，原方程的解是正数，所以 $k>5$ 或 $0<k<2$ 即为所求．

例 9 若 abc=1，解方程

$$\frac{2ax}{ab+a+1}+\frac{2bx}{bc+b+1}+\frac{2cx}{ca+c+1}=1.$$

解 因为 abc=1，所以原方程可变形为

$$\frac{2ax}{ab+a+abc}+\frac{2bx}{bc+b+1}+\frac{2cx}{ca+c+1}=1..$$

化简整理为

$$\frac{2(b+1)x}{bc+b+1}+\frac{2cx}{ca+c+1}=1,$$

$$\frac{2(b+1)x}{bc+b+abc}+\frac{2cx}{ca+c+1}=1.$$

化简整理为

$$\frac{2(b+1)x+2bcx}{b(ca+c+1)}=1$$

$$\frac{2x(b+abc+bc)}{bca+bc+b}=1.$$

所以$x=\frac{1}{2}$为原方程的解.

说明 像这种带有附加条件的方程，求解时恰当地利用附加条件可使方程的求解过程大大简化．

例 10 若 a，b，c 是正数，解方程

$$\frac{x-a-b}{c}+\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}=3.$$

解法 1 原方程两边乘以 abc，得到方程

ab(x-a-b)+bc(x-b-c)+ac(x-c-a)=3abc．移项、合并同类项得

$$ab[x-(a+b+c)]+bc[x-(a+b+c)]$$

$$+ac[x-(a+b+c)]=0,$$

因此有

$$[x-(a+b+c)](ab+bc+ac)=0.$$

因为 a＞0，b＞0，c＞0，所以 ab+bc+ac≠0，所以

$$x-(a+b+c)=0,$$

即 x=a+b+c 为原方程的解.

解法 2 将原方程右边的 3 移到左边变为-3，再拆为三个“-1”，并注意到

$$\frac{x-a-b}{c}-1=\frac{x-a-b-c}{c},$$

其余两项做类似处理.

设 m=a+b+c，则原方程变形为

$$\frac{x-m}{c}+\frac{x-m}{a}+\frac{x-m}{b}=0,$$

所以

$$(x-m)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=0.$$

因为 $a>0$，$b>0$，$c>0$，所以 $\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\neq 0$，所以 $x-m=0$，

即

$$x-(a+b+c)=0.$$

所以 x=a+b+c 为原方程的解.

说明 注意观察，巧妙变形，是产生简单优美解法所不可缺少的基本功之一.

例 11 设 n 为自然数，[x]表示不超过 x 的最大整数，解方程：

$$x+2[x]+3[x]+4[x]+\cdots+[x]=\frac{n^2(n+1)^2}{2}.$$

分析 要解此方程，必须先去掉[]，由于 n 是自然数，所以 n 与(n+1)

中必有一个是偶数，因此$\frac{n^2(n+1)^2}{2}$是整数．因为[x]是整数，2[x]，3[x]，

…，n[x]都是整数，所以 x 必是整数．

解 根据分析，x 必为整数，即 x=[x]，所以原方程化为

$$x+2x+3x+4x+\cdots+nx=\frac{n^2(n+1)^2}{2}.$$

合并同类项得

$$(1+2+3+\cdots+n)x=\frac{n^2(n+1)^2}{2},$$

故有

$$\frac{n(n+1)}{2}\cdot x=\frac{n^2(n+1)^2}{2}.$$

所以 x=n(n+1)为原方程的解．

例 12 已知关于 x 的方程

$$\frac{5}{2}x-a=\frac{8}{5}x+142.$$

且 a 为某些自然数时，方程的解为自然数，试求自然数 a 的最小值．

解 由原方程可解得

$$a=\frac{9}{10}x-142.$$

因为a为自然数，所以$\frac{9}{10}x$应是大于142的整数．所以

$$\frac{9}{10}x>142，即x>157\frac{7}{9}.$$

又因为x为自然数，要使$\frac{9}{10}x$为整数，x必须是10的倍数，而且为使

a 最小，所以 x 应取 x=160．所以

$$a=\frac{9}{10}\times 160-142=2.$$

所以满足题设的自然数 a 的最小值为 2．

说明 本题实际上是求$a=\frac{9}{10x}-142$的最小自然数解.

练习四

1．解下列方程：*

(1) $\frac{0.4x+0.9}{0.5}-\frac{x-5}{2}=\frac{0.02x+0.03}{0.03}$；

(2) $\frac{1-\frac{1+\frac{1}{2}(1-x)}{3}}{4}=1$；

(3) $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}x-1\right)-6\right]+4\right\}=1.$

2．解下列关于 x 的方程：

(1)$a^2(x-2)-3a=x+1$；

(2) $ax+b-\frac{3x+2ab}{3}=\frac{1}{2}$；

(3) $\frac{x-b}{a}=2-\frac{x-a}{b}$.

3．a为何值时，方程$\frac{x}{3}+a=\frac{x}{2}-\frac{1}{6}(x-12)$有无数多个解？无解？

4．当 k 取何值时，关于 x 的方程 3(x+1)=5-kx，分别有：(1)正数解；(2)负数解；(3)不大于 1 的解．

第五讲 方程组的解法

二元及多元(二元以上)一次方程组的求解，主要是通过同解变形进行消元，最终转化为一元一次方程来解决．所以，解方程组的基本思想是消元，主要的消元方法有代入消元和加减消元两种，下面结合例题予以介绍．

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 2x+3y-4z=-7, \\ \dfrac{x-4y}{3}=\dfrac{2y+3z}{2}=2. \end{cases}$$

分析 因为$\dfrac{x-4y}{3}=\dfrac{2y+3z}{2}=2$表示两个方程，即$\dfrac{x-4y}{3}=2$和$\dfrac{2y+3z}{2}=2$，或者$\dfrac{x-4y}{3}=\dfrac{2y+3Z}{2}$和$\dfrac{x-4y}{3}2$，或者$\dfrac{x-4y}{3}=\dfrac{2y+3z}{2}$和$\dfrac{2y+3y}{2}=2$，所以原方程组实际上是由三个方和组成的三元一次方程组．

解 将原方程组改写为

$$\begin{cases} 2x+3y-4z=-7, & ① \\ \dfrac{x-4y}{3}=2, & ② \\ \dfrac{2y+3z}{2}=2 & ③ \end{cases}$$

由方程②得 x=6+4y，代入①化简得

$$11y-4z=-19. \quad ④$$

由③得

$$2y+3z=4. \quad ⑤$$

④×3+⑤×4 得

$$33y+8y=-57+16,$$

所以 y=-1．

将 y=-1 代入⑤，得 z=2．将 y=-1 代入②，得 x=2．所以

$$\begin{cases} x=2, \\ y=-1, \\ z=2 \end{cases}$$

为原方程组的解.

说明 本题解法中，由①，②消 x 时，采用了代入消元法；解④，⑤组成的方程组时，若用代入法消元，无论消 y，还是消 z，都会出现分数系数，计算较繁，而利用两个方程中 z 的系数是一正一负，且系数的绝对值较小，采用加减消元法较简单.

解方程组消元时，是使用代入消元，还是使用加减消元，要根据方程的具体特点而定，灵活地采用各种方法与技巧，使解法简捷明快.

例 2 解方程组

$$\begin{cases} x+2y=5, & ① \\ y+2z=8, & ② \\ z+2u=11, & ③ \\ u+2x=6. & ④ \end{cases}$$

解法 1 由①，④消 x 得

$$\begin{cases} y+2z=8, & ⑤ \\ z+2u=11, & ⑥ \\ -4y+u=-4. & ⑦ \end{cases}$$

由⑥，⑦消元，得

$$\begin{cases} y+2z=8, \\ 8y+z=19. \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} y=2, \\ z=3. \end{cases}$$

将 y=2 代入①得 x=1．将 z=3 代入③得 u=4．所以

$$\begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=3, \\ u=4. \end{cases}$$

解法 2 由原方程组得

$$\begin{cases} x=5-2y, & ⑤ \\ y=8-2z, & ⑥ \\ z=11-2u, & ⑦ \\ u=6-2x. & ⑧ \end{cases}$$

所以

$$x=5-2y=5-2(8-2z)$$

$$=-11+4z=-11+4(11-2u)$$

$$=33-8u=33-8(6-2x)$$

$$=-15+16x,$$

即 $x=-15+16x$，解之得 $x=1$．将 $x=1$ 代入⑧得 $u=4$．将 $u=4$ 代入⑦得 $z=3$．将 $z=3$ 代入⑥得 $y=2$．所以

$$\begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=3, \\ u=4 \end{cases}$$

为原方程组的解．

解法 3 ①+②+③+④得

$$x+y+z+u=10, \quad ⑤$$

由⑤-(①+③)得

$$y+u=6, \quad ⑥$$

由①×2-④得

$$4y-u=4, \quad ⑦$$

⑥+⑦得 y=2．以下略．

说明 解法 2 很好地利用了本题方程组的特点，解法简捷、流畅．

例 3 解方程组

$$\begin{cases} x-y+z=1, & ① \\ y-z+u=2, & ② \\ z-u+v=3, & ③ \\ u-v+x=4, & ④ \\ v-x+y=5. & ⑤ \end{cases}$$

分析与解 注意到各方程中同一未知数系数的关系，可以先得到下面四个二元方程：

①+②得

$$x+u=3,\quad ⑥$$

②+③得

$$y+v=5,\quad ⑦$$

③+④得

$$z+x=7,\quad ⑧$$

④+⑤得

$$u+y=9.\quad ⑨$$

又①+②+③+④+⑤得

$$x+y+z+u+v=15.\ ⑩$$

⑩-⑥-⑦得 z=7，把 z=7 代入⑧得 x=0，把 x=0 代入⑥得 u=3，把 u=3 代入⑨得 y=6，把 y=6 代入⑦得 v=-1．所以

$$\begin{cases} x=0, \\ y=6, \\ z=7, \\ u=3, \\ v=-1 \end{cases}$$

为原方程组的解.

例 4 解方程组

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}=-4, \quad ①$$
$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{4}{z}=11, \quad ②$$
$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=5. \quad ③$$

解法 1 ①×2+②得

$$\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=3, \quad ④$$

由③得

$$\frac{1}{x}=5-\frac{2}{y}, \quad ⑤$$

代入④得

$$\frac{1}{y}=\frac{12}{5},$$

代入⑤得 $\frac{1}{x}=\frac{1}{5}.$

冉把 $\frac{1}{x}=\frac{1}{5},\frac{1}{y}=\frac{12}{5}$ 代入①得 $\frac{1}{z}=\frac{33}{10}$，所以

为原方程组的解.

$$\begin{cases} x = 5, \\ y = \dfrac{5}{12}, \\ z = \dfrac{10}{33} \end{cases}$$

解法2 令$A=\dfrac{1}{x}$，$B=\dfrac{1}{y}$，$C=\dfrac{1}{z}$，则原方程组化为

$$\begin{cases} A + B - 2C = -4, \\ A - B + 4C = 11, \\ A + 2B = 5. \end{cases}$$

解得$A=\dfrac{1}{5}$，$B=\dfrac{12}{5}$，$C=\dfrac{1}{z}$，即

$$\begin{cases} x = 5, \\ y = \dfrac{5}{12}, \\ z = \dfrac{10}{33} \end{cases}$$

为原方程组的解．

说明 解法 1 称为整体处理法，即从整体上进行加减消元或代入消元（此时的“元 ”是一个含有未知数的代数式，如$\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}$等）；解法2称为换元法，也就是干脆引入一个新的辅助元来代替原方程组中的“整体元”，从而简化方程组的求解过程．

例 5 已知

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=0 & ① \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{y}-\dfrac{5}{z}=0 & ② \end{cases}$$

试求$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$的值.

分析与解 一般想法是利用方程组求出 x，y，z 的值之后，代入所求的代数式计算．但本题中方程组是由三个未知数两个方程组成的，因此无法求出 x，y，z 的确定有限解，但我们可以利用加减消元法将原方程组变形.

①-②消去 x 得

$$\frac{8}{y}+\frac{8}{z}=0，即\frac{y}{z}=-1.$$

①×3+②消去 y 得

$$\frac{4}{x}+\frac{4}{z}=0，即\frac{z}{y}=-1.$$

①×5+②×3 消去 z 得

$$\frac{8}{x}-\frac{8}{y}=0，即\frac{x}{y}=1.$$

所以$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=1-1-1=-1$即为所求.

例 6 已知关于 x，y 的方程组

$$\begin{cases} ax+2y=1+a, & ① \\ 2x+2(a-1)y=3. & ② \end{cases}$$

分别求出当 a 为何值时，方程组(1)有唯一一组解；(2)无解；(3)有无穷多组解.

分析 与一元一次方程一样，含有字母系数的一次方程组求解时也要进行讨论，一般是通过消元，归结为一元一次方程 ax=b 的形式进行讨论．但必须特别注意，消元时，若用含有字母的式子去乘或者去除方程的两边时，这个式子的值不能等于零.

解 由①得

$$2y=(1+a)-ax，③$$

将③代入②得

$$(a-2)(a+1)x=(a-2)(a+2). \quad ④$$

(1)当$(a-2)(a+1)\neq 0$，即$a\neq 2$且$a\neq -1$时，方程④有

唯一解$x=\frac{a+2}{a+1}$，将此x值代入③有

$$y=\frac{1}{2(a+1)},$$

因而原方程组有唯一一组解.

(2)当$(a-2)(a+1)=0$且$(a-2)(a+2)\neq 0$时，即$a=-1$时，方程④无解，因此原方程组无解.

(3)当$(a-2)(a+1)=0$且$(a-2)(a+2)=0$时，即$a=2$时，方程④有无穷多个解，因此原方程组有无穷多组解.

例7 已知关于x，y的二元一次方程

$$(a-1)x+(a+2)y+5-2a=0,$$

当a每取一个值时，就有一个方程，而这些方程有一个公共解，试求出这个公共解.

解法1 根据题意，可分别令$a=1$，$a=-2$代入原方程得到一个方程组

$$\begin{cases}3y+3=0, \\ -3x+9=0.\end{cases}$$

解之得
$$\begin{cases}x=3, \\ y=-1.\end{cases}$$

将$x=3$，$y=-1$代入原方程得

$$(a-1)\cdot 3+(a+2)\cdot(-1)+5-2a=0.$$

所以对任何a值

$$\begin{cases}x=3, \\ y=-1\end{cases}$$

都是原方程的解.

说明 取 a=1 为的是使方程中(a-1)x=0，方程无 x 项，可直接求出 y 值；取 a=-2 的道理类似.

解法 2 可将原方程变形为

$$a(x+y-2)-(x-2y-5)=0.$$

由于公共解与 a 无关，故有

$$\begin{cases} x+y-2=0, \\ x-2y-5=0. \end{cases}$$

解之得公共解为 $\begin{cases} x=3, \\ y=-1. \end{cases}$

例 8 甲、乙两人解方程组

$$\begin{cases} ax+5y=13, & ① \\ 4x-by=-2. & ② \end{cases}$$

由于甲看错了方程①中的a而得到方程组的解为$\begin{cases} x=-3, \\ y=-1; \end{cases}$乙看错了方程②中的b而得到的解为$\begin{cases} x=5, \\ y=4. \end{cases}$ 假如 按正确的a，b计算，试求出原方程的解.

分析与解 因为甲只看错了方程①中的 a，所以甲所得到的解

$\begin{cases} x=-3, \\ y=-1 \end{cases}$ 应满足无a的正确的方程②，即

$$4\times(-3)-b\times(-1)=-2. \quad ③$$

同理，$\begin{cases} x=5, \\ y=4 \end{cases}$ 应满足正确的方程①，即

$$a\times5+5\times4=13. \quad ④$$

解由③，④联立的方程组得

$$\begin{cases} a = -1\frac{2}{5}, \\ b = 10. \end{cases}$$

所以原方程组应为

$$\begin{cases} -1\frac{2}{5}x + 5y = 13, \\ 4x - 10y = -2. \end{cases}$$

解之得 $\begin{cases} x = 20, \\ y = 8.2. \end{cases}$

练习五

1．解方程组

（1）$\begin{cases} x - 2y - 3z + 18 = 0, \\ x + 3y - 2z - 8 = 0, \\ x + y + 2z - 24 = 0; \end{cases}$

（2）$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{2}, \\ \frac{8}{x} - \frac{3}{y} = \frac{3}{10}. \end{cases}$

2．若 x1，x2，x3，x4，x5 满足方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 24, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 48, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 96, \end{cases}$$

试确定 3x4+2x5 的值．

3．将式子 3x2+2x-5 写成 a(x+1)2+b(x+1)+c 的形式，试求

代数式$\frac{a^2+b^2}{25}+(a+b)^2+c$的值．

4．k 为何值时，方程组

$$\begin{cases} kx-y=-\frac{1}{3}, \\ 3y=1-6x \end{cases}$$

有唯一一组解；无解；无穷多解?

5．若方程组

$$\begin{cases} 3x+4y=m-4, \\ x-2y=3m+2\frac{1}{2} \end{cases}$$

的解满足 x+y=0，试求 m 的值．

第六讲 一次不等式(不等式组)的解法

不等式和方程一样，也是代数里的一种重要模型．在概念方面，它与方程很类似，尤其重要的是不等式具有一系列基本性质，而且“数学的基本结果往往是一些不等式而不是等式”．本讲是系统学习不等式的基础．

下面先介绍有关一次不等式的基本知识，然后进行例题分析．

1．不等式的基本性质

(1) $a>b \Leftrightarrow b<a$.

(2) $a-b>0 \Leftrightarrow a>b$.

(3) $a>b$，$b>c \Rightarrow a>c$.

(4) $a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$.

(5) $a>b$，$c>0 \Rightarrow ac>bc$.

(6) $a>b$，$c<0 \Rightarrow ac<bc$.

这里特别要强调的是在用一个不等于零的数或式子去乘(或去除)不等式时，一定要注意它与等式的类似性质上的差异，即当所乘(或除)的数或式子大于零时，不等号方向不变(性质(5))；当所乘(或除)的数或式子小于零时，不等号方向要改变(性质(6))．

2．区间概念

在许多情况下，可以用不等式表示数集和点集．如果设 a，b 为实数，且 a＜b，那么

(1)满足不等式 a＜x＜b 的数 x 的全体叫作一个开区间，记作(a，b)．如图 1－4(a)．

(2)满足不等式 a≤x≤b 的数 x 的全体叫作一个闭区间，记作[a，b]．如图 1－4(b)．

(3)满足不等式 a＜x≤b(或 a≤x＜b)的 x 的全体叫作一个半开半闭区间，记作(a,b](或[a,b))．如图 1－4(c)，(d)．

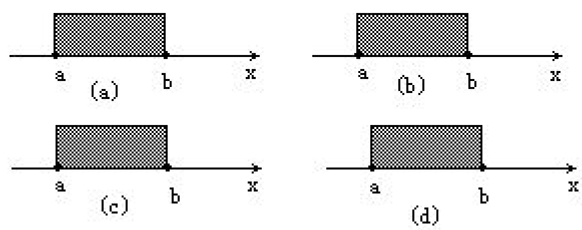


图 1-4

3．一次不等式的一般解法

一元一次不等式像方程一样，经过移项、合并同类项、整理后，总可以写成下面的标准型：ax＞b，或 ax＜b．为确定起见，下面仅讨论前一种形式．

一元一次不等式 ax＞b．

（1）当a＞0时，解为$x>\frac{b}{a}$，用区间表示为（$\frac{b}{a}$，＋∞）；

（2）当a＜0时，解为$x<\frac{b}{a}$，用区间表示为（-∞，$\frac{b}{a}$）；

(3)当 a=0 时，

$$\begin{cases}\text{若}b>0\text{，无解，}\\ \text{若}b<0\text{，解为任意实数，}\end{cases}$$

用区间表示为(-∞，+∞)．

例 1 解不等式

$$2(x+1)+\frac{x-2}{3}\geq\frac{7}{2}x-1$$

解 两边同时乘以 6 得

$$12(x+1)+2(x-2)\geqslant 21x-6,$$

化简得

$$-7x\geqslant -14,$$

两边同除以-7，有 $x\leqslant 2$．所以不等式的解为 $x\leqslant 2$，用区间表示为 $(-\infty，2]$．

例 2 求不等式

$$\frac{1}{3}(x+1)-\frac{1}{2}(x-1)\geq\frac{1}{6}(x-2)$$

的正整数解．

解 由原不等式可得 $\frac{1}{3}x\leqslant\frac{7}{6}$，所以 $x\leqslant\frac{7}{2}$ 是原不等式的解．因为要求正整数解，所以原不等式的正整数解为 x=1，2，3．

例 3 解不等式

$$\left(1+\frac{y}{3}\right)(y^2+1)>\left(1-\frac{y-2}{2}\right)(y^2+1).$$

分析与解 因 y2+1＞0，所以根据不等式的基本性质有

$$1+\frac{y}{3}>1-\frac{y-2}{2}.$$

化简得 $5y>6$．因此不等式的解为 $y>\frac{6}{5}$，用区间表示为（$\frac{6}{5}$，$+\infty$）．

例 4 解不等式

$$x+2+\frac{1}{x-6}>7+\frac{1}{x-6}.$$

分析 本题易犯的错误是直接消去两边的 $\frac{1}{x-6}$，而将原不等式变形为 x+2＞7，解为 x＞5．这种错误没有考虑到使原不等式有意义的条件：x≠6．

解 将原不等式变形为

$$\begin{cases} x \neq 6, \\ x+2 > 7. \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} x \neq 6, \\ x > 5. \end{cases}$$

所以原不等式的解为 $x>5$ 且 $x\neq 6$.

例 5 已知 $2(x-2)-3(4x-1)=9(1-x)$，且 $y<x+9$，试比较 $\frac{1}{\pi}y$ 与 $\frac{10}{31}y$ 的大小.

解 首先解关于 x 的方程得 $x=-10$．将 $x=-10$ 代入不等式得

$$y<-10+9，即 y<-1.$$

又因为 $\frac{1}{\pi}<\frac{10}{31}$,

所以 $\frac{1}{\pi}y>\frac{10}{31}y$.

例 6 解关于 x 的不等式：

$$\frac{3x+3}{a^2}-2>\frac{1-2x}{a}.$$

解 显然 $a\neq 0$，将原不等式变形为

$$3x+3-2a^2>a-2ax,$$

即

$$(3+2a)x>(2a+3)(a-1).$$

（1）当 $3+2a>0$，即 $a>\frac{3}{2}$ 且 $a\neq 0$ 时，解为 $x>a-1$；

（2）当 $3+2a=0$，即 $a=\frac{3}{2}$ 时，不等式变为 $0\cdot x>0$，无解；

（3）当 $3+2a<0$，即 $a<\frac{3}{2}$ 时，解为 $x<a-1$.

说明 对含有字母系数的不等式的解，也要分情况讨论．

例 7 已知 a，b 为实数，若不等式

$$(2a-b)x+3a-4b<0$$

的解为 $x>\frac{4}{9}$，试求不等式（a-4b）x+2a-3b>0的解．

解 由 $(2a-b)x+3a-4b<0$ 得

$$(2a-b)x<4b-3a.$$

根据题意，知此不等式的解为 $x>\frac{4}{9}$，所以应有

$$\begin{cases}2a-b<0, & ①\\ \dfrac{4b-3a}{2a-b}=\dfrac{4}{9}. & ②\end{cases}$$

由②可求得

$$a=\frac{8}{7}b. \qquad ③$$

将③代入①得

$$\frac{16}{7}b-b<0,\ 即\ \frac{9}{7}b<0,$$

所以 b<0．于是不等式(a-4b)x+2a-3b>0 可变形为

$$\left(\frac{8}{7}b-4b\right)x+\frac{16}{7}b-3b>0,$$

即
$$b\left(-\frac{20}{7}x-\frac{5}{7}\right)>0,$$

因为 b<0，所以

$$-\frac{20}{7}x-\frac{5}{7}<0,$$

所以
$$x>-\frac{1}{4}.$$

所以所求不等式的解为$x>-\frac{1}{4}$，用区间表示为$\left(-\frac{1}{4},\ +\infty\right)$.

下面举例说明不等式组的解法.

不等式组的解是不等式组中所有不等式解的公共部分.

若不等式组由两个不等式组成，分别解出每一个不等式，其解总可以归纳成以下四种情况之一(不妨设$\alpha<\beta$):

$$\begin{cases}x>\alpha,\\x>\beta;\end{cases}\quad\begin{cases}x<\alpha,\\x<\beta;\end{cases}\quad\begin{cases}x>\alpha,\\x<\beta;\end{cases}\quad\begin{cases}x<\alpha,\\x>\beta.\end{cases}$$

解分别为：$x>\beta$；$x<\alpha$；$\alpha<x<\beta$；无解．如图1－5(a)，(b)，(c)，(d)所示．

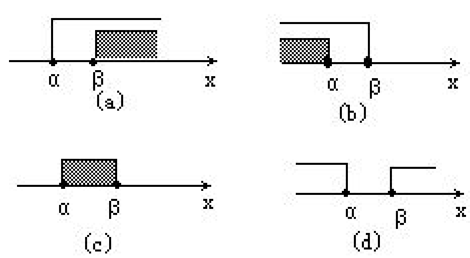


图 1-5

若不等式组由两个以上不等式组成，其解可由下面两种方法求得:

(1)转化为求两两不等式解的公共部分．如求解

$$\begin{cases}x<8,\\x<1,\\x>-9,\\x>-5.\end{cases}$$

由$\begin{cases}x<8\\x<1,\end{cases}$解得$x<1$．由$\begin{cases}x>-9,\\x>-5\end{cases}$解得$x>-5$．则原不等式组转化为求解$\begin{cases}x<1,\\x>-5.\end{cases}$再求得解为$-5<x<1$，用区间表示为$(-5,1)$.

⑵不等式组的解一般是个区间，求解的关键是确定区间的上界与下界，如求解

$$\begin{cases} -4<x<4, \\ x<8, \\ x>-6, \\ 0<x<5, \\ -3<x<2. \end{cases}$$

确定上界：由 x＜4，x＜8，x＜5，x＜2，从 4，8，5，2 这四个数中选最小的数作为上界，即 x＜2.

确定下界：由 x＞-4，x＞-6，x＞0，x＞-3．从-4，-6，0，-3 中选最大的数作为下界，即 x＞0.

确定好上、下界后，则原不等式组的解为：0＜x＜2．不等式组中不等式的个数越多，⑵越有优越性.

例 8 解不等式组

$$\begin{cases} 1<\dfrac{2x-5}{3}<3 \\ \dfrac{1-x}{2}<4(2x-3)<\dfrac{11x}{2}, \\ (x+5)-\dfrac{2}{3}\geq 2x-\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

解 原不等式组可化为

$$\begin{cases} 3<2x-5<9, \\ \dfrac{1-x}{2}<4(2x-3), \\ 4(2x-3)<\dfrac{11x}{2}, \\ 6(x+5)-4\leqslant 12x-9, \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} 4<x<7, \\ x>\dfrac{25}{17}, \\ x<\dfrac{24}{5}, \\ x\leqslant\dfrac{35}{6}. \end{cases}$$

用确定区间上、下界的方法，可求得原不等式组的解为$4<x<\frac{24}{5}$，用区间表示为$\left(4,\ \frac{24}{5}\right)$．

例 9 解关于 x 的不等式组

$$\begin{cases} 3mx-6<5-mx, & ① \\ mx+x>(1-2m)x+8. & ② \end{cases}$$

解 解①得

$$4mx<11, \quad ③$$

解②得

$$3mx>8. \quad ④$$

(1)当 m=0 时，③，④变为

$$\begin{cases} 0\cdot x<11, \\ 0\cdot x>8, \end{cases}$$

原不等式组无解．

(2)当 m>0 时，③，④变形为

$$\begin{cases} x<\dfrac{11}{4m}, \\ x>\dfrac{8}{3m}, \end{cases}$$

因为 $$\frac{11}{4m}-\frac{8}{3m}=\frac{1}{12m}>0,$$

所以 $$\frac{11}{4m}>\frac{8}{3m}.$$

故原不等式组的解为$\frac{8}{3m}<x<\frac{11}{4m}$.

⑶当 m<0 时，由③，④得

$$\begin{cases} x>\frac{11}{4m}, \\ x<\frac{8}{3m}. \end{cases}$$

因为 $$\frac{11}{4m}-\frac{8}{3m}=\frac{1}{12m}<0,$$

所以 $$\frac{11}{4m}<\frac{8}{3m}.$$

故原不等式组的解为$\frac{11}{4m}<x<\frac{8}{3m}$.

练习六

1．解下列不等式或不等式组:

（1）$2(x+1)+\frac{x-2}{3}\geqslant\frac{7}{2}x-1;$

（2）$4(x-5)<x^2-5x+3-(x^2-8x)$；

（3）$$\begin{cases} x+2+\frac{x-1}{6}<3+\frac{3}{2}x, \\ 2(x+5)-\frac{1-2x}{2}\geqslant 5x, \\ 3x-4<1.5(4x-1). \end{cases}$$

2．解下列关于 x 的不等式或不等式组：

（1） $-\frac{2}{3}mx-1>-[x(m+1)+m]$；

（2）$5ax-b>2ax+5b$；

（3）$\begin{cases}x-1>2(x-a)，\\ \frac{ax+2}{2}>3x-4.\end{cases}$

3．求同时满足不等式 $6x-2\geqslant 3x-4$ 和 $\frac{2x+1}{3}-\frac{1-x}{2}<1$ 的整数解．

4．如果关于x的不等式（2a-b）x+a-5b>0的解为 $x<\frac{10}{7}$，那么关于 x 的不等式 ax>b 的解是什么？

第七讲 含绝对值的方程及不等式

从数轴上看，一个数的绝对值就是表示这个数的点离开原点的距离．但除零以外，任一个绝对值都是表示两个不同数的绝对值．即一个数与它相反数的绝对值是一样的．由于这个性质，所以含有绝对值的方程与不等式的求解过程又出现了一些新特点.本讲主要介绍方程与不等式中含有绝对值的处理方法．

一个实数 a 的绝对值记作｜a｜，指的是由 a 所唯一确定的非负实数：

$$|a|=\begin{cases}a，& 当a>0时；\\ 0，& 当a=0时；\\ -a.& 当a<0时.\end{cases}$$

含绝对值的不等式的性质：

（1）$|a|\geqslant|b| \Leftrightarrow a\geqslant|b|$ 或 $a\leqslant-|b|$，

$\Leftrightarrow -|a|\leqslant b\leqslant|a|$；

(2) $|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$；

(3) $|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$．

由于绝对值的定义，所以含有绝对值的代数式无法进行统一的代数运算．通常的手法是分别按照绝对值符号内的代数式取值的正、负情况，脱去绝时值符号，转化为不含绝对值的代数式进行运算，即含有绝对值的方程与不等式的求解，常用分类讨论法．在进行分类讨论时，要注意所划分的类别之间应该不重、不漏．下面结合例题予以分析．

例 1 解方程 $|x-2|+|2x+1|=7$．

分析 解含有绝对值符号的方程的关键是去绝对值符号，这可用“零点分段法”，即令 $x-2=0$，$2x+1=0$，分别得到 $x=2$，$x=-\frac{1}{2}$，用 2，$-\frac{1}{2}$ 将数轴分成三段：$x\geqslant 2$，$-\frac{1}{2}\leqslant x<2$，$x<-\frac{1}{2}$，然后在每一段上去掉绝对值符号再求解．

解(1)当 $x\geqslant 2$ 时，原方程化为

$$(x-2)+(2x+1)=7,$$

解之得 $x=\frac{8}{3}$，所以在所给的范围 $x\geqslant 2$ 之内，$x=\frac{8}{3}$ 是原方程的解．

（2）当 $-\frac{1}{2}\leqslant x<2$ 时，原方程化为

$$-(x-2)+(2x+1)=7.$$

解之得 $x=4$，它不在 $-\frac{1}{2}\leqslant x<2$ 的范围内，所以 $x=4$ 不是原方程的解，应舍去．

（3）当 $x<-\frac{1}{2}$ 时，原方程化为

$$-(x-2)-(2x+1)=7.$$

解之得 $x=-2$，在所给的范围 $x<-\frac{1}{2}$ 之内，所以 $x=-2$ 是原方程的解．

综上，原方程的解为 $x=\frac{8}{3}$ 或 $x=-2$．

说明 若在 x 的某个范围内求解方程时，若求出的未知数的值不属于此范围内，则这样的解不是方程的解，应舍去．

例 2 求方程｜x-｜2x+1｜｜=3 的不同的解的个数．

分析 此方程有两层绝对值符号，先由$2x+1=0$得$x=-\frac{1}{2}$，然后分别对$x=-\frac{1}{2}$，$x>-\frac{1}{2}$，$x<-\frac{1}{2}$考虑去掉里层的绝对值符号，使得方程转化为只含有一个绝对值符号的方程．然后再去掉外层的绝对值符号求解．

$$|x-(2x+1)|=3,$$

解（1）当$x=-\frac{1}{2}$时，原方程化为$|x|=3$，无解．

（2）当$x>-\frac{1}{2}$时，原方程化为

即 $$|1+x|=3,$$

所以 $$x=2 \text{ 或 } x=-4.$$

结合$x>-\frac{1}{2}$，知$x=-4$应舍去．

（3）当$x<-\frac{1}{2}$时，原方程化为

$$|x+(2x+1)|=3,$$

即 $$|3x+1|=3,$$

所以 $$x=\frac{2}{3}\text{或}x=-\frac{4}{3}.$$

结合 $x<-\frac{1}{2}$，知$x=\frac{2}{3}$应舍去．

综上，所求方程的解只有$x=2$或$x=-\frac{4}{3}$两个解．所以原方程不同的解的个数为2．

例 3 若关于 x 的方程｜｜x-2｜-1｜=a 有三个整数解．则 a 的值是多少？

解 若 a＜0，原方程无解，所以 a≥0．由绝对值的定义可知

$$|x-2|-1=\pm a,$$

所以 $|x-2|=1\pm a$.

(1)若 $a>1$，则 $|x-2|=1-a<0$，无解．$|x-2|=1+a$，x 只能有两个解 $x=3+a$ 和 $x=1-a$.

(2)若 $0\leqslant a\leqslant 1$，则由 $|x-2|=1+a$，求得

$$x=1-a 或 x=3+a;$$

由 $|x-2|=1-a$，求得

$$x=1+a 或 x=3-a.$$

原方程的解为 $x=3+a$，$3-a$，$1+a$，$1-a$，为使方程有三个整数解，a 必为整数，所以 a 只能取 0 或 1．当 $a=0$ 时，原方程的解为 $x=3$，1，只有两个解，与题设不符，所以 $a\neq 0$．当 $a=1$ 时，原方程的解为 $x=4$，0，2，有三个解．

综上可知，$a=1$.

例 4 已知方程 $|x|=ax+1$ 有一负根，且无正根，求 a 的取值范围．

解 设 x 为方程的负根，则 $-x=ax+1$，即

$$x=\frac{-1}{a+1}<0,$$

所以应有 $a>-1$．反之，$a>-1$ 时，原方程有负根．

设方程有正根 x，则 $x=ax+1$，即

$$x=\frac{1}{1-a}>0,$$

所以 $a<1$．反之，$a<1$ 时，原方程有正根．

综上可知，若使原方程有一负根且无正根，必须 $a\geqslant 1$.

例 5 设

$$\left|\frac{x+y}{2}-\frac{2}{3}y-\frac{5}{2}\right|\geqslant 0,\left|\frac{3}{2}x+2y\right|\geqslant 0,$$

求 x+y.

分析 从绝对值的意义知

$$\left|\frac{x+y}{2}-\frac{2}{3}y-\frac{5}{2}\right|\geqslant 0,\left|\frac{3}{2}x+2y\right|\geqslant 0.$$

两个非负实数和为零时，这两个实数必须都为零.

解 由题设有

$$\begin{cases}\frac{x+y}{2}-\frac{2}{3}y-\frac{5}{2}=0, & ①\\ \frac{3}{2}x+2y=0. & ②\end{cases}$$

由②有 $x=-\frac{4}{3}$ ③

把③代入①得

$$\frac{-\frac{4}{3}y+y}{2}-\frac{2}{3}y-\frac{5}{2}=0.$$

解之得 y=-3，所以 x=4．故有

x+y=4-3=1．

例 6 解方程组

$$\begin{cases}|x-y|=1, & ①\\ |x|+2|y|=3. & ②\end{cases}$$

分析与解 由①得 x-y=1 或 x-y=-1，即

x=y+1 或 x=y-1．

与②结合有下面两个方程组

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}x=y+1,\\ |x|+2|y|=3;\end{cases}\quad(\text{Ⅱ})\begin{cases}x=y-1,\\ |x|+2|y|=3.\end{cases}$$

解(Ⅰ)：把 x=y+1 代入｜x｜+2｜y｜=3 得

｜y+1｜+2｜y｜=3．

去绝对值符号，可得$y=-\frac{2}{3}$或$y=-\frac{4}{3}$，再将其代入$x=y+1$，可求出方程组(Ⅰ)的解为

$$\begin{cases}x=\frac{1}{3},\\ y=-\frac{4}{3};\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=\frac{5}{3},\\ y=\frac{2}{3}.\end{cases}$$

同理，解(Ⅱ)有

$$\begin{cases}x=-\frac{5}{3},\\ y=-\frac{2}{3};\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=\frac{1}{3},\\ y=\frac{4}{3}.\end{cases}$$

故原方程组的解为

$$\begin{cases}x=-\frac{1}{3},\\ y=\frac{4}{3};\end{cases}\begin{cases}x=\frac{1}{3},\\ y=-\frac{4}{3};\end{cases}\begin{cases}x=\frac{5}{3},\\ y=\frac{2}{3};\end{cases}\begin{cases}x=-\frac{5}{3},\\ y=-\frac{2}{3};\end{cases}$$

例 7 解方程组

$$\begin{cases}|x-y|=x+y-2, & ①\\ |x+y|=x+2. & ②\end{cases}$$

解 由①得

$$x+y=|x-y|+2.$$

因为$|x-y|\geqslant 0$，所以$x+y>0$，所以$|x+y|=x+y$． ③

把③代入②有

$$x+y=x+2,$$

所以$y=2$．将之代入①有$|x-2|=x$，所以

$$x-2=x, \quad ④$$

或 x-2=-x． ⑤

④无解，所以只有解⑤得 x=1．故

$$\begin{cases}x=1,\\ y=2\end{cases}$$

为原方程组的解．

说明 本题若按通常的解法，区分 x+y≥0 和 x+y＜0 两种情形，把方程②分成两个不同的方程 x+y=x+2 和-(x+y)=x+2，对方程①也做类似处理的话，将很麻烦．上面的解法充分利用了绝对值的定义和性质，从方程①中发现必有 x+y＞0，因而可以立刻消去方程②中的绝对值符号，从而简化了解题过程．

例 8 解不等式｜x-5｜-｜2x+3｜＜1．

分析 关键也是去掉绝对值符号．分三个区间讨论：$x\leqslant -\frac{3}{2}$，$-\frac{3}{2}$

＜x≤5，x＞5．

解 (1) 当 $x\leqslant -\frac{3}{2}$ 时，原不等式化为

$$-(x-5)-[-(2x+3)]<1,$$

解之得 $x<-7$，结合 $x\leqslant -\frac{3}{2}$，故 $x<-7$ 是原不等式的解；

(2) 当 $-\frac{3}{2}<x\leqslant 5$ 时，原不等式化为

$$-(x-5)-(2x+3)<1,$$

解之得 $x>\frac{1}{3}$，结合 $-\frac{3}{2}<x\leqslant 5$，故 $\frac{1}{3}<x\leqslant 5$ 是原不等式的解；

(3)当 x＞5 时，原不等式化为

$$x-5-(2x+3)<1,$$

解之得 x＞-9，结合 x＞5，故 x＞5 是原不等式的解．

综合 (1)，(2)，(3) 可知，$x<-7$ 或 $x>\frac{1}{3}$ 是原不等式的解．

例 9 解不等式 $1\leqslant|3x-5|\leqslant 2$.

分析与解 此不等式实际上是

$$\begin{cases}|3x-5|\geqslant 1, & ① \\ |3x-5|\leqslant 2. & ②\end{cases}$$

解 对 $|3x-5|\geqslant 1$:

（1）当 $x\geqslant\frac{5}{3}$ 时，①转化为 $3x-5\geqslant 1$，所以 $x\geqslant 2$ 是①的解.

（2）当 $x<\frac{5}{3}$ 时，①转化为 $-(3x-5)\geqslant 1$，所以 $-3x\geqslant -4$，即 $x\leqslant\frac{4}{3}$ 是①的解.

所以①的解为 $x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant\frac{4}{3}$.

对 $|3x-5|\leqslant 2$:

（3）当 $x\geqslant\frac{5}{3}$ 时，②转化为 $3x-5\leqslant 2$，所以 $x\leqslant\frac{7}{3}$，所以 $\frac{5}{3}\leqslant x\leqslant\frac{7}{3}$ 是②的解.

（4）当 $x<\frac{5}{3}$ 时，②转化为 $-(3x-5)\leqslant 2$，所以 $x\geqslant 1$，所以 $1\leqslant x<\frac{5}{3}$ 是②的解.

所以②的解为 $1\leqslant x\leqslant\frac{7}{3}$.

所以①与②的公共解应为

$$1\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}，或 2\leqslant x\leqslant\frac{7}{3},$$

即原不等式的解为 $1\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}$ 或 $2\leqslant x\leqslant\frac{7}{3}$.

例 10 解不等式 $||x+3|-|x-3||>3$.

解 从里往外去绝对值符号，将数轴分为 $x\leqslant -3$，$-3<x\leqslant 3$，$x>3$ 三段来讨论，于是原不等式化为如下三个不等式组.

$$（Ⅰ）\begin{cases} x\leqslant -3, \\ |-(x+3)+(x-3)|>3; \end{cases}$$

$$（Ⅱ）\begin{cases} -3<x\leqslant 3, \\ |(x+3)+(x-3)|>3; \end{cases}$$

$$（Ⅲ）\begin{cases} x>3, \\ |(x+3)-(x-3)|>3. \end{cases}$$

由（Ⅰ）得
$$\begin{cases} x\leqslant -3 \\ |-6|>3, \end{cases}$$

即 $$x\leqslant -3.$$

由（Ⅱ）得
$$\begin{cases} -3<x\leqslant 3, \\ |2x|>3. \end{cases}$$

即 $$-3<x<-\frac{3}{2}\text{或}\frac{3}{2}<x\leqslant 3.$$

由（Ⅲ）得
$$\begin{cases} x>3, \\ |6|>3, \end{cases}$$

即 $$x>3.$$

综上可知，原不等式的解为 $x<-\frac{3}{2}$ 或 $x>\frac{3}{2}$.

说明 本题也可以由外向内去绝对值符号，由绝对值的意义，解下面两个不等式

$$\begin{cases} |x+3|-|x-3|<-3, & ① \\ |x+3|-|x-3|>3, & ② \end{cases}$$

分别解出①和②即可，请同学们自己完成这个解法.

例 11 当 a 取哪些值时，方程 $|x+2|+|x-1|=a$ 有解？

解法 1 (1)当 $x\leqslant -2$ 时，

$$|x+2|+|x-1|=-2x-1\geqslant -2(-2)-1=3.$$

(2)当 $-2<x<1$ 时，

$$|x+2|+|x-1|=x+2-x+1=3.$$

(3)当 $x\geqslant 1$ 时，

$$|x+2|+|x-1|=2x+1\geqslant 2\cdot 1+1=3.$$

所以，只有当 $a\geqslant 3$ 时，原方程有解.

解法 2 按照绝对值的性质 $|a-b|\leqslant |a|+|b|$，故

$$|x+2|+|x-1|\geqslant |(x+2)-(x-1)|=3.$$

其中等号当 $-2\leqslant x\leqslant 1$ 时成立，所以当 $a\geqslant 3$ 时，原方程有解.

练习七

1．解下列方程:

(1) $|x+3|-|x-1|=x+1$;

(2) $||1+x|-1|=3x$;

(3) $|3x-2|-|x+1|=x+2$;

(4) $|3y-2|=-|5x-3|$.

2．解方程组:

(1) $\begin{cases}|x+1|+|y-1|=5,\\ |x+1|=4y-4,\end{cases}$ (2) $\begin{cases}|x+y|=1,\\ |x|+|y|=2.\end{cases}$

3．解下列不等式:

(1) $\left|1-\dfrac{3x-5}{4}\right|>3$;

(2) $5\leqslant |5x-3|\leqslant 10$;

(3)｜x+1｜+｜4-x｜＜6；

(4)｜｜x-1｜-｜x+2｜｜＞1．

4．若 a＞0，b＜0，则方程｜x-a｜+｜x-b｜=a-b 的解是什么？

第八讲 不等式的应用

不等式与各个数学分支都有密切的联系，利用“大于”、“小于”关系，以及不等式一系列的基本性质能够解决许多有趣的问题，本讲主要结合例题介绍一下这方面的应用．

例 1 已知 x＜0，-1＜y＜0，将 x，xy，xy2 按由小到大的顺序排列．

分析 用作差法比较大小，即若 a-b＞0，则 a＞b；若 a-b＜0，则 a＜b．

解 因为 x-xy=x(1-y)，并且 x＜0，-1＜y＜0，所以 x(1-y)＜0，则 x＜xy．

因为 xy2-xy=xy(y-1)＜0，所以 xy2＜xy．

因为 x-xy2=x(1+y)(1-y)＜0，所以 x＜xy2．

综上有 x＜xy2＜xy．

例 2 若

$$A=\frac{5\,678\,901\,234}{6\,789\,012\,245},\quad B=\frac{5\,678\,901\,235}{6\,789\,012\,347},$$

试比较 A，B 的大小．

解 设$A=\frac{x}{y}$，则$B=\frac{x+1}{y+2}$．所以

$$A-B=\frac{x}{y}-\frac{x+1}{y+2}=\frac{x(y+2)-y(x+1)}{y(y+2)}=\frac{2x-y}{y(y+2)}.$$

显然，2x＞y，y＞0，所以 2x-y＞0，所以 A-B＞0，A＞B．

例 3 若正数 a，b，c 满足不等式组

$$\begin{cases}\frac{11}{6}c<a+b<2c, & ①\\ \frac{3}{2}a<b+c<\frac{5}{3}a, & ②\\ \frac{5}{2}b<a+c<\frac{11}{4}b. & ③\end{cases}$$

试确定 a，b，c 的大小关系.

解①+c 得

$$\frac{17}{6}c<a+b+c<3c. \qquad ④$$

②+a 得

$$\frac{5}{2}a<a+b+c<\frac{8}{3}a. \qquad ⑤$$

③+b 得

$$\frac{7}{2}b<a+b+c<\frac{15}{4}b. \qquad ⑥$$

由④，⑤得

$$\frac{17}{6}c<a+b+c<\frac{15}{4}a,$$

所以
$$c<\frac{6}{17}\times\frac{8}{3}a=\frac{48}{51}a<1\cdot a,$$

所以 c＜a.

同理，由④，⑥得 b＜C.

所以 a，b，c 的大小关系为 b＜c＜a.

例 4 当 k 取何值时，关于 x 的方程

$$3(x+1)=5-kx$$

分别有(1)正数解；(2)负数解；(3)不大于 1 的解.

解 将原方程变形为(3+k)x=2.

(1)当 3+k＞0，即 k＞-3 时，方程有正数解．

(2)当 3+k＜0，即 k＜-3 时，方程有负数解．

(3)当方程解不大于 1 时，有

$$\frac{2}{3+k}\leqslant 1\ (k\neq -3),$$

所以
$$1-\frac{2}{3+k}=\frac{1+k}{3+k}\geqslant 0.$$

所以 1+k，3+k 应同号，即

$$\begin{cases}1+k\geqslant 0,\\3+k>0;\end{cases}\text{或}\begin{cases}1+k\leqslant 0,\\3+k<0.\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}k\geqslant -1,\\k>-3;\end{cases}\text{或}\begin{cases}k\leqslant -1,\\k<-3.\end{cases}$$

得解为　　　　　k⩾-1 或 k＜-3．

注意 由于不等式是大于或等于零，所以分子 1+k 可以等于零，而分母是不能等于零的。

例 5 已知

$$\frac{2x-1}{3}-1\geqslant x-\frac{5-3x}{2},$$

求｜x-1｜-｜x+3｜的最大值和最小值．

解 首先解不等式得到$x\leqslant \frac{7}{11}$．因为

｜x-1｜-｜x+3｜

$$=\begin{cases}(x-1)-(x+3)=-4, & \text{当}x\geqslant 1;\\1-x-(x+3)=-2x-2, & \text{当}-3\leqslant x<1;\\1-x+(x+3)=4, & \text{当}x<-3.\end{cases}$$

当$-3\leqslant x\leqslant \frac{7}{11}$时，$-2x-2$的值是随着x的增大而减小；随着x的减小而变大，所以当$x=\frac{7}{11}$时，$-2x-2$达到最小值$-3\frac{3}{11}$；当$x=-3$时，$-2x-2$

达到最大值 4．结合 $x<-3$ 时的情形，得到：在已知条件下，$|x-1|-|x+3|$ 的最大值是 4，最小值是 $-3\frac{3}{11}$．

说明 对含有绝对值符号的问题，无法统一处理．一般情况下，是将实数轴分成几个区间，分别进行讨论，即可脱去绝对值符号．

例 6 已知 x，y，z 为非负实数，且满足

$$x+y+z=30，3x+y-z=50.$$

求 $u=5x+4y+2z$ 的最大值和最小值．

解 将已知的两个等式联立成方程组

$$\begin{cases} x+y+z=30, & ① \\ 3x+y-z=50. & ② \end{cases}$$

所以①+②得

$$4x+2y=80，y=40-2x.$$

将 $y=40-2x$ 代入①可解得

$$z=x-10.$$

因为 y，z 均为非负实数，所以

$$\begin{cases} 40-2x\geqslant 0, \\ x-10\geqslant 0. \end{cases}$$

解得 $10\leqslant x\leqslant 20$．

于是

$$u=5x+4y+2z=5x+4(40-2x)+2(x-10)$$

$$=-x+140.$$

当 x 值增大时，u 的值减小；当 x 值减小时，u 的值增大．故当 $x=10$ 时，u 有最大值 130；当 $x=20$ 时，u 有最小值 120．

例 7 设 a，b，c，d 均为整数，且关于 x 的四个方程

$$(a-2b)x=1，(b-3c)x=1，$$

$$(c-4d)x=1，x+100=d$$

的根都是正数，试求 a 可能取得的最小值是多少？

解　由已知(a-2b)x=1，且根 x＞0，所以 a-2b＞0，又因为 a，b 均为整数，所以 a-2b 也为整数，所以

$$a-2b\geqslant 1，即\ a\geqslant 2b+1．$$

同理可得，$b\geqslant 3c+1$，$c\geqslant 4d+1$，$d\geqslant 101$．所以

$$a\geqslant 2b+1\geqslant 2(3c+1)+1=6c+3$$

$$\geqslant 6(4d+1)+3=24d+9$$

$$\geqslant 24\times 101+9=2433,$$

故 a 可能取得的最小值为 2433．

例8 设p，q均为自然数，且 $\frac{7}{10}<\frac{p}{q}<\frac{11}{15}$，当q最小时，

求 pq 的值．

解　由已知

$$\frac{7}{10}<\frac{p}{q}<\frac{11}{15},$$

所以

$$\frac{7}{10}q<p\frac{11}{15}q,$$

所以 $21q<30p<22q$．

因为 p，q 都为自然数，所以当 q 分别等于 1，2，3，4，5，6 时，无适当的 p 值使 $21q<30p<22q$ 成立．当 q=7 时，$147<30p<154$，取 p=5 可使该不等式成立．所以 q 最小为 7，此时 p=5．于是 $pq=5\times 7=35$．

例 9　已知：$b<c$，$1<a<b+c<a+1$，求证：$b<a$．

分析与证明　要学会充分利用不等式的基本性质，按照一定的逻辑顺序来展开推理论证．

因为 $b<c$，所以 $2b<b+c$，所以由 $b+c<a+1$ 得 $2b<a+1$，所以由 $1<a$ 得 $1+a<2a$，所以

$$2b<1+a<2a,$$

即 $b<a$ 成立．

例10 若自然数 $x<y<z$，a 为整数，且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a$，试求 x,y,z.

分析与解 由题设可知 $x\geqslant1$，$y\geqslant2$，$z\geqslant3$，所以

$$0\leqslant a\leqslant\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=1\frac{5}{6}.$$

又因 a 是整数，故 $a=1$．若 $x=1$，则 $1+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$，与题意不符．所以 $x\neq1$.

又 $x\geqslant3$ 时，

$$a=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqslant\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}<1$$

也不成立，故 x 只能为 2．

当 $x=2$ 时，

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

令 $y=3$，则 $z=6$．

当 $x=2$，$y\geqslant4$ 时，

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}<\frac{1}{2},$$

不成立．

故本题只有一组解，即 $x=2$，$y=3$，$z=6$．

例 11 某地区举办初中数学联赛，有 A，B，C，D 四所中学参加，选手中， A， B 两校共 16 名；B，C 两校共 20 名； C， D 两校共 34 名，并且各校选手人数的多少是按 A，B，C，D 中学的顺序选派的，试求各中学的选手人数．

解 设 A，B，C，D 四校的选手人数分别为 x，y，z，u．据题意有

$$\begin{cases} x+y=16, & ① \\ y+z=20, & ② \\ z+u=34. & ③ \end{cases}$$

由①，②可知，x+y＜y+z，所以 x＜z．又由于人数的多少是按 A，B，C，D 四校的顺序选派的，所以有 x＜y＜z＜u．

由①与 x＜y 得 16-y=x＜y，所以 y＞8．由②与 y＜z 得 20-y=z＞y，所以 y＜10．于是 8＜y＜10，所以 y=9(因为人数是整数)．将 y=9 代入①，②可知 x=7，z=11，再由③有 u=23．

故 A 校 7 人，B 校 9 人，C 校 11 人，D 校 23 人．

例12 $\overline{x5}\cdot\overline{3yz}=7850$，其中$\overline{x5}$表示十位数是x，个位数是5的两位数；$\overline{3yz}$表示百位数是3，十位数是y，个位数是z的三位数，试确定x，y，．

解 因为$300\leqslant\overline{3yz}<400$，所以根据已知有

$$7850\div400<\overline{x5}\leqslant7850\div300.$$

又因$\overline{x5}=10x+5$，所以

$$19<\frac{785}{40}<10x+5\leqslant\frac{785}{30}<27.$$

注意到 x 只能取 1，2，3，4，…，9 这九个数字，所以 x=2，所以

$$\overline{3yz}=7850\div25=314,$$

所以 y=1，z=4．

所以 x=2，y=1，z=4．

练习八

1．如果 $a<b<c$，并且 $x<y<z$，那么在四个代数式

(1) $ax+by+cz$；(2)$ax+bz+cy$；

(3) $ay+bx+cz$；(4) $az+bx+cy$

中哪一个的值最大?

2．不等式 $10(x+4)+x<62$ 的正整数解是方程

$$2(a+x)-3x=a+1$$

的解，求$a^2-\frac{1}{a^2}$的值．

3．已知 $y=|x+2|+|x-1|-|3x-6|$，求 y 的最大值．

4．已知 x，y，z 都为自然数，且 $x<y$，当 $x+y=1998$，$z-x=2000$ 时，求 $x+y+z$ 的最大值．

5．若 $x+y+z>0$，$xy+yz+zx>0$，$xyz>0$，试证：$x>0$，$y>0$，$z>0$．

6．只有两个正整数介于分数$\frac{88}{19}$与$\frac{88+n}{19+n}$之间，则正整数n的所有可能值之和是多少?

第九讲 “设而不求”的未知数

让我们先看一道简单的数学题．

例1 一个直角三角形的周长是$2+\sqrt{6}$，斜边上的中线长是1，求这个三角形的面积．

解 设这个三角形的斜边长度为 c，因为斜边上的中线长是 1，所以斜边长 c=2．再设两条直角边的长度是 a，b，面积是 S，那么

$$\begin{cases} a+b+2=2+\sqrt{6}, & ① \\ a^2+b^2=2^2, & ② \\ S=\frac{1}{2}ab. & ③ \end{cases}$$

由①得$a+b=\sqrt{6}$，两边平方后得

$$a_2+b^2+2ab=6. \quad ④$$

把②，③代入④式得

$$4+4S=6,$$

所以有 $$S=\frac{1}{2}.$$

在这个题目中，只要求出未知数 S 的值，而我们却设了三个未知数：a，b，S，并且在解题过程中，我们也根本没求 a，b 的值．但是由于增设了 a，b 后，给我们利用等量关系列方程及方程组求 S 的值，带来了很大的便利，像这种未知数(如 a，b)就是本讲所要介绍的“设而不求”的未知数．

所谓“设而不求”的未知数，又叫辅助元素，它是我们为解决问题增设的一些参数，它能起到沟通数量关系，架起连接已知量和未知量的桥梁作用．

例 2 若

$$\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a},$$

求 x+y+z 的值．

分析 已知条件是以连比的形式出现时，往往引进一个比例参数来表示这个连比．

解 令

$$\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}=k,$$

则有

$$x=k(a-b), \quad y=k(b-c), \quad z=k(c-a),$$

所以

$$x+y+z=k(a-b)+k(b-c)+k(c-a)=0,$$

所以 x+y+Z=0．

说明 本例中所设的 k，就是“设而不求”的未知数．

例 3 已知 p，q，r 都是 5 的倍数，r＞q＞p，且 r=p+10，试求 $\frac{(p-q)(p-r)}{q-r}$ 的值．

解 不妨设 $p=5k_1$，$q=5k_2$，$r=5k_3$，由题意可知，k_1，k_2，k_3 都是整数．因为 $r>q>p$，所以 $k_3>k_2>k_1$．又因为

$$r=p+10,$$

所以 $5k_3=5k_1+10$，

$$k_3=k_1+2, \quad ①$$

所以 $k_1+2>k_2>k_1$，

所以 $k_2=k_1+1$． ②

将①，②代入所求的代数式得

$$\begin{aligned}\frac{(p-q)(p-r)}{q-r}&=\frac{(5k_1-5k_2)(5k_1-5k_3)}{(5k_2-5k_3)}\\&=\frac{k_1-k_2[5k_1-5(k_1+2)]}{[k_2-(k_1+2)]}\\&=\frac{5[k_1-(k_1+1)](-2)}{[(k_1+1)-(k_1+2)]}=-10.\end{aligned}$$

说明 本题中 k_1，k_2，k_3 均是“设而不求”的未知数．

例4 若使 $\frac{n-13}{5n+6}$ 为可约分数，则自然数n的最小值应是多少?

解 要使 $\frac{n-13}{5n+6}$ 可约分，不妨设分子与分母有公因数a，显然应有

$a>1$，并且设

分子：$n-13=ak1$，①

分母：$5n+6=ak2$．②

其中 k_1，k_2 为自然数．

由①得 $n=13+ak_1$，将之代入②得

$$5(13+ak_1)+6=ak_2,$$

即
$$71+5ak_1=ak_2,$$

所以
$$a(k_2-5k_1)=71.$$

由于 71 是质数，且 a＞1，所以 a＝71，所以

$$n=k_1\cdot 71+13.$$

故 n 最小为 84.

例 5 甲、乙、丙、丁四人，每三个人的平均年龄加上余下一人的年龄分别为 29，23，21 和 17，这四人中最大年龄与最小年龄的差是多少?

解 设四个人的年龄分别记为 a，b，c，d，根据题意有

$$\begin{cases}\frac{1}{3}(a+b+c)+d=29, & ①\\ \frac{1}{3}(d+b+c)+a=23, & ②\\ \frac{1}{3}(a+d+c)+b=21, & ③\\ \frac{1}{3}(a+b+d)+c=17. & ④\end{cases}$$

由上述四式可知

$$\begin{cases}\frac{1}{3}(a+b+c+d)+\frac{2}{3}d=29, & ⑤\\ \frac{1}{3}(a+b+c+d)+\frac{2}{3}a=23, & ⑥\\ \frac{1}{3}(a+b+c+d)+\frac{2}{3}b=21, & ⑦\\ \frac{1}{3}(a+b+c+d)+\frac{2}{3}c=17. & ⑧\end{cases}$$

比较⑤，⑥，⑦，⑧知，d 最大，c 最小，所以⑤-⑧得

$$\frac{2}{3}(d-c)=12.$$

所以 d-c=18，即这四个人中最大年龄与最小年龄的差为 18.

说明 此题不必求出 a，b，c，d 的值，只须比较一下，找出最大者与最小者是谁，作差即可求解.

例 6 设有 n 个数 x_1，x_2，…，x_n，它们的值只能是 0，1，2 三个数中的一个，如果记

$$f_1=x_1+x_2+\cdots+x_n,\ f_2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2,$$

试用 f_1 和 f_2 表示

$$f_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k.$$

解 设在 x_1，x_2，…，x_n 这几个数中取值为 0 的有 s 个，取值为 1 的有 t 个，取值为 2 的有 r 个，则 s+t+r=n，0≤t≤n，0≤s≤n，0≤r≤n，由此得

$$f_1=t+2r,\ f_2=t+4r.$$

所以

$$f_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k=t+2^k r$$

$$=(2_{k-1})f_2-(2_{k-1}-2)f_1.$$

说明 本题借助于 s，t，r 找到了 f_k 与 f_1，f_2 的关系表达式．

例7 设自然数 $\overline{62\alpha\beta427}$ 为99的倍数，试求α，β．

分析与解 $\overline{62\alpha\beta427}$ 是99的倍数，表明 $\overline{62\alpha\beta427}$ 能被99＝9×11

整除．根据一个数能被 9 整除的特征有

$$6+2+\alpha+\beta+4+2+7=9m(m\text{ 为自然数}),$$

即 $$\alpha+\beta+3=9m1(m1\text{ 为自然数}).$$

又由于 0≤α≤9，0≤β≤9，则有

$$3\le\alpha+\beta+3\le 21,$$

从而有

$$\alpha+\beta=6\text{ 或}\alpha+\beta=15.\quad ①$$

同理，按照一个数被 11 整除的特征有

$$\alpha-\beta=-2\text{ 或}\alpha-\beta=9.\quad ②$$

①与②相结合，并考虑 $0\leqslant\alpha\leqslant9$，$0\leqslant\beta\leqslant9$，故只有 $\alpha=2$，$\beta=4$.

所以原自然数为 6 224 427.

例 8 我手中的卡片上写有一个三位数，并且个位数不为零，现将个位与百位数字对调，取两数的差(大数减小数)，将所得差的三位数与此差的个位、百位数字对调后的三位数相加，最后的和是多少?

解 不妨设原数为 $\overline{abc}$（$a>c$），对调后的差为 k，所以

$$k=\overline{abc}-\overline{cba}$$

$$=a\times100+b\times10+c-(c\times100+b\times10+a)$$

$$=99\times a-99\times c$$

$$=100\times a-100\times c-100+90+10-a+c$$

$$=100(a-c-1)+9\times10+(10-a+c).$$

因 k 是三位数，所以

$$2\leqslant a-c\leqslant8,\quad 1\leqslant a-c-1\leqslant7.$$

所以 $$2\leqslant10-a+c\leqslant8.$$

差对调后为

$$k'=(10-a+c)\times100+9\times10+(a-c-1),$$

所以

$$k+k'=100(a-c-1)+9\times10+(10-a+c)$$
$$+(10-a+c)\times100+9\times10+(a-c-1)$$
$$=1089.$$

故 所求为 1089.

说明 本例中 a，b，c 作为参数被引进，但运算最终又被消去了，而无须求出它们的值. 这正是“设而不求”的未知数的典型例子.

在列方程解应用题中，更是经常用到增设参数的方法，下面再举几个例题.

例 9 从两个重量分别为 12 千克(kg)和 8 千克，且含铜的百分数不同的合金上切下重量相等的两块，把所切下的每块和另一块剩余的合金放在一起，熔炼后两个合金含铜的百分数相等．求所切下的合金的重量是多少千克?

分析 由于已知条件中涉及到合金中含铜的百分数，因此只有增设这两个合金含铜的百分数为参数或与合金含铜的百分数有关的其他量为参数，才能充分利用已知，为列方程创造条件 ．

解法 1 设所切下的合金的重量为 x 千克，重 12 千克的合金的含铜百分数为 p，重 8 千克的合金的含铜百分数为 q(p≠q)，于是有

$$\frac{xq+(12-x)p}{12}=\frac{xp+(8-x)q}{8}$$

整理得 $5(q-p)x=24(q-p)$.

因为 p≠q，所以 q-p≠0，因此 x=4.8，即所切下的合金重 4.8 千克.

解法 2 设从重 12 千克的合金上切下的 x 千克中含铜 m 千克，从重 8 千克的合金上切下的 x 千克中含铜 n 千克(m≠n)，则这两个合金含

铜的百分数分别为 $\frac{m}{x}$ 和 $\frac{n}{x}$．于是有

$$\frac{n+(12-x)\frac{m}{x}}{12}=\frac{m+(8-x)\frac{n}{x}}{8}$$

整理得 $5x(n-m)=24(n-m)$.

因为 m≠n，所以 n-m≠0，因此 x=4.8，即所切下的合金重 4.8 千克.

说明 在解含参数的方程时，一般情况下可以把参数消去，转化成只含有待求未知数的一般方程，也就是说应用题的解答与参数的数值无关.

例 10 某队伍长 1998 米(m)，在行进中排尾的一个战士因事赶到排头，然后立即返回，当这个战士回到排尾时，全队已前进 1998 米，如果队伍和这个战士行进的速度都不改变，求这个战士走过的路程.

解法 1 设这个战士走过的路程为 s 米，所需要的时间为 t 小时(h)，

则这个战士行进的速度为$\frac{x}{t}$米/小时，队伍行进的速度为$\frac{1998}{t}$米/小时，战士追上排头所需时间为$\frac{1998}{\frac{s}{t}-\frac{1998}{t}}$小时，从排头回到排尾所需时间为$\frac{1998}{\frac{s}{t}+\frac{1998}{t}}$小时．于是有

$$\frac{1998}{\frac{s}{t}-\frac{1998}{t}}+\frac{1998}{\frac{s}{t}+\frac{1998}{t}}=t.$$

消去参数 t 得

$$\frac{1998}{s-1998}+\frac{1998}{s+1998}=1$$

解之得

$s_1=1998+1998\sqrt{2}$，$S_2=1998-1998\sqrt{2}$（舍去）．即这个战士走过的路程为（$1998+1998\sqrt{2}$）米.

解法 2 设这个战士的行进速度为 V1 米/小时，队伍行进的速度为

V_2米/小时，则这个战士从排尾赶到排头所需时间为$\frac{1998}{v_1-v_2}$小时，从排头返回排尾所需时间为$\frac{1998}{v_1+v_2}$小时，队伍行进1998米所需时间为$\frac{1998}{v_1+v_2}$小时．于是有

$$\frac{1998}{v_1-v_2}+\frac{1998}{v_1+v_2}=\frac{1998}{v_2}$$

所以

$$\frac{1}{v_1-v_2}+\frac{1}{v_1+v_2}=\frac{1}{v_2}$$

整理得

$$v_1^2-2v_1v_2-v_2^2=0$$

因此

$$v_1=(1\pm\sqrt{2})v_2\text{（舍去负值）}.$$

所以这个战士所走距离为

$$\frac{1998}{v_2}\cdot v_1=\frac{1998}{v_2}(1+\sqrt{2})v_2=1998+1998\sqrt{2}.$$

即这个战士走过的路程为（$1998+1998\sqrt{2}$）米.

说明 在同一个问题中，由于考虑问题的角度不同，所以增设的参数也会有所不同(如上例中的两种解法).

练习九

1．设上$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$，求证：

$$\frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}=\frac{(x+y)^2+(a+b)^2}{x+y+a+b}.$$

2．已知$ax^3=by^3=cz3$，且$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$．求证：

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$$

3．设六位数$N=\overline{x1627y}$（其中x，y分别表示十万位及个位上的数字)，又 N 是 4 的倍数，且 N 被 11 除余 5，那么 x+y 等于多少?

4．五个人要完成某项工作，如果甲、乙、丙三人同时工作需 6 小时；甲、丙、戊三人同时工作需$3\frac{1}{3}$小时；甲、丙、丁三人同时工作需7.5小时；乙、丙、戊同时工作，需用 5 小时，问五个人同时工作需用多少小时完成?

5．公共汽车每隔 x 分钟(min)发车一次，小红在大街上行走，发现从背后每隔6分钟开过来一辆公共汽车，而每隔$4\frac{2}{7}$分钟迎面驶来一辆公共汽车，如果公共汽车与小红行进的速度都是匀速的，则 x 为多少?

第十讲 整式的乘法与除法

中学代数中的整式是从数的概念基础上发展起来的，因而保留着许多数的特征，研究的内容与方法也很类似．例如，整式的四则运算就可以在许多方面与数的四则运算相类比；也像数的运算在算术中占有重要的地位一样，整式的运算也是代数中最基础的部分，它在化简、求值、恒等变形、解方程等问题中有着广泛的应用．通过整式的运算，同学们还可以在准确地理解整式的有关概念和法则的基础上，进一步提高自己的运算能力．为此，本讲着重介绍整式运算中的乘法和除法．

整式是多项式和单项式的总称．整式的乘除主要是多项式的乘除．下面先复习一下整式计算的常用公式，然后进行例题分析．

正整数指数幂的运算法则：

(1)$a^M \cdot a^n=a^{M+n}$；　(2)$(ab)^n=a^nb^n$；

(3)$(a^M)^n=a^{Mn}$；　(4)$a^M\div a^n=a^{M-n}(a\neq 0,\ m>n)$；

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\ (b\neq 0)$．

常用的乘法公式：

(1)$(a+b)(a+b)=a^2-b^2$；

(2)$(a\pm b)^2=a2\pm 2ab+b^2$；

(3)$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$；

(4)$(d\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$；

(5)$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$．

例 1　求$[x^3-(x-1)^2](x-1)$展开后，x^2项的系数．

解　$[x^3-(x-1)^2](x-1)=x^3(x-1)-(x-1)^3$．因为$x^2$项只在$-(x-1)^3$中出现，所以只要看$-(x-1)^3=(1-x)^3$中$x^2$项的系数即可．根据乘法公式有

$$(1-x)^3=1-3x+3x^2-x^3,$$

所以x^2项的系数为 3．

说明　应用乘法公式的关键，是要理解公式中字母的广泛含义，对公式中的项数、次数、符号、系数，不要混淆，要达到正确、熟练、灵活运用的程度，这样会给解题带来极大便利．

例2 先化简，再求当$x=\frac{9}{13}$时的值：

$(x-2)(x^2-2x+4)-x(x+3)(x-3)+(2x-1)^2$.

解 原式$=(x^3-2x^2+4x-2x^2+4x-8)-x(x^2-9)+(4x^2-4x+1)$

$=(x^3-4x^2+8x-8)-(x^3-9x)+(4x^2-4x+1)$

$=13x-7=9-7=2$.

说明 注意本例中$(x-2)(x^2-2x+4)\neq x^3-8$.

例 3 化简$(1+x)[1-x+x^2-x^3+\cdots+(-x)^{n-1}]$，其中 n 为大于 1 的整数.

解 原式$=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-x)^{n-1}$

$+x-x^2+x^3+\cdots-(-x)^{n-1}+(-x)^n$

$=1+(-x)^n$.

说明 本例可推广为一个一般的形式：

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n-b^n.$$

例 4 计算

(1)$(a-b+c-d)(c-a-d-b)$；

(2)$(x+2y)(x-2y)(x^4-8x^2y^2+16y^4)$.

分析与解 (1)这两个多项式对应项或者相同或者互为相反数，所以可考虑应用平方差公式，分别把相同项结合，相反项结合.

原式$=[(c-b-d)+a][(c-b-d)-a]=(c-b-d)2-a2$

$=c^2+b^2+d^2+2bd-2bc-2cd-a^2$.

(2)$(x+2y)(x-2y)$的结果是 x^2-4y^2，这个结果与多项式 $x^4-8x^2y^2+16y^4$ 相乘时，不能直接应用公式，但

$$x^4-8x^2y^2+16y^4=(x^2-4y^2)^2$$

与前两个因式相乘的结果 x^2-4y^2 相乘时就可以利用立方差公式了.

原式$=(x^2-4y^2)(x^2-4y^2)^2=(x^2-4y^2)^3$

$=(x^2)^3-3(x^2)^2(4y^2)+3x^2\cdot(4y^2)^2-(4y^2)^3$

$=x^6-12x^4y^2+48x^2y^4-64y^6$.

例 5 设 x，y，z 为实数，且

$$(y-z)^2+(x-y)^2+(z-x)^2$$

$$=(y+z-2x)^2+(x+z-2y)^2+(x+y-2z)^2,$$

求$\dfrac{(yz+1)(zx+1)(xy+1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}$的值.

解 先将已知条件化简：

$$\text{左边}=2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2xz,$$

$$\text{右边}=6x^2+6y^2+6z^2-6xy-6yz-6xz.$$

所以已知条件变形为

$$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2xz=0,$$

即 $$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0.$$

因为 x，y，z 均为实数，所以 x=y=z．所以

$$\text{所求代数式}=\frac{(x^2+1)(x^2+1)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+1)(x^2+1)}.$$

说明 本例中多次使用完全平方公式，但使用技巧上有所区别，请仔细琢磨，灵活运用公式，会给解题带来益处.

我们把形如

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

(n 为非负整数)的代数式称为关于 x 的一元多项式，常用 f(x)，g(x)，…表示一元多项式.

多项式的除法比较复杂，为简单起见，我们只研究一元多项式的除法．像整数除法一样，一元多项式的除法，也有整除、商式、余式的概念．一般地，一个一元多项式 f(x)除以另一个一元多项式 g(x)时，总存在一个商式 q(x)与一个余式 r(x)，使得 f(x)=g(x)q(x)+r(x)成立，其中 r(x)的次数小于 g(x)的次数．特别地，当 r(x)=0 时，称 f(x)能被 g(x)整除.

例 6 设 $g(x)=3x^2-2x+1$，$f(x)=x^3-3x^2-x-1$，求用 $g(x)$去除 $f(x)$所得的商 $q(x)$及余式 $r(x)$.

解法 1 用普通的竖式除法

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{3}x-\frac{7}{9}\cdots\cdots q(x) \\
g(x)\cdots\cdots 3x^2-2x+1 & x^3-3x^2-x-1\cdots\cdots f(x) \\
 & x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x \\
\hline
 & -\frac{7}{3}x^2-\frac{4}{3}x-1 \\
 & -\frac{7}{3}x^2+\frac{14}{9}x-\frac{7}{9} \\
\hline
 & -\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}\cdots\cdots r(x)
\end{array}
$$

因此，所求的商 $q(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}x$，余式 $r(x)=-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}$.

解法 2 用待定系数法.

由于 $f(x)$为 3 次多项式，首项系数为 1，而 $g(x)$为 2 次，首

项系数为3，故商 $q(x)$ 必为1次，首项系数必为 $\frac{1}{3}$，而余式次数小于2，

于是可设商式 $q(x)=\frac{1}{3}+a$，余式

$$r(x)=bx+c.$$

根据 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，得

$$x^3-3x^2-x-1$$

$$=(3x^2-2x+1)\left(\frac{1}{3}x+a\right)+(bx+c)$$
$$=x^3+\left(3a-\frac{2}{3}\right)x^2+\left(b-2a+\frac{1}{3}\right)x+(a+c).$$

比较两端系数，得

$$\begin{cases} 3a-\frac{2}{3}=-3, \\ b-2a+\frac{1}{3}=-1, \\ a+c=-1. \end{cases}$$

解得$a=-\frac{7}{9}$，$b=-\frac{26}{9}$，$c=-\frac{2}{9}$，故商式$q(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}$，余式$r(x)$
$=-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}$.

例 7 试确定 a 和 b，使 x^4+ax^2-bx+2 能被 x^2+3x+2 整除.

解 由于 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$，因此，若设

$$f(x)=x^4+ax^2-bx+2,$$

假如 f(x)能被 x^2+3x+2 整除，则 x+1 和 x+2 必是 f(x)的因式，因此，当 x=-1 时，f(-1)=0，即

1+a+b+2=0， ①

当 x=-2 时，f(-2)=0，即

16+4a+2b+2=0， ②

由①，②联立，则有

$$\begin{cases} a=-6, \\ b=3. \end{cases}$$

练习十

1．计算：

(1)$(a-2b+c)(a+2b-c)-(a+2b+c)^2$；

(2)$(x+y)^4(x-y)^4$；

(3)$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

2．化简：

(1)$(2x-y+z-2c+m)(m+y-2x-2c-z)$；

(2)$(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)-(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)$；

(3)$(x+y)^2(y+z-x)(z+x-y)+(x-y)^2(x+y+z)\times(x+y-z)$．

3．已知 $z^2=x^2+y^2$，化简

$$(x+y+z)(x-y+z)(-x+y+z)(x+y-z).$$

4．设 $f(x)=2x^3+3x^2-x+2$，求 $f(x)$除以 x^2-2x+3 所得的商式和余式．

第十一讲 线段与角

线段与角是初中平面几何中两个非常基本的概念，这两个概念在日常生活中有着广泛的应用．

小明做作业需要买一些文具．在他家的左边 200 米处有一家文具店，他从家出发向文具店走去，走到一半发现忘了带钱，又回家取钱买了文具后回到家中．问小明共走了多长的路程?

在高层建筑中，一般都设有电梯，人们上楼一般都乘坐电梯，你想过吗，设计电梯与线段的什么性质有关?

钟表是大家熟悉的计时工具,你可曾观察过在 2 点到 3 点之间什么时候时针与分针重合? 什么时候时针与分针成 90° 角?

我们还可以在日常生活中提出许多与线段和角有关的问题，不少问题很有趣，也颇费脑筋，对于留心观察、勤于思考的人来说是锻炼脑筋的好机会．

例 1 已知：AB∶BC∶CD=2∶3∶4，E，F 分别是 AB 和 CD 的中点，且 EF=12 厘米(cm)，求 AD 的长(如图 1－6)．

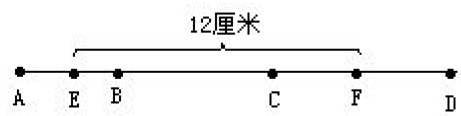


图 1-6

分析 线段 EF 是线段 AD 的一部分，题设给出了 EF 的长度，只要知道线段 EF 占全线段 AD 的份额，就可求出 AD 的长了．

解 因为 AB∶BC∶CD=2∶3∶4，E 是 AB 中点，F 是 CD 中点，将线段 AD 9 等分(9=2+3+4)且设每一份为一个单位，则 AB=2，BC=3，CD=4，EB=1，CF=2．从而

$$EF=EB+BC+CF=1+3+2=6,$$

即EF占AD全长的 $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$．所以

$$\text{线段 AD的长}=12\div\frac{2}{3}=12\times\frac{3}{2}=18\text{（厘米）}.$$

例 2 在直线 l 上取 A，B 两点，使 AB=10 厘米，再在 l 上取一点 C，使 AC=2 厘米，M，N 分别是 AB，AC 中点．求 MN 的长度(如图 1－7)．

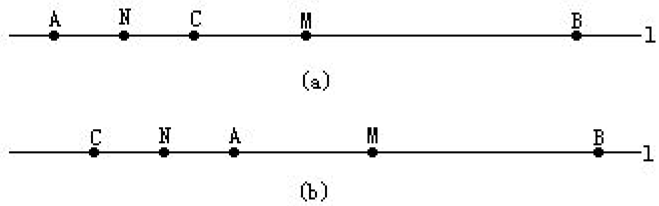


图 1-7

分析 因为是在直线上取 C 点，因此有两种情形：C 点在 A 点的右侧或 C 点在 A 点的左侧．

解 若 C 点在 A 点的右侧(即在线段 AB 上)．因为 AC=2 厘米， N 为 AC 中点，所以 AN=1 厘米；又 AB=10 厘米，M 为 AB 中点，所以 AM=5 厘米．则

MN=AM-AN=5-1=4(厘米)(如图 1－7(a))．

若 C 点在 A 点的左侧(即在线段 BA 延长线上)，此时

MN=NA+AM=1+5=6(厘米)(如图 1－7(b))．

线段的最基本性质是“两点之间线段最短”，这在生活中有广泛应用．前面所提到的高层建筑所设电梯的路线，就是连接两层楼之间的线段，而楼梯的路线则是折线，电梯的路线最短．

例 3 如图 1－8 所示．在一条河流的北侧，有 A，B 两处牧场．每天清晨，羊群从 A 出发，到河边饮水后， 折到 B 处放牧吃草．请问， 饮水处应设在河流的什么位置，从 A 到 B 羊群行走的路程最短?

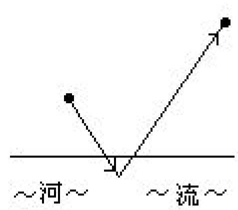


图1-8

分析 将河流看作直线 l(如图 1－9 所示)．设羊群在河边的饮水点为 C′，则羊群行走路程为 AC′+C′B．设 A 关于直线 l 的对称点为 A′，由对称性知 C′A′=C′A．

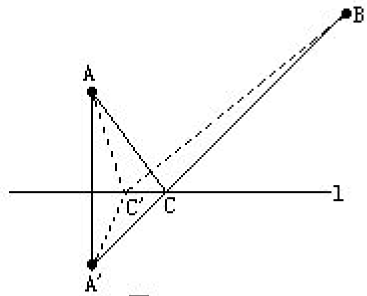


图 1-9

因此，羊群行走的路程为

$$A'C'+C'B.$$

线段A′C′与C′B是连结点A′与点B之间的折线．由线段的基本性质知，连结点A′与点B之间的线中，线段A′B最短．设线段A′B与直线l交于C．那么，C点就是所选的最好的饮水地点，下面我们来说明这一点．

解 作A关于直线l的对称点A′．连结B，A′，并设线段BA′与l交于C．设C′是l上不同于C的另外一点，只要证明

$AC'+C'B>AC+CB$ ①

即可．

利用线段基本性质及点关于直线的对称性知

$$AC'=C'A' \text{ 及 } CA=CA',$$

所以

$$AC'+C'B=C'A'+C'B,$$

$$AC+CB=CA'+CB=A'B.$$

而C′A′与C′B是连结A′，B的折线，而A′B则是连结这两点之间的线段，所以

$$C'A'+C'B>A'B=A'C+CB=AC+CB,$$

从而①成立，即选择C点作为羊群的饮水点，羊群的行程最短．

例4 将长为10厘米的一条线段用任意方式分成5小段，以这5小段为边可以围成一个五边形．问其中最长的一段的取值范围．

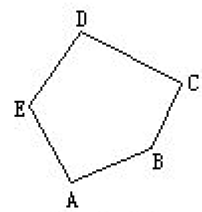


图 1-10

分析 设 AB 是所围成的五边形 ABCDE 的某一边(图 1－10)，而线段 BC，CD，DE，EA 则可看成是点 A，B 之间的一条折线，因此，

$$AB<BC+CD+DE+EA.$$

如果 AB 是最长的一段，上面的不等式关系仍然成立，从而可以求出它的取值范围.

解 设最长的一段 AB 的长度为 x 厘米，则其余 4 段的和为(10-x)厘米．由线段基本性质知 $x<10-x$，所以 $x<5$，即最长的一段 AB 的长度必须小于 5 厘米.

例 5 若一个角的余角与这个角的补角之比是 2：7，求这个角的邻补角.

分析 这个问题涉及到一个角的余角、补角及两个角的比的概念，概念清楚了，问题不难解决.

解 设这个角为α，则这个角的余角为 $90°-\alpha$，这个角的补角为 $180°-\alpha$．依照题意，这两个角的比为

$$(90°-\alpha):(180°-\alpha)=2:7.$$

所以

$$360°-2\alpha=630°-7\alpha，5\alpha=270°，$$

所以 $\alpha=54°$．从而，这个角的邻补角为

$$180°-54°=126°.$$

例 6 若时钟由 2 点 30 分走到 2 点 50 分，问时针、分针各转过多大的角度?

分析 解这个问题的难处在于时针转过多大的角度，这就要弄清楚时针与分针转动速度的关系．每一小时，分针转动 360°，而时针转动

30°，因此时针转动的速度是分针转动速度的 $\frac{1}{12}$.

解 在 2 点 30 分时，时钟的分针指向数字 6；在 2 点 50 分时，时钟的分针指向数字 10，因此，分针共转过“四格”，每转“一格”为 30°，故分针共转过了

$$4\times30^\circ=120^\circ.$$

由于时针转动速度是分针转动速度的$\frac{1}{12}$，从而，时针转动了

$$120^\circ\times\frac{1}{12}=10^\circ$$

在钟表中，有很多有关分针、时针的转角问题．解决这类问题的关

键是把握住时针转速是分针转速的$\frac{1}{12}$（或分针转速是时针转速的12倍).

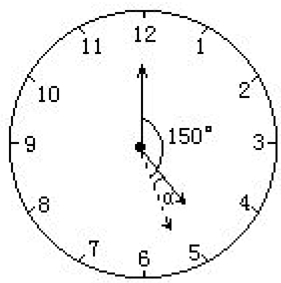


图 1-11

例 7 时钟里，时针从 5 点整的位置起，顺时针方向转多少度时，分钟与时针第一次重合(图 1—11)?

分析 在开始时，从顺时针方向看，时针在分针的“前方”，它们相差 $5\times30^\circ=150^\circ$．由于分针转动速度远远大于时针转动速度(是它的 12 倍)，因此，总有一刻，分针“追上”时针(即两者重合)．具体追上的时刻决定于开始时，分针与时针的角度差及它们的速度比．

解 如分析，在开始时，分针“落后”于时针 150°．设分针与时针第一次重合时，时针转动了α角，那么，分针转动了(150°+α)．因为分钟转速是时针的 12 倍，所以

$$150^\circ+\alpha=12\alpha,$$

$$\alpha=\frac{150^\circ}{11}=13\frac{7^\circ}{11}.$$

即时针顺时针方向转动$13\frac{7^\circ}{11}$时，分针与时针重合.

说明 钟表里的分钟与时针的转动问题本质上与行程问题中的两人追击问题非常相似．行程问题中的距离相当于这里的角度；行程问题中的速度相当于这里时(分)针的转动速度．

下面再看一例．

例 8 在 4 点与 5 点之间，时针与分针在何时

(1)成 120°(图 1－12)；

(2)成 90°(图 1－12)．

分析与解 (1)在 4 点整时，时针与分针恰成 120°．由于所问的时间是介于 4 点到 5 点之间，因此，这个时间不能计入．从 4 点开始，分针与时针之间的角度先逐步减少，直至两针重合(夹角为 0°)．之后，分针“超过”时针，两针之间的夹角又逐渐增大(此时，分针在时针的前面)．

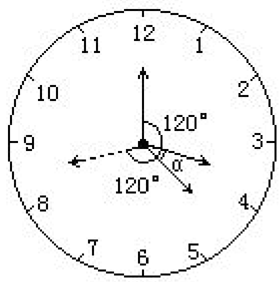


图 1-12

直到两针夹角又一次成为 120°，这个时间正是我们所要求的．

设时针顺时针转过 a 角后，时针与分针(分针在时钟前)成 120°，则

$$12a=120°+a+120°,$$

所以

$$a=\frac{240°}{11}=21\frac{9°}{11}.$$

由于时针每转过 30°(如从指向数字 4 转到指向数字 5)相当于 1

小时（60分钟），所以时针每转过1°相当于经过2分钟，$21\frac{9°}{11}$相当于

经过了

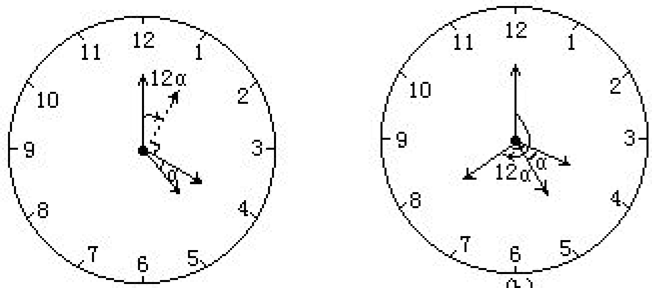
$$21\frac{9}{11}\times2=42\frac{18}{11}=43\frac{7}{11}\text{（分钟）}.$$

因此，在 4点 $43\frac{7}{11}$分时，时针与分钟成120°角.

(2)如图 1－13(a)，(b)所示．

由于在整 4 点时，时针与分针夹角为 120°，因此，在 4 点与 5 点之间，时针与分针成 90°有两种情况：

(i)时针在分针之前(如图 1－13(a))．设时针转了 a 角，分针转了 12a 角，有



(a)　(b)

图 1-13

$$120° + \alpha = 90° + 12\alpha,$$

所以
$$11\alpha = 30°,$$

所以
$$\alpha = \frac{30°}{11}.$$

用时

$$\frac{30}{11} \times 2 = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}\text{（分钟）}.$$

(ii)时针在分针之后(如图 1－13(b))，此时，有关系

$$12\alpha - \alpha = 120° + 90°,$$

$$11\alpha = 210°,$$

所以
$$\alpha = \frac{210°}{11}.$$

用时

$$\frac{210}{11} \times 4 = \frac{420}{11} = 38\frac{2}{11}\text{(分钟)}$$

综上所述，在4点到5点之间，在4点$5\frac{5}{11}$分与4点$38\frac{2}{11}$分两个时间时，时针与分针成 90°．

说明 由于时针与分针所成角依时针与分针的“前”“后”次序有两种情况，因此，按两针夹角情况会出现一解或两解．

练习十一

1．如图 1－14 所示．B，C 是线段 AD 上两点，M 是 AB 的中点，N 是 CD 的中点．若 MN=a，BC=b，求 AD．

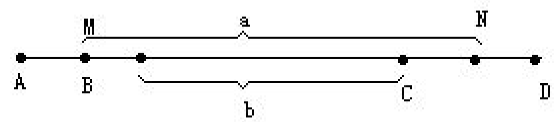


图 1-14

2．如图 1－15 所示．A_2，A_3是线段 A_1A_4上两点，且 $A_1A_2=a^1$，$A_1A_3=a^2$，$A_1A_4=a^3$．求线段 A_1A_4上所有线段之和．

图 1-15

3．如图 1－16 所示．两个相邻墙面上有 A，B 两点，现要从 A 点沿墙面拉一线到 B 点．问应怎样拉线用线最省？

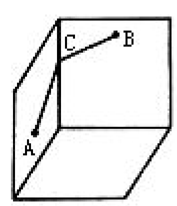


图 1-16

4．互补的两角之差是 28°，求其中一个角的余角．

5．如图 1－17 所示．OB 平分∠AOC，且∠2：∠3：∠4=2：5：3．求∠2，∠3，∠4．

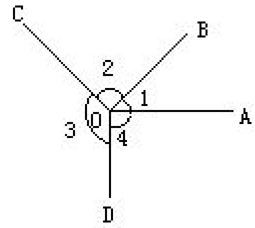


图 1-17

6．在晚 6 点到 7 点之间，时针与分针何时成 90°角？

7．在 4 点到 6 点之间，时针与分针何时成 120°角？

第十二讲 平行线问题

平行线是我们日常生活中非常常见的图形．练习本每一页中的横线、直尺的上下两边、人行横道上的“斑马线”以及黑板框的对边、桌面的对边、教室墙壁的对边等等均是互相平行的线段．

正因为平行线在生活中的广泛应用，因此有关它的基本知识及性质成为中学几何的基本知识．

正因为平行线在几何理论中的基础性，平行线成为古往今来很多数学家非常重视的研究对象．历史上关于平行公理的三种假设，产生了三种不同的几何(罗巴切夫斯基几何、黎曼几何及欧几里得几何)，它们在使人们认识宇宙空间中起着非常重要的作用．

现行中学中所学的几何是属于欧几里得几何，它是建立在这样一个公理基础之上的：“在平面中，经过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行”．

在此基础上，我们学习了两条平行线的判定定理及性质定理．下面我们举例说明这些知识的应用．

例 1 如图 1－18，直线 a∥b，直线 AB 交 a 与 b 于 A，B，CA 平分∠1，CB 平分∠2，求证：∠C=90°

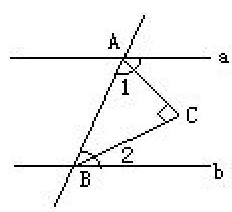


图 1-18

.

分析 由于 a∥b，∠1，∠2 是两个同侧内角，因此∠1+∠2=

180°．那么$\frac{1}{2}$（∠1+∠2）=90°，问题在于如何使$\frac{1}{2}$∠1+$\frac{1}{2}$∠2与∠C相等，这必须通过辅助线将$\frac{1}{2}$∠1，$\frac{1}{2}$∠2转移到C点．为此，

过C点作直线 l，使 l∥a(或 b)即可通过平行线的性质实现等角转移．

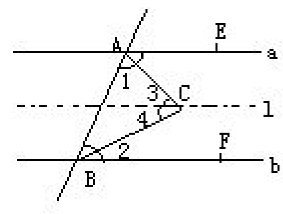


图 1-19

证 过C点作直线l，使l∥a(图 1－19)．因为 a∥b，所以 b∥l，所以

∠1+∠2=180°(同侧内角互补)．

因为 AC 平分∠1，BC 平分∠2，所以

$$\angle CAE=\frac{1}{2}\angle 1,\ \angle CBF=\frac{1}{2}\angle 2.$$

又∠3=∠CAE，∠4=∠CBF(内错角相等)，所以

$$\angle 3+\angle 4=\angle CAE+\angle CBF$$

$$=\frac{1}{2}(\angle 1+\angle 2)=\frac{1}{2}\times 180°=90°.$$

说明 做完此题不妨想一想这个问题的“反问题”是否成立， 即“两条直线 a，b 被直线 AB 所截(如图 1－20 所示)，CA，CB 分别是∠BAE 与∠ABF 的平分线，若∠C=90°，问直线 a 与直线 b 是否一定平行？”

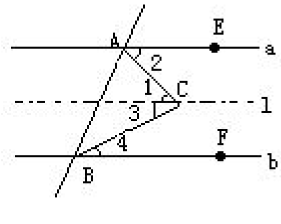


图 1-20

由于这个问题与上述问题非常相似(将条件与结论交换位置)，因此，不妨模仿原问题的解决方法来试解．

例 2 如图 1－21 所示，$AA_1 /\!/ BA_2$ 求 $\angle A_1 - \angle B_1 + \angle A_2$．

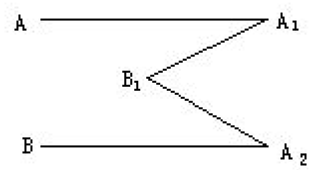


图 1-21

分析 本题对 $\angle A_1$，$\angle A_2$，$\angle B_1$ 的大小并没有给出特定的数值，因此，答案显然与所给的三个角的大小无关．也就是说，不管 $\angle A_1$，$\angle A_2$，$\angle B_1$ 的大小如何，答案应是确定的．我们从图形直观，有理由猜想答案大概是零，即

$$\angle A_1 + \angle A_2 = \angle B_1. \quad ①$$

猜想，常常受到直观的启发，但猜想必须经过严格的证明．①式给我们一种启发，能不能将 $\angle B_1$ 一分为二使其每一部分分别等于 $\angle A_1$ 与 $\angle A_2$．这就引发我们过 B_1 点引 AA_1(从而也是 BA_2)的平行线，它将 $\angle B_1$ 一分为二．

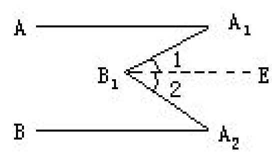


图 1- 22

证 过 B_1 引 $B_1E /\!/ AA_1$，它将 $\angle A_1B_1A_2$ 分成两个角：$\angle 1$，$\angle 2$(如图 1－22 所示)．

因为 $AA_1 /\!/ BA_2$，所以 $B_1E /\!/ BA_2$．从而

$$\angle 1 = \angle A_1，\angle_2 = \angle A_2 \text{(内错角相等)},$$

所以

$$\angle B_1 = \angle 1 + \angle 2 = \angle A_1 + \angle A_2,$$

即 $\angle A_1 - \angle B_1 + \angle A_2 = 0$．

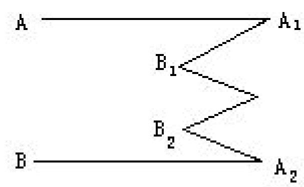


图 1-23

说明(1)从证题的过程可以发现，问题的实质在于 $AA_1 /\!/ BA_2$，它与连接 A_1，A_2 两点之间的折线段的数目无关，如图 1－23 所示．连接 A_1，A_2 之间的折线段增加到 4 条：A_1B_1，B_1A_2，A_2B_2，B_2A3，仍然有

$$\angle A_1+\angle A_2+\angle A3=\angle B_1+\angle B_2.$$

(即那些向右凸出的角的和=向左凸的角的和)即

$$\angle A_1-\angle B_1+\angle A_2-\angle B_2+\angle A3=0.$$

进一步可以推广为

$$\angle A_1-\angle B_1+\angle A_2-\angle B_2+\cdots-\angle B_{n-1}+\angle A_n=0.$$

这时，连结 A_1，A_n 之间的折线段共有 n 段 A_1B_1，B_1A_2，…，$B_{n-1}A_n$(当然，仍要保持 $AA_1 /\!/ BA_n$)．

推广是一种发展自己思考能力的方法，有些简单的问题，如果抓住了问题的本质，那么，在本质不变的情况下，可以将问题推广到复杂的情况．

(2)这个问题也可以将条件与结论对换一下，变成一个新问题．

问题 1 如图 1－24 所示．$\angle A_1+\angle A_2=\angle B_1$，问 AA_1 与 BA_2 是否平行?

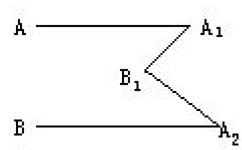


图 1-24

问题 2 如图 1－25 所示．若

$$\angle A_1+\angle A_2+\cdots+\angle A_n=\angle B_1+\angle B_2+\cdots+\angle B_{n-1}，问 AA_1 与 BA_n 是否平行?$$

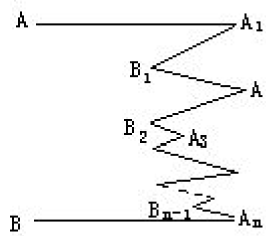


图 1-25

这两个问题请同学加以思考.

例 3 如图 1－26 所示．AE∥BD，∠1=3∠2，∠2=25°，

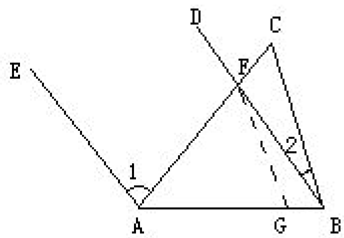


图 1-26

求∠C.

分析 利用平行线的性质，可以将角“转移”到新的位置，如∠1=∠DFC 或∠AFB．若能将∠1，∠2，∠C“集中”到一个顶点处，这是最理想不过的了，过 F 点作 BC 的平行线恰能实现这个目标.

解 过 F 到 FG∥CB，交 AB 于 G，则

∠C=∠AFG(同位角相等)，

∠2=∠BFG(内错角相等).

因为 AE∥BD，所以

∠1=∠BFA(内错角相等)，

所以

∠C=∠AFG=∠BFA-∠BFG

=∠1-∠2=3∠2-∠2

$=2\angle 2=50°$．

说明(1)运用平行线的性质，将角集中到适当位置，是添加辅助线(平行线)的常用技巧．

(2)在学过“三角形内角和”知识后，可有以下较为简便的解法：$\angle 1=\angle DFC=\angle C+\angle 2$，即

$$\angle C=\angle 1-\angle 2=2\angle 2=50°.$$

例 4 求证：三角形内角之和等于 180°．

分析 平角为 180°．若能运用平行线的性质，将三角形三个内角集中到同一顶点，并得到一个平角，问题即可解决， 下面方法是最简单的一种．

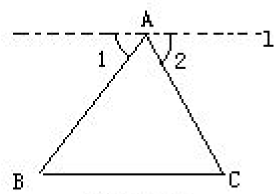


图 1-27

证 如图 1－27 所示，在△ABC 中，过 A 引 l∥BC，则

$$\angle B=\angle 1,\ \angle C=\angle 2(\text{内错角相等}).$$

显然 $\angle 1+\angle BAC+\angle 2=$平角，

所以 $\angle A+\angle B+\angle C=180°$．

说明 事实上，我们可以运用平行线的性质，通过添加与三角形三条边平行的直线，将三角形的三个内角“转移”到任意一点得到平角的结论．如将平角的顶点设在某一边内，或干脆不在三角形的边上的其他任何一点处，不过，解法将较为麻烦．同学们不妨试一试这种较为麻烦的证法．

例 5 求证：四边形内角和等于 360°．

分析 应用例 3 类似的方法，添加适当的平行线，将这四个角“聚合”在一起使它们之和恰为一个周角．在添加平行线中，尽可能利用原来的内角及边，应能减少推理过程．

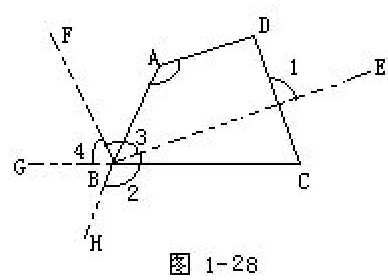


图 1-28

证 如图1－28所示，四边形ABCD中，过顶点B引BE∥AD，BF∥CD，并延长 AB，CB到 H，G．则有∠A=∠2(同位角相等)，∠D=∠1(内错角相等)，∠1=∠3(同位角相等)．

∠C=∠4(同位角相等)，

又 ∠ABC(即∠B)=∠GBH(对顶角相等)．

由于∠2+∠3+∠4+∠GBH=360°，所以

∠A+∠B+∠C+∠D=360°．

说明(1)同例3，周角的顶点可以取在平面内的任意位置，证明的本质不变．

(2)总结例3、例4，并将结论的叙述形式变化，可将结论加以推广：

三角形内角和=180°=(3-2)×180°，

四边形内角和=360°=2×180°=(4-2)×180°．

人们不禁会猜想：

五边形内角和=(5-2)×180°=540°，

…………………………

n边形内角和=(n-2)×180°．

这个猜想是正确的，它们的证明在学过三角形内角和之后，证明将非常简单．

(3)在解题过程中，将一些表面并不相同的问题，从形式上加以适当变形，找到它们本质上的共同之处，将问题加以推广或一般化，这是发展人的思维能力的一种重要方法．

例6 如图1－29所示．直线l的同侧有三点A，B，C，且AB∥l，BC∥l．求证： A，B，C三点在同一条直线上．

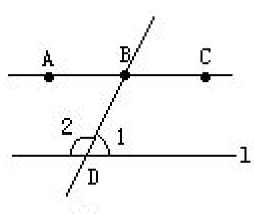


图1-29

分析 A，B，C三点在同一条直线上可以理解为∠ABC为平角，即只要证明射线BA与BC所夹的角为180°即可，考虑到以直线l上任意一点为顶点，该点分直线所成的两条射线为边所成的角均为平角，结合所给平行条件，过B作与l相交的直线，就可将l上的平角转换到顶点B处．

证 过B作直线 BD，交l于D．因为 AB∥l，CB∥l，所以

$$\angle 1=\angle ABD，\angle 2=\angle CBD(内错角相等).$$

又∠1+∠2=180°，所以

$$\angle ABD+\angle CBD=180°，$$

即∠ABC=180°=平角．

A，B，C 三点共线．

思考 若将问题加以推广：在l的同侧有n个点 A_1，A_2，…，A_{n-1}，A_n，且有 A_iA_{i+1}∥l(i=1，2，…，n-1)．是否还有同样的结论?

例 7 如图 1－30 所示．∠1=∠2，∠D=90°，EF⊥CD．

求证：∠3=∠B．

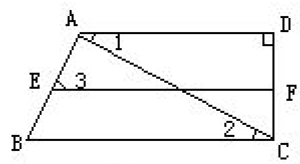


图 1-30

分析 如果∠3=∠B，则应需 EF∥BC．又知∠1=∠2，则有 BC∥AD．从而，应有 EF∥AD．这一点从条件 EF⊥CD 及∠D=90°不难获得．

证 因为∠1=∠2，所以

$$AD∥BC(内错角相等，两直线平行).$$

因为∠D=90°及 EF⊥CD，所以

$$AD∥EF(同位角相等，两直线平行).$$

所以 BC∥EF(平行公理)，

所以

$$\angle 3=\angle B(两直线平行，同位角相等).$$

练习十二

1．如图 1－31 所示．已知 AB∥CD，∠B=100°，EF 平分∠BEC，EG⊥EF．求∠BEG 和∠DEG．

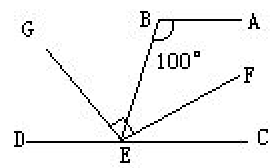


图 1-31

2．如图 1－32 所示．CD 是∠ACB 的平分线，∠ACB=40°，∠B=70°，DE∥BC．求∠EDC 和∠BDC 的度数．

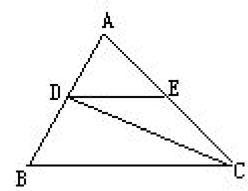


图 1-32

3．如图 1－33 所示．AB∥CD，∠BAE=30°，∠DCE=60°，EF，EG 三等分∠AEC．问：EF 与 EG 中有没有与 AB 平行的直线，为什么？

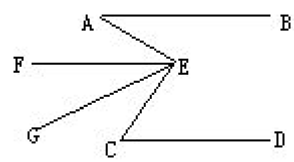


图 1-33

4．证明：五边形内角和等于 540°．

5．如图 1－34 所示．已知 CD 平分∠ACB，且 DE∥ACCD∥EF．求证：EF 平分∠DEB．

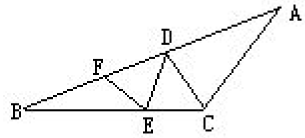


图 1-34

第十三讲 从三角形内角和谈起

三角形的内角和等于 180°(也称一个平角)是三角形的一个基本性质．从它出发可引出下面两个事实：

(1)三角形的外角等于此三角形中与它不相邻的两个内角和．

如图 1－35 所示．延长三角形的三条边，由三角形一条边

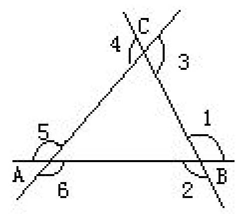


图 1-35

及另一条边的延长线所成的角称为该三角形的一个外角．如图 1－35 中的∠1，∠2，∠3，∠4，∠5，∠6．由于

$$\angle 1+\angle ABC=180^\circ \text{(平角)},$$

又

$$\angle BAC+\angle BCA+\angle ABC=180^\circ,$$

所以

$$\angle 1=\angle BAC+\angle BCA.$$

同法可证

$$\angle 3=\angle BAC+\angle ABC,$$

$$\angle 5=\angle ABC+\angle ACB.$$

(2)n 边形的内角和等于(n-2)×180°．

如图 1－36 所示．以 n 边形 A1A2…An 的某一个顶点(如 A1)为共同顶点，将这个 n 边形“分割成” n-2 个三角形△A1A2A3，△A1A3A4，…， △A1An-1An．由于每一个三角形的内角和等于 180°，所以，这 n-2 个三角形的内角和(即 n 边形的内角和)为(n-2)×180°(详证见后面例 6)．

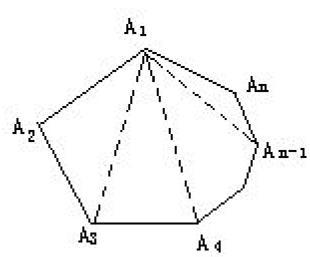


图 1-36

三角形内角和等于 180°这个事实有着广泛的应用．

例 1 如图 1－37 所示．平面上六个点 A，B， C，D，E，F 构成一个封闭折线图形．求：$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F$.

分析 所求的六个角分布在三个三角形中，但需减去顶点位于 P，Q，R 处的三个内角，由图形结构不难看出，这三个内角可以集中到△PQR 中．

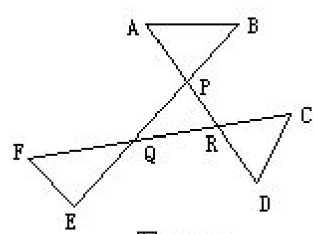


图 1-37

解 在△PAB，△RCD，△QEF 中，

$$\angle A+\angle B+\angle APB=180^\circ, \quad ①$$

$$\angle C+\angle D+\angle CRD=180^\circ, \quad ②$$

$$\angle E+\angle F+\angle EQF=180^\circ. \quad ③$$

又在△PQR 中

$$\angle QPR+\angle PRQ+\angle PQR=180^\circ. ④$$

又 $\angle APB=\angle QPR$，$\angle CRD=\angle PRQ$，

$$\angle EQF=\angle PQR\text{(对顶角相等)}.$$

①+②+③-④得

$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=360^\circ.$$

说明 依据图形的特点，利用几何图形的性质将分散的角集中到某些三角形之中，是利用三角形内角和性质的前提．

例 2 求如图 1－38 所示图形中 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E$ 的大小．

分析 如果我们注意力放在三角形内角和上，那么

$$\angle ABE=\angle ABO+\angle OBE,$$

$$\angle AEB=\angle AED+\angle OEB.$$

而∠ABE，∠AEB属于△ABE，∠OBE，∠OEB属于△OBE，再注意到△OBE及△ODC中，因∠BOE=∠COD(对顶角)，因而， ∠D+∠C=∠OBE+∠OEB．从而，可求出题中五角和．

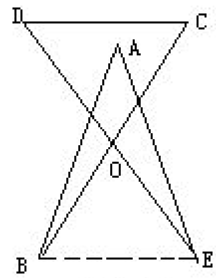


图 1-38

解法1 连接BE．在△COD中，

$$\angle C+\angle D+\angle COD=180^\circ. \quad ①$$

在△ABE中，

$$\angle A+\angle ABE+\angle AEB=180^\circ. \quad ②$$

①+②得

$$(\angle A+\angle C+\angle D)+\angle COD+\angle ABE+\angle AEB=360^\circ. \quad ③$$

又

$$\angle ABE=\angle ABO(\text{即为}\angle B)+\angle OBE,$$

$$\angle AEB=\angle AEO(\text{即为}\angle E)+\angle OEB.$$

故③式可化为

$$(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E)$$

$$+(\angle COD+\angle OBE+\angle OEB)=360^\circ. ④$$

由于

$$\angle COD=\angle BOE(\text{对顶角相等}),$$

在△BOE中

$$\angle COD+\angle OBE+\angle OEB$$

$$=\angle BOE+\angle OBE+\angle OEB$$

$=180°$．

由④得 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=180°$．

解法 2 如果我们注意到三角形外角的性质，结合图形(图 1－39)会发现在△OCD 中有$\angle 1=\angle C+\angle D$，△APE 中$\angle 2=\angle A+\angle E$，在△BOP 中$\angle 1+\angle 2+\angle B=180°$，从而有$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=180°$．

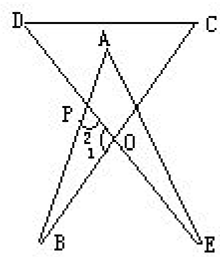


图 1－39

说明 本例解法 2 比解法 1 简洁，因为我们应用了关于三角形外角的性质．

例 3 如图 1－40 所示．在△ABC 中，∠B 的平分线与∠C 的外角平分线交于 D，且$\angle D=30°$．求∠A 的度数．

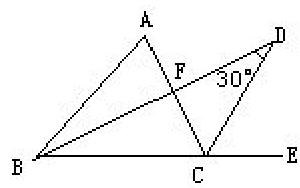


图 1－40

分析∠D 位于△BCD 中，∠A 位于△ABC 中，它们位于两个不同的三角形之中，欲利用三角形内角和定理解决问题，就必须寻求两个三角形中内角之间的关系，角平分线的条件为我们提供了信息，事实上$\angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，以及$\angle DCB=\angle ACB+\angle ACD$（它是∠C外角的一半）．

解 由已知，$\angle D=30°$．在△BCD 中，

$$\angle CBD+\angle BCD=180°-30°=150°．①$$

因为 BD 是∠ABC 的平分线，所以

$$\angle CBD=\frac{1}{2}\angle ABC．②$$

又因为 CD 是∠ACE 的平分线，所以

$$\angle ACD=\frac{1}{2}\angle ACE.$$

从而

$$\angle BCD=\angle ACB+\frac{1}{2}\angle ACE$$

$$=\angle ACB+\frac{1}{2}(\angle A+\angle ABC)\text{（三角形外角定理）. ③}$$

由①，②，③

$$\frac{1}{2}\angle ABC+\angle ACB+\frac{1}{2}(\angle A+\angle ABC)=150^\circ,$$

即

$$\frac{1}{2}\angle A+\angle ABC+\angle ACB=\frac{1}{2}\angle A+\angle B+\angle C=150^\circ.$$

所以

$$(\angle A+\angle B+\angle C)-\frac{1}{2}\angle A=150^\circ,$$

$$\frac{1}{2}\angle A=180^\circ-150^\circ=30^\circ,$$

所以 ∠A=60°.

说明 解决本题的关键在于两条角平分线架起了△ABC 与△BCD 之间的桥梁，完成了从已知向未知的过渡．细心审题，发现已知与所求之间的联系，常是解题的重要前提．

例 4 如图 1-41 所示．∠A=10°，∠ABC=90°，

∠ACB=∠DCE，∠ADC=∠EDF，∠CED=∠FEG．求∠F 的度数．

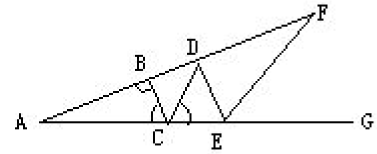


图 1-41

分析 如果我们能注意到所给的一系列等角条件正反映了内角与外角的关系，问题就不难解决．例如在∠ACB=∠DCE 中，∠ACB 是△ABC 的一个内角，∠DCE 是△ACD 的外角．∠ADC=∠EDF 及∠CED=∠FEG 两个等式两边的角也是类似情况，这就为我们利用外角定理解题创造了机会．

解 在△ABC 中，∠A=10°，∠ABC=90°，所以∠ACB＝80°．因为

$$\angle DCE=\angle ACB=80^\circ,$$

在△ACD 中，∠DCE 是它的一个外角，所以

$$\angle DCE=\angle A+\angle ADC,$$

$$80^\circ=10^\circ+\angle ADC,$$

所以

$$\angle ADC=70^\circ,\ \angle EDF=\angle ADC=70^\circ.$$

在△ADE 中，∠EDF 是它的一个外角，所以

$$\angle EDF=\angle A+\angle AED,$$

$$70^\circ=10^\circ+\angle AED,$$

所以

$$\angle AED=60^\circ,\ \angle FEG=\angle AED=60^\circ.$$

在△AEF 中，∠FEG 是它的一个外角，所以

$$\angle FEG=\angle A+\angle F,$$

所以

$$\angle F=\angle FEG-\angle A=60^\circ-10^\circ=50^\circ.$$

例 5 如图 1－42 所示．△ABC 的边 BA 延长线与外角∠ACE 的平分线交于 D．求证：∠BAC＞∠B．

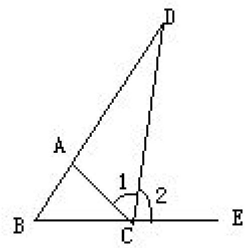


图 1-42

分析 三角形的外角定理的意义中已暗含着“三角形的外角大于三角形中与此外角不相邻的内角”的意义．证明有关三角形角的不等问题可从此下手．

证 ∠BAC 是△ACD 的一个外角，因为∠BAC=∠1+∠D，所以 2∠BAC=2∠1+2∠D=∠ACE+2∠D＞∠ACE①(因为 CD 是∠ACE 的平分线)．又∠ACE 是△ABC 的一个外角，所以

$$\angle ACE=\angle B+\angle BAC. \quad ②$$

由②，③

$$2\angle BAC>\angle B+\angle BAC,$$

所以 ∠BAC＞∠B．

由于多边形可以分割为若干个三角形，因而多边形的内角和可以转化为三角形内角和来计算．下面我们来求 n(n⩾3 的自然数)边形的内角和．

例 6 n 边形的内角和等于$(n-2)\cdot 180^\circ$．

分析 我们不妨先从具体情况入手．

当 n=4 时，如图 1－43 所示．四边形 ABCD 用一条对角线可以分割成两个三角形，因此

四边形 ABCD 的内角和=三角形 ABC 的内角和+三角形 ACD 的内角和

$=2\times180^\circ=360^\circ$．

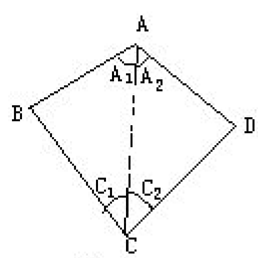


图 1-43

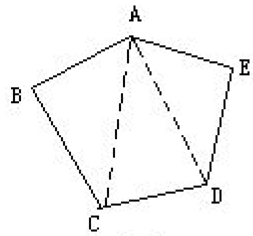


图 1-44

当 n=5 时，如图 1－44 所示．五边形 ABCDE 用两条对角线可以分割为三个三角形．类似于 n=4 的情况，可证明：五边形 ABCDE 的内角和=3×180°=540°．

由这两个具体实例，我们可以找到 n 边形的内角和的证明方法．

证　在 n 边形 A1A2A3…An 中，以 A1 为一个端点，连接对角线 A1A3，A1A4，…，A1An-1，共有(n-1)-3+1=n-3 条对角线，将这个 n 边形分割成 n-2 个三角形．显然，这 n-2 个三角形的内角“合并”起来恰是这个 n 边形的 n 个内角，如图 1-45 所示．所以

n 边形的内角和=(n-2)×180°．

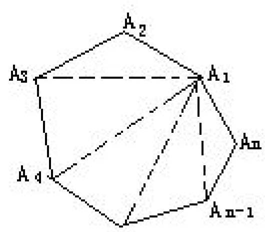


图 1-45

说明(1)从具体的简单的问题入手常能找到解决复杂问题的思路．如本题从 n=4，5 入手，找到将多边形分割为三角形的方法(这是一个本质的方法)，从而可以推广到 n 为任意自然数的范围中去．

(2)各条边都相等，各个内角都相等的多边形称为正多边形．由本例自然可以推出正 n 边形每一个内角的大小．

设正 n 边形的一个内角大小为 a，则

n 边形的内角和=na=(n-2)×180°，

所以

$$a=\frac{(n-2)}{n}\times 180^\circ.$$

例如正五边形的内角的度数为

$$\alpha=\frac{5-2}{5}\times180^\circ=108^\circ.$$

正十边形的内角度数为

$$\alpha=\frac{10-2}{5}\times180^\circ=8\times18^\circ=144^\circ.$$

练习十三

1．如图 1－46 所示．∠A+∠B+∠C+∠D+∠E 的大小．

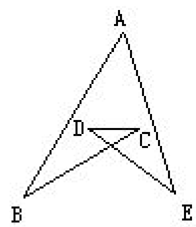


图 1-46

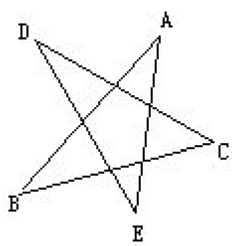


图 1-47

2．如图 1－47 所示．求 ∠A+∠B+∠C+∠D+∠E 的大小．

3．如图 1－48 所示．求∠A+∠B+∠C+∠D+∠E+∠F 的大小．

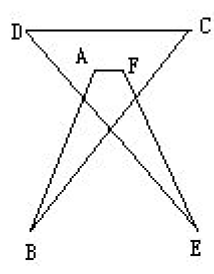


图 1-48

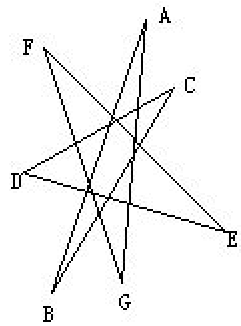


图 1-49

4．如图 1-49 所示．求∠a+∠B+∠C+∠D+∠E+∠F+∠G 的大小．

5．如图 1－50 所示．△ABC 中，AE 是∠A 的平分线，CD⊥AE 于 D．求证：∠ACD＞∠B．

6．若多边形内角和分别为下列度数时，试分别求出多边形的边数：

(1)1260°；(2)2160°．

7．证明：n 边形的外角和等于 360°．

第十四讲 面积问题

我们已经学过的面积公式有：

(1) $S_{三角形}=\frac{1}{2}ah_a$（其中h_a表示a边上的高）．

(2)S 平行四边形=ah(其中 h 表示 a 边上的高)．

(3) $S_{梯形}=\frac{1}{2}(a+b)h$（其中a，b表示梯形中，两条平行边的长，h 表示平行边之间的距离)．

由于多边形可以分割为若干个三角形，多边形的面积等于各三角形面积和，因此，三角形的面积是面积问题的基础．

等积变形是面积问题中富于思考性的有趣问题，它是数学课外活动的重要内容，这一讲中我们将花较多的篇幅来研究多边形的等积变形．

等积变形是指保持面积不变的多边形的变形．

三角形的等积变形是多边形等积变形的基础，关于三角形的等积变形有以下几个主要事实：

(1)等底等高的两个三角形面积相等．

(2)两个三角形面积之比，等于它们的底高乘积之比．

(3)两个等底三角形面积之比，等于它们的高之比．

(4)两个等高三角形面积之比等于它们的底之比．

例 1 已知△ABC 中三边长分别为 a，b，c，对应边上的高分别为 $h_a=4$，$h_b=5$，hc=3．求 a∶b∶c．

解 设△ABC 的面积为 S，则

$$S=\frac{1}{2}a\cdot ha=\frac{1}{2}b\cdot hb=\frac{1}{2}c\cdot hc=2a=\frac{5}{2}b=\frac{3}{2}c,$$

所以
$$a=\frac{S}{2},\ b=\frac{2}{5}S,\ c=\frac{2}{3}S,$$

所以

$$a:b:c=\frac{1}{2}:\frac{2}{5}:\frac{2}{3}=15:12:20.$$

说明 同一个三角形依面积公式可以有三种不同的表示法，由此获得三边之比．

例 2 如图 1－51，▱ABCD 的面积为 64 平方厘米(cm^2)，E，F 分别为 AB，AD 的中点，求△CEF 的面积．

分析 由于△CEF 的底与高难以从平行四边行的面积中求出，因此，应设法将四边形分割为三角形，利用面积比与底(高)比来解决．

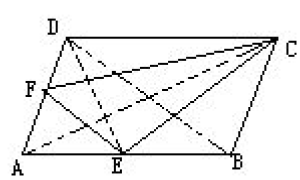


图 1-51

解 连接 AC．E 为 AB 中点，所以

$$S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}S_{▱ABCD}=16\text{（平方厘米）}.$$

同理可得

$S_{\triangle cDF}=16$(平方厘米).

连接 DE，DB，F 为 AD 中点，所以

$$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle AED}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABD}=\frac{1}{8}S_{\square ABCD}=8\text{（平方厘米）}.$$

从而

$$S_{\triangle cEF}=S_{aBCD}-S_{\triangle aEF}-S_{\triangle bCE}-S_{\triangle cDF}$$

$$=64-16-16-8=24\text{(平方厘米)}.$$

说明 (1) E，F 是所在边的中点启发我们添加辅助线 BD，DE.

(2)平行四边形的对角线将平行四边形分成两个三角形的面积相等是由平行四边形对边相等及平行线间的距离处处相等，从而这两个三角形的底、高相等获知的.

例3 如图1－52所示．已知△ABC的面积为1．且$BD=\frac{1}{2}DC$，$AF=\frac{1}{2}FD$，$CE=\frac{1}{2}EF$．求△DEF的面积.

分析 直接求△DEF 面积有困难，观察图形，发现△DEF 与△DCF 有共同的顶点 D，其底边在同一条直线上，因而，高相同．所以

$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle DCF}}=\frac{EF}{CF}=\frac{2}{3}.$$

于是，求△DEF 的面积就转化为求△DCF 的面积．用同样的办法可将△DCF 的面积转化为△ADC 的面积，进而转化为△ABC 的面积.

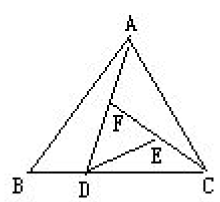


图 1－52

解 因为$CE=\frac{1}{2}EF$，所以$EF=2CE$，△DEF与△DCF有共同的顶点 D，且底边 EF，CF 在

同一条直线上，

所以
$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle DCF}}=\frac{EF}{CF}=\frac{2}{3}.$$

EF：CF=2：3，

同理，△DCF与△DCA有共同的顶点C，且底边DF，DA在同一条直线上，由已知DF：DA=2：3，

所以

$$\frac{S_{\triangle DCF}}{S_{\triangle DCA}}=\frac{2}{3}.$$

同样$\frac{S_{\triangle DCA}}{S_{\triangle BCA}}=\frac{2}{3}$．所以

$$S_{\triangle DEF}=\frac{2}{3}S_{\triangle DCF}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}S_{\triangle DCA}$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot S_{\triangle BCA}=\frac{8}{27}.$$

例4 用面积方法证明：三角形两边中点连线平行于第三边．

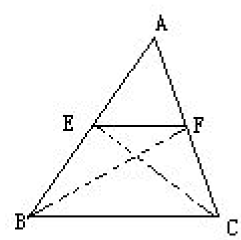


图 1-53

分析与解 如图1－53所示．设E，F分别是AB，AC的中点，可求得△EBC与△FBC的面积相等(均为△ABC面积的一半)．由于这两个三角形同底BC，因而这两个三角形的顶点E，F在一条与底边BC平行的直线上，所以EF∥BC．

说明 (1)从证题过程看出，条件“E，F是所在边的中点”可

以推广为“$\frac{BE}{BA}=\frac{CF}{CA}\left(或\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}\right)$等”，事实上

$$\frac{BE}{BA}=\frac{S_{\triangle CBE}}{S_{\triangle CAB}},\frac{CF}{CA}=\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle BCA}},$$

则
$$\frac{S_{\triangle CBE}}{S_{\triangle CAB}}=\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle BCA}},$$

从而 $S_{\triangle cBE}=S_{\triangle bCF}$.

这两个三角形同底BC，因此，它们的顶点E，F的连线与底边平行.

(2)同样用面积的方法可以证明如下事实：三角形ABC中，若EF∥BC且AE∶EB=m，则AF∶FC=m(请同学们自己证明).

例5 如图1－54．在△ABC中，E是AB的中点，D是AC上的一点，且AD∶DC=2∶3，BD与CE交于F， $S_{\triangle ABC}=40$，求 S_{AEFD}.

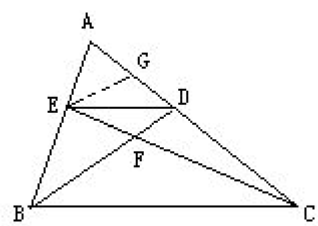


图1-54

分析 四边形 AEFD可分割为△AED与△DEF.从E是AB中点及D分AC为2∶3的条件看，△AED的面积不难推知，关键是如何推求△DEF的面积．为此，需通过添加辅助线的办法，寻求△DEF的面积与已知面积的关系．

解 取AD的中点G，并连接EG，在△ABD中，E是AB的中点，由例3知EG∥BD．又CD∶DG=3∶1，从而，在△CEG中，

CF∶FE=CD∶DG=3∶1(例3说明(2))，

所以 S△DFC∶S△DFE=3∶1．

设S△DEF=x，则S△DFC=3x，S△DEC=4x．由于

AD∶DC=2∶3，

所以

S△EAD∶S△ECD=2∶3，

$$S_{\triangle EAD}=\frac{2}{3}S_{\triangle DEC}=\frac{8}{3}x.$$

于是
$$S_{\triangle ACE}=\frac{8}{3}x+4x=\frac{20}{3}x.$$

又因为 E 是 AB 中点，所以

$$S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=20,$$

所以$\frac{20}{3}x=20$，$x=3$，即$S_{\triangle DEF}=3$．所以$S_{\triangle ADE}=\frac{8}{3}x=8$，所以

$$S_{\text{▱}aEFD}=S_{\triangle aDE}+S_{\triangle DEF}=8+3=11.$$

说明 在三角形中，利用平行线实行比的转移，再利用等积变形，得到相应的面积的比，从而将欲求的△DEF 的面积与已知的△ABC 的面积“挂上了钩”．这里取 AD 的中点 G，得到 BD 的平行线 EG 是关键．

例 6 如图 1-55 所示．E，F 分别是▱ABCD 的边 AD，AB 上的点，且 BE=DF，BE 与 DF 交于 O．求证：C 点到 BE 的距离等于它到 DF 的距离．

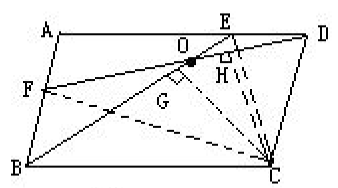


图 1-55

分析 过 C 作 CG⊥BE 于 G，CH⊥FD 于 H，则 CG，CH 分别是 C 到 BE，DF 的距离，问题就是要证明 CG=CH．结合已知，BE=DF，可以断言，△BCE 的面积等于△CDF 的面积．由于这两个三角形的面积都等于 ABCD 面积的一半，因此它们等积，问题获解．

解 连接 CF，CE．因为

$$S_{\triangle BCE}=S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}S_{\text{▱}ABCD},$$
$$S_{\triangle CDF}=S_{\triangle CAD}=\frac{1}{2}S_{\text{▱}ABCD},$$

所以
$$S_{\triangle bCE}=S_{\triangle cDF}.$$

因为 BE=DF，所以

CG=CH(CG，CH 分别表示 BE，DF 上的高)，

即 C 点到 BE 和 DF 的距离相等．

说明(1)△BCE 与△CDF 是两个形状及位置完全不同的三角形，它们面积相等正是通过等积变形——都等于同一平行四边形的面积之半．

(2)通过等积变形可以证明线段的相等．

练习十四

1．如图 1－56 所示．在△ABC 中，EF∥BC，且 AE∶EB=m，求证：AF∶FC=m．

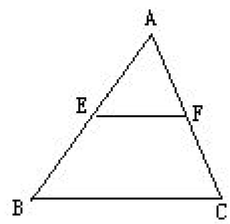


图 1-56

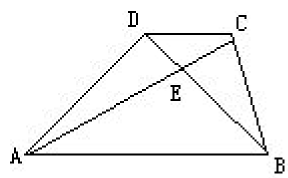


图 1-57

2．如图 1－57 所示．在梯形 ABCD 中， AB∥CD．若△DCE 的面积是△DCB 的面积的 $\frac{1}{4}$，问：△DCE 的面积是△ABD 的面积的几分之几？

3．如图 1－58 所示．已知 P 为△ABC 内一点，AP，BP，CP 分别与对边交于 D，E，F，把△ABC 分成六个小三角形，其中四个小三角形的面积已在图中给出．求△ABC 的面积．

4．如图 1－59 所示．P 为△ABC 内任意一点，三边 a，b，c 的高分别为 h_a，h_b，h_c，且 P 到 a，b，c 的距离分别为 t_a，t_b，t_c．

求证：$\frac{t_a}{h_a}+\frac{t_b}{h_b}+\frac{t_c}{h_c}=1$．

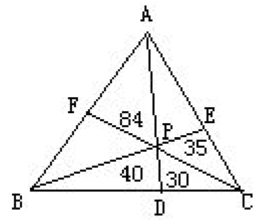


图 1-58

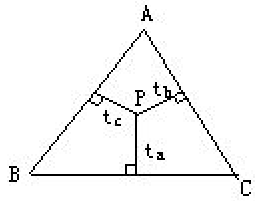


图 1-59

5．如图 1－60 所示．在梯形 ABCD 中，两腰 BA，CD 的延长线相交于 O，OE∥DB，OF∥AC 且分别交直线 BC 于 E，F．求证：BE=CF．

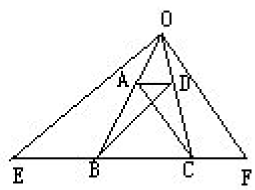


图 1-60

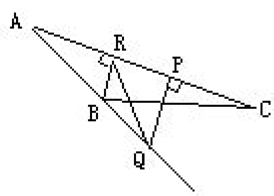


图 1-61

6．如图 1－61 所示．P 是△ABC 的 AC 边的中点，PQ⊥AC 交 AB 延长线于 Q，BR⊥AC 于 R．

求证：$S_{\triangle ARQ}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$．

提高篇

第十五讲 奇数与偶数

通常我们所说的“单数”、“双数”，也就是奇数和偶数，即±1，±3，±5，…是奇数，0，±2，±4，±6，…是偶数．

用整除的术语来说就是：能被2整除的整数是偶数，不能被2整除的整数是奇数．通常奇数可以表示为2k+1(或2k-1)的形式，其中k为整数，偶数可以表示为2k的形式，其中k是整数．

奇数和偶数有以下基本性质：

性质1 奇数≠偶数．

性质2 奇数±奇数=偶数，偶数±偶数=偶数，奇数±偶数=奇数．

性质3 奇数×奇数=奇数，偶数×偶数=偶数，奇数×偶数=偶数．

性质4 奇数个奇数之和是奇数；偶数个奇数之和是偶数；任意有限个偶数之和为偶数．

性质5 若干个奇数的乘积是奇数，偶数与整数的乘积是偶数．

性质6 如果若干个整数的乘积是奇数，那么其中每一个因子都是奇数；如果若干个整数的乘积是偶数，那么其中至少有一个因子是偶数．

性质7 如果两个整数的和(或差)是偶数，那么这两个整数的奇偶性相同；如果两个整数的和(或差)是奇数，那么这两个整数一定是一奇一偶．

性质8 两个整数的和与差的奇偶性相同．

性质9 奇数的平方除以8余1，偶数的平方是4的倍数．

性质1至性质6的证明是很容易的，下面我们给出性质7至性质9的证明．

性质7的证明 设两个整数的和是偶数，如果这两个整数为一奇一偶，那么由性质2知，它们的和为奇数，因此它们同为奇数或同为偶数．

同理两个整数的和(或差)是奇数时，这两个数一定是一奇一偶．

性质8的证明 设两个整数为X，y．因为

$$(x+y)+(x-y)=2x$$

为偶数，由性质7便知，x+y与x-y同奇偶．

性质9的证明 若x是奇数，设x=2k+1，其中k为整数，于是

$$x^2=(2k+1)^2=4k^3+4k+1=4k(k+1)+1.$$

因为 k 与 k+1 是两个连续的整数，它们必定一奇一偶，从而它们的乘积是偶数．于是，x^2 除以 8 余 1．

若 y 是偶数，设 y=2t，其中 t 为整数，于是

$$y^2=(2t)^2=4t^2$$

所以，y^2 是 4 的倍数．

例 1 在 1，2，3，…，1998 中的每一个数的前面，任意添上一个“+”或“-”，那么最后运算的结果是奇数还是偶数?

解 由性质 8 知，这最后运算所得的奇偶性同

$$1+2+3+\cdots+1998=999\times1999$$

的奇偶性是相同的，即为奇数．

例 2 设 1，2，3，…，9 的任一排列为 a_1，a_2，…，a_9.求证：$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_9-9)$是一个偶数．

证法 1 因为

$$(a_1-1)+(a_2-2)+(a_3-3)+\cdots+(a_9-9)$$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_9)-(1+2+\cdots+9)$$

$$=0$$

是偶数，所以，(a_1-1)，(a_2-2)，…，(a_9-9)这 9 个数中必定有一个是偶数(否则，便得奇数个(9 个)奇数的和为偶数，与性质 4 矛盾)，从而由性质 5 知

$$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_9-9)$$

是偶数．

证法 2 由于 1，2，…，9 中只有 4 个偶数，所以 a_1，a_3，a_5，a_7，a_9 中至少有一个是奇数，于是，a_1-1，a_3-3，a_5-5，a_7-7，a_9-9 至少有一个是偶数，从而$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_9-9)$是偶数．

例 3 有 n 个数 x_1，x_2，…，x_n，它们中的每一个数或者为 1，或者为-1．如果

$$x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1=0,$$

求证：n 是 4 的倍数．

证 我们先证明 n=2k 为偶数，再证 k 也是偶数．

由于 x_1，x_2，…，x_n。的绝对值都是 1，所以，x_1x_2，x_2x_3，…，x_nx_1 的绝对值也都是 1，即它们或者为+1，或者为-1．设其中有 k 个-1，由于总和为 0，故+1 也有 k 个，从而 n=2k．

下面我们来考虑$(x_1x_2)\cdot(x_2x_3)\cdots(x_nx_1)$．一方面，有$(x_1x_2)\cdot(x_2x_3)\cdots(x_nx_1)=(-1)k$，

另一方面，有

$$(x_1x_2)\cdot(x_2x_3)\cdots(x_nx_1)=(x_1x_2\cdots x_n)_2=1.$$

所以(-1)k=1，故 k 是偶数，从而 n 是 4 的倍数．

例 4 设 a，b 是自然数，且满足关系式

$$(11111+a)(11111-b)=123456789.$$

求证：a-b 是 4 的倍数．

证 由已知条件可得 11111+a 与 11111-b 均为奇数，所以 a，b 均为偶数．又由已知条件

$$11111(a-b)=ab+2468，①$$

ab 是 4 的倍数，2468=4×617 也是 4 的倍数，所以 11111×(a-b)是 4 的倍数，故 a-b 是 4 的倍数．

例 5 某次数学竞赛，共有 40 道选择题，规定答对一题得 5 分，不答得 1 分，答错倒扣 1 分．证明：不论有多少人参赛，全体学生的得分总和一定是偶数．

证 我们证明每一个学生的得分都是偶数．

设某个学生答对了 a 道题，答错了 b 道题，那么还有 40-a-b 道题没有答．于是此人的得分是

$$5a+(40-a-b)-b=4a-2b+40,$$

这是一个偶数．

所以，不论有多少人参赛，全体学生的得分总和一定是偶数．

例 6 证明 15 块 4×1 的矩形骨牌和 1 块 2×2 的正方形骨牌不能盖住 8×8 的正方形．

证 将 8×8 正方形的小方格用黑、白色涂色(如图 1－62)．每一块 4×1 骨牌不论怎么铺设都恰好盖住两个白格，因此 15 块 4×1 的骨牌能盖住偶数个白格．一块 2×2 的骨牌只能盖住一个白格或三个白格，总之能盖住奇数个白格．于是 15 块 4×1 骨牌和一块 2×2 骨牌在图上盖住的白格是奇数个．事实上图上的白格数恰为偶数个，故不能盖住 8×8 的正方形．

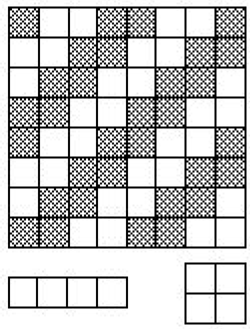


图 1-62

练习十五

1．设有 101 个自然数，记为 a_1，a_2，…，$a_1$01．已知 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+100a_{100}+101a_{101}=s$ 是偶数，求证：$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}+a_{101}$ 是偶数．

2．设 x_1，x_2，…，x_{1998} 都是+1 或者-1．求证：

$$x_1+2x_2+3x_3+\cdots+1998x_{1998}\neq 0.$$

3．设 x_1，x_2，…，$x_n(n>4)$为 1 或-1，并且

$$x_1x_2x_3x_4+x_2x_3x_4x_5+\cdots+x_nx_1x_2x_3=0.$$

求证：n 是 4 的倍数．

4．(1)任意重排某一自然数的所有数字，求证：所得数与原数之和不等于 99…9(共 n 个 9，n 是奇数)；

(2)重排某一数的所有数字，并把所得数与原数相加，求证：如果这个和等于 10_10，那么原数能被 10 整除．

5．(1)有 n 个整数，其和为零，其积为 n．求证：n 是 4 的倍数；

(2)设 n 是 4 的倍数，求证：可以找到 n 个整数，其积为 n，其和为零．

6．7 个杯子杯口朝下放在桌子上，每次翻转 4 个杯子(杯口朝下的翻为杯口朝上，杯口朝上的翻为杯口朝下)，问经过若干次这样的翻动，是否能把全部杯子翻成杯口朝上?

7．能否把 1，1，2，2，3，3，4，4，5，5 这 10 个数排成一行，使得两个 1 中间夹着 1 个数，两个 2 之间夹着 2 个数，…，两个 5 之间夹着 5 个数?

第十六讲 质数与合数

我们知道，每一个自然数都有正因数(因数又称约数)．例如，1 有一个正因数；2，3，5 都有两个正因数，即 1 和其本身；4 有三个正因数：1，2，4；12 有六个正因数：1，2，3，4，6，12．由

此可见，自然数的正因数，有的多，有的少．除了 1 以外，每个自然数都至少有两个正因数．我们把只有 1 和其本身两个正因数的自然数称为质数(又称素数)，把正因数多于两个的自然数称为合数．这样，就把全体自然数分成三类：1，质数和合数．

2 是最小的质数，也是唯一的一个既是偶数又是质数的数．也就是说，除了 2 以外，质数都是奇数，小于 100 的质数有如下 25 个：2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，53，59，61，67，71，73，79，83，89，97．

质数具有许多重要的性质：

性质 1 一个大于 1 的正整数 n，它的大于 1 的最小因数一定是质数．

性质 2 如果 n 是合数，那么 n 的最小质因数 a 一定满足 $a^2 \leqslant n$．

性质 3 质数有无穷多个(这个性质将在例 6 中证明)．

性质 4(算术基本定理)每一个大于 1 的自然数 n，必能写成以下形式：

$$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r}.$$

这里的 P_1，P_2，…，P_r 是质数，a_1，a_2，…，a_r 是自然数．如果不考虑 p_1，P_2，…，P_r 的次序，那么这种形式是唯一的．

关于质数和合数的问题很多，著名的哥德巴赫猜想就是其中之一．哥德巴赫猜想是：每一个大于 2 的偶数都能写成两个质数的和．这是至今还没有解决的难题，我国数学家陈景润在这个问题上做了到目前为止最好的结果，他证明了任何大于 2 的偶数都是两个质数的和或一个质数与一个合数的和，而这个合数是两个质数的积(这就是通常所说的 1+2)．下面我们举些例子．

例 1 设 p，q，r 都是质数，并且

$$p+q=r，p<q.$$

求 p．

解 由于 r=p+q，所以 r 不是最小的质数，从而 r 是奇数，所以 p，q 为一奇一偶．因为 p<q，故 p 既是质数又是偶数，于是 p=2．

例 2 设 p(≥5)是质数，并且 2p+1 也是质数．求证：4p+1 是合数．

证 由于 p 是大于 3 的质数，故 p 不会是 3k 的形式，从而 p 必定是 3k+1 或 3k+2 的形式，k 是正整数．

若 p=3k+1，则

$$2p+1=2(3k+1)+1=3(2k+1)$$

是合数，与题设矛盾．所以 $p=3k+2$，这时

$$4p+1=4(3k+2)+1=3(4k+3)$$

是合数．

例 3 设 n 是大于 1 的正整数，求证：n^4+4 是合数．

证 我们只需把 n^4+4 写成两个大于 1 的整数的乘积即可．

$$n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=(n^2+2)^2-4n^2$$

$$=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2),$$

因为

$$n^2+2n+2>n^2-2n+2=(n-1)^2+1>1,$$

所以 n^4+4 是合数．

例 4 是否存在连续 88 个自然数都是合数?

解 我们用 n！表示 $1\times2\times3\times\cdots\times n$.令

$$a=1\times2\times3\times\cdots\times89=89!,$$

那么，如下连续 88 个自然数都是合数：

$$a+2，a+3，a+4，\cdots，a+89.$$

这是因为对某个 $2\leqslant k\leqslant89$，有

$$a+k=k\times(2\times\cdots\times(k-1)\times(k+1)\times\cdots\times89+1)$$

是两个大于 1 的自然数的乘积．

说明 由本例可知，对于任意自然数 n，存在连续的 n 个合数，这也说明相邻的两个素数的差可以任意的大．

用(a，b)表示自然数 a，b 的最大公约数，如果(a，b)=1，那么 a，b 称为互质(互素)．

例 5 证明：当 $n>2$ 时，n 与 n！之间一定有一个质数．

证 首先，相邻的两个自然数是互质的．这是因为

$$(a，a-1)=(a，1)=1,$$

于是有(n！，n！-1)=1．

由于不超过 n 的自然数都是 n！的约数，所以不超过 n 的自然数都与 n！-1 互质(否则，n！与 n！-1 不互质)，于是 n！-1 的质约数 p 一定大于 n，即 n＜p≤n！-1＜n！．

所以，在 n 与 n！之间一定有一个素数．

例 6 证明素数有无穷多个．

证 下面是欧几里得的证法．

假设只有有限多个质数，设为 p1，p2，…，pn.考虑 p1p2…pn+1，由假设，p1p2…pn+1 是合数，它一定有一个质约数 p．显然，p 不同于 p1，p2，…，pn，这与假设的 p1，p2，…，pn 为全部质数矛盾．

例 7 证明：每一个大于 11 的自然数都是两个合数的和．

证 设 n 是大于 11 的自然数．

(1)若 n=3k(k≥4)，则

$$n＝3k=6+3(k-2);$$

(2)若 n=3k+1(k≥4)，则

$$n=3k+1=4+3(k-1);$$

(3)若 n=3k+2(k≥4)，则

$$n=8+3(k-2).$$

因此，不论在哪种情况下，n 都可以表为两个合数的和．

例 8 求不能用三个不同合数的和表示的最大奇数．

解 三个最小的合数是 4，6，8，它们的和是 18，于是 17 是不能用三个不同的合数的和表示的奇数．

下面证明大于等于 19 的奇数 n 都能用三个不同的合数的和来表示．

由于当 k≥3 时，4，9，2k 是三个不同的合数，并且 4+9+2k≥19，所以只要适当选择 k，就可以使大于等于 19 的奇数 n 都能用 4，9，2k(k=n-13/2)的和来表示．

综上所述，不能表示为三个不同的合数的和的最大奇数是 17．

练习十六

1．求出所有的质数 p，使 $p+10$，$p+14$ 都是质数．

2．若 p 是质数，并且 $8p^2+1$ 也是质数，求证：$8p^2-p+2$ 也是质数．

3．当 m＞1 时，证明：n^4+4m^4 是合数．

4．不能写成两个合数之和的最大的自然数是几?

5．设 p 和 q 都是大于 3 的质数，求证：$24 \mid p^2-q^2$．

6．设 x 和 y 是正整数，$x \neq y$，p 是奇质数，并且

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{p}.$$

求 $x+y$ 的值．

第十七讲 二元一次不定方程的解法

我们知道，如果未知数的个数多于方程的个数，那么，一般来说，它的解往往是不确定的，例如方程

$$x-2y=3,$$

方程组

$$\begin{cases} x+y+z=100, \\ x+3y+2z=180 \end{cases}$$

等，它们的解是不确定的．像这类方程或方程组就称为不定方程或不定方程组．

不定方程(组)是数论中的一个古老分支，其内容极其丰富．我国对不定方程的研究已延续了数千年，“百鸡问题”等一直流传至今，“物不知其数”的解法被称为中国剩余定理．近年来，不定方程的研究又有新的进展．学习不定方程，不仅可以拓宽数学知识面，而且可以培养思维能力，提高数学解题的技能．

我们先看一个例子．

例 小张带了 5 角钱去买橡皮和铅笔，橡皮每块 3 分，铅笔每支 1 角 1 分，问 5 角钱刚好买几块橡皮和几支铅笔?

解 设小张买了 x 块橡皮，y 支铅笔，于是根据题意得方程

$$3x+11y=50.$$

这是一个二元一次不定方程．从方程来看，任给一个 x 值，就可以得到一个 y 值，所以它的解有无数多组．

但是这个问题要求的是买橡皮的块数和铅笔的支数，而橡皮的块数与铅笔的支数只能是正整数或零，所以从这个问题的要求来说，我们只要求这个方程的非负整数解．

因为铅笔每支 1 角 1 分，所以 5 角钱最多只能买到 4 支铅笔，因此，小张买铅笔的支数只能是 0，1，2，3，4 支，即 y 的取值只能是 0，1，2，3，4 这五个．

若$y=0$，则$x=\frac{50}{3}$，不是整数，不合题意；

若$y=1$，则$x=13$，符合题意；

若$y=2$，则$x=\frac{28}{3}$，不是整数，不合题意；

若 y=3，则 x=17/3，不是整数，不合题意；

若 y=4，则 x=2，符合题意．

所以，这个方程有两组正整数解，即

$$\begin{cases}x=2,\\y=4;\end{cases}\quad\begin{cases}x=13,\\y=1.\end{cases}$$

也就是说，5 角钱刚好能买 2 块橡皮与 4 支铅笔，或者 13 块橡皮与 1 支铅笔．

像这个例子，我们把二元一次不定方程的解限制在非负整数时，那么它的解就确定了．但是否只要把解限制在非负整数时，二元一次不定方程的解就一定能确定了呢？不能！现举例说明．

例 求不定方程 x-y=2 的正整数解．

解 我们知道：3-1=2，4-2=2，5-3=2，…，所以这个方程的正整数解有无数组，它们是

$$\begin{cases}x=n+2,\\y=n.\end{cases}$$

其中 n 可以取一切自然数．

因此，所要解的不定方程有无数组正整数解，它的解是不确定的．

上面关于橡皮与铅笔的例子，我们是用逐个检验的方法来求它们的非负整数解的，但是这种方法在给出的数比较大的问题或者方程有无数组解的时候就会遇到麻烦．那么能不能找到一个有效而又方便的方法来求解呢？我们现在就来研究这个问题，先给出一个定理．

定理 如果a，b是互质的正整数，c是整数，且方程

$$ax+by=c \quad ①$$

有一组整数解x_0，y_0则此方程的一切整数解可以表示为

$$\begin{cases} x=x_0-bt \\ y=y_0+at, \end{cases}$$

其中t=0，±1，±2，±3，….

证 因为x_0，y_0是方程①的整数解，当然满足

$$ax_0+by_0=c, \quad ②$$

因此

$$a(x_0-bt)+b(y_0+at)=ax_0+by_0=c.$$

这表明$x=x_0-bt$，$y=y_0+at$也是方程①的解.

设x'，y'是方程①的任一整数解，则有

$$ax'+bx'=c. \quad ③$$

③-②得

$$a(x'-x_0)=b'(y'-y_0). \quad ④$$

由于(a，b)=1，所以$a\mid y'-y_0$，即$y'=y_0+at$，其中t是整数．将$y'=y_0+at$代入④，即得$x'=x_0-bt$．因此x'，y'可以表示成$x=x_0-bt$，$y=y_0+at$的形式，所以$x=x_0-bt$，$y=y_0+at$表示方程①的一切整数解，命题得证.

有了上述定理，求解二元一次不定方程的关键是求它的一组特殊解.

例1 求11x+15y=7的整数解.

解法1 将方程变形得

$$x=\frac{7-15y}{11}.$$

因为x是整数，所以7-15y应是11的倍数．由观察得$x_0=2$，$y_0=-1$是这个方程的一组整数解，所以方程的解为

$$\begin{cases} x = 2 - 15t, \\ y = -1 + 11t, \end{cases} \quad t\text{为整数}.$$

解法 2 先考察 11x+15y=1，通过观察易得

$$11\times(-4)+15\times(3)=1,$$

所以

$$11\times(-4\times7)+15\times(3\times7)=7,$$

可取 $x_0=-28$，$y_0=21$．从而

$$\begin{cases} x = -28 - 15t, \\ y = 21 + 11t, \end{cases} \quad t\text{为整数}.$$

可见，二元一次不定方程在无约束条件的情况下，通常有无数组整数解，由于求出的特解不同，同一个不定方程的解的形式可以不同，但它们所包含的全部解是一样的．将解中的参数 t 做适当代换，就可化为同一形式．

例 2 求方程 6x+22y=90 的非负整数解．

解 因为(6，22)=2，所以方程两边同除以 2 得

$$3x+11y=45. \quad ①$$

由观察知，x1=4，y1=-1 是方程

$$3x+11y=1 \quad ②$$

的一组整数解，从而方程①的一组整数解为

$$\begin{cases} x_0 = 45\times4 = 180, \\ y_0 = 45\times(-1) = -45. \end{cases}$$

由定理，可得方程①的一切整数解为

$$\begin{cases} x = 180 - 11t, \\ y = -45 + 3t. \end{cases}$$

因为要求的是原方程的非负整数解，所以必有

$$\begin{cases}180-11t\geqslant 0, & ③\\ -45+3t\geqslant 0. & ④\end{cases}$$

由于 t 是整数，由③，④得 15≤t≤16，所以只有 t=15，t=16 两种可能．

当 t=15 时，x=15，y=0；当 t=16 时，x=4，y=3．所以原方程的非负整数解是

$$\begin{cases}x=15,\\ y=0,\end{cases}\quad \begin{cases}x=4,\\ y=3.\end{cases}$$

例 3 求方程 7x+19y=213 的所有正整数解．

分析 这个方程的系数较大，用观察法去求其特殊解比较困难，碰到这种情况我们可用逐步缩小系数的方法使系数变小，最后再用观察法求得其解．

解 用方程

$$7x+19y=213 \quad ①$$

的最小系数 7 除方程①的各项，并移项得

$$x=\frac{213-19y}{7}=30-2y+\frac{3-5y}{7}. \quad ②$$

因为 x，y 是整数，故 3-5y/7=u 也是整数，于是 5y+7u=3．Ｔ儆*5 除此式的两边得

$$y=\frac{3-7u}{5}=-u+\frac{3-2u}{5}. \quad ③$$

令 $\frac{3-2u}{5}=v$（整数），由此得

$$2u+5v=3. \quad ④$$

由观察知 u=-1，v=1 是方程④的一组解．将 u=-1，v=1 代入③得 y=2．y=2 代入②得 x=25．于是方程①有一组解 $x_0=25$，$y_0=2$，所以它的一切解为

$$\begin{cases}x=25-19t,\\ y=2+7t.\end{cases}$$

由于要求方程的正整数解，所以

$$\begin{cases}25-19t>0,\\2+7t>0.\end{cases}$$

解不等式，得 t 只能取 0，1．因此得原方程的正整数解为

$$\begin{cases}x=25,\\y=2,\end{cases}\quad\begin{cases}x=6,\\y=9.\end{cases}$$

当方程的系数较大时，我们还可以用辗转相除法求其特解，其解法结合例题说明．

例 4 求方程 37x+107y=25 的整数解．

解 107=2×37+33，

$$37=1\times33+4,$$

$$33=8\times4+1.$$

为用 37 和 107 表示 1，我们把上述辗转相除过程回代，得

$$1=33-8\times4=37-4-8\times4=37-9\times4$$

$$=37-9\times(37-33)=9\times33-8\times37$$

$$=9\times(107-2\times37)8\times37=9\times107-26\times37$$

$$=37\times(-26)+107\times9.$$

由此可知 x1=-26，y1=9 是方程 37x+107y=1 的一组整数解．于是

$$x_0=25\times(-26)=-650,\quad y_0=25\times9=225$$

是方程 37x+107y=25 的一组整数解．

所以原方程的一切整数解为

$$\begin{cases}x=-650-107t,\\y=225+37t,\end{cases}\quad t\text{是整数}.$$

例 5 某国硬币有 5 分和 7 分两种，问用这两种硬币支付 142 分货款，有多少种不同的方法？

解 设需 x 枚 7 分，y 枚 5 分恰好支付 142 分，于是

$$7x+5y=142. ①$$

所以

$$y=\frac{142-7x}{5}=28-x+\frac{2-2x}{5}=28-x-\frac{2x-2}{5}.$$

由于 $7x\leqslant142$，所以 $x\leqslant20$，并且由上式知 $5\mid2(x-1)$．因为 $(5，2)=1$，所以 $5\mid x-1$，从而 $x=1$，6，11，16，①的非负整数解为

$$\begin{cases}x=1,\\y=27;\end{cases}\quad\begin{cases}x=6,\\y=20;\end{cases}\quad\begin{cases}x=11,\\y=13;\end{cases}\quad\begin{cases}x=16,\\y=6.\end{cases}$$

所以，共有4种不同的支付方式．

说明 当方程的系数较小时，而且是求非负整数解或者是实际问题时，这时候的解的组数往往较少，可以用整除的性质加上枚举，也能较容易地解出方程．

多元一次不定方程可以化为二元一次不定方程．

例6 求方程 $9x+24y-5z=1000$ 的整数解．

解 设 $9x+24y=3t$，即 $3x+8y=t$，于是 $3t-5z=1000$．于是原方程可化为

$$\begin{cases}3x+8y=t, & ①\\3t-5z=1000. & ②\end{cases}$$

用前面的方法可以求得①的解为

$$\begin{cases}x=3t-8u\\y=-t+3u,\end{cases}\quad u\text{是整数}.$$

②的解为

$$\begin{cases}t=2000+5v,\\z=1000+3v,\end{cases}\quad v\text{是整数}.$$

消去 t，得

$$\begin{cases}x=6000-8u+15v,\\ y=-2000+3u-5v, \quad u，v是整数.\\ z=1000+3v,\end{cases}$$

大约 1500 年以前，我国古代数学家张丘建在他编写的《张丘建算经》里，曾经提出并解决了“百钱买百鸡”这个有名的数学问题，通俗地讲就是下例．

例 7 今有公鸡每只五个钱，母鸡每只三个钱，小鸡每个钱三只．用 100 个钱买 100 只鸡，问公鸡、母鸡、小鸡各买了多少只?

解 设公鸡、母鸡、小鸡各买 x，y，z 只，由题意列方程组

$$\begin{cases}5x+3y+1/3z=100, & ①\\ x+y+z=100. & ②\end{cases}$$

①化简得 15x+9y+z=300． ③

③-②得 14x+8y=200，

即 7x+4y=100．

解 7x+4y=1 得

$$\begin{cases}x=-1,\\ y=2.\end{cases}$$

于是 7x+4y=100 的一个特解为

$$\begin{cases}x_0=-100,\\ y_0=200.\end{cases}$$

由定理知 7x+4y=100 的所有整数解为

$$\begin{cases}x=-100+4t,\\ y=200-7t,\end{cases} \quad t是整数.$$

由题意知，0＜x，y，z＜100，所以

$$\begin{cases}0<-100+4t<100,\\ 0<200-7t<100.\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}25<t<50, \\ 14\frac{2}{7}<t<28\frac{4}{7}.\end{cases}$$

故
$$25<t<28\frac{4}{7}.$$

由于 t 是整数，故 t 只能取 26，27，28，而且 x，y，z 还应满足

$$x+y+z=100.$$

t	x	y	z
26	4	18	78
27	8	11	81
28	12	4	84

即可能有三种情况：4 只公鸡，18 只母鸡，78 只小鸡；或 8 只公鸡，11 只母鸡，81 只小鸡；或 12 只公鸡，4 只母鸡，84 只小鸡.

练习十七

1．求下列不定方程的整数解：

(1) $72x+157y=1$；(2)$9x+21y=144$；

(3)$103x-91y=5$.

2．求下列不定方程的正整数解：

(1)$3x-5y=19$；　(2)$12x+5y=125$.

3．求下列不定方程的整数解：

(1)$5x+8y+19z=50$；　(2)$39x-24y+9z=78$.

4．求不定方程 $2x+5y+7z+3t=10$ 的整数解.

5．求不定方程组

$$\begin{cases}5x+7y+2z=24, \\ 3x-y-4z=4\end{cases}$$

的正整数解.

第十八讲 加法原理与乘法原理

加法原理和乘法原理是计数研究中最常用、也是最基本的两个原理．所谓计数，就是数数，把一些对象的具体数目数出来．当然，情况简单时可以一个一个地数．如果数目较大时，一个一个地数是不可行的，利用加法原理和乘法原理，可以帮助我们计数.

加法原理 完成一件工作有 n 种方式，用第 1 种方式完成有 m_1 种方法，用第 2 种方式完成有 m_2 种方法，…，用第 n 种方式完成有 m_n 种方法，那么，完成这件工作总共有

$$m_1+m_2+\cdots+m_n$$

种方法.

例如，从 A 城到 B 城有三种交通工具：火车、汽车、飞机．坐火车每天有 2 个班次；坐汽车每天有 3 个班次；乘飞机每天只有 1 个班次，那么，从 A 城到 B 城的方法共有 2+3+1=6 种.

乘法原理 完成一件工作共需 n 个步骤：完成第 1 个步骤有 m_1 种方法，完成第 2 个步骤有 m_2 种方法，…，完成第 n 个步骤有 m_n 种方法，那么，完成这一件工作共有

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$$

种方法.

例如，从 A 城到 B 城中间必须经过 C 城，从 A 城到 C 城共有 3 条路线(设为 a，b，c)，从 C 城到 B 城共有 2 条路线(设为 m，t)，那么，从 A 城到 B 城共有 3×2=6 条路线，它们是:

am，at，bm，bt，cm，ct.

下面我们通过一些例子来说明这两个原理在计数中的应用.

例 1 利用数字 1，2，3，4，5 共可组成

(1)多少个数字不重复的三位数?

(2)多少个数字不重复的三位偶数?

(3)多少个数字不重复的偶数?

解(1)百位数有 5 种选择；十位数有 4 种选择；个位数有 3 种选择．所以共有

$$5\times40\times3=60$$

个数字不重复的三位数.

(2)先选个位数，共有两种选择：2 或 4．在个位数选定后，十位数还有 4 种选择；百位数有 3 种选择．所以共有

$$2\times4\times3=24$$

个数字不重复的三位偶数．

(3)分为 5 种情况：

一位偶数，只有两个：2 和 4．

二位偶数，共有 8 个：12，32，42，52，14，24，34，54．

三位偶数由上述(2)中求得为 24 个．

四位偶数共有 $2\times(4\times3\times2)=48$ 个．括号外面的 2 表示个位数有 2 种选择(2 或 4)．

五位偶数共有 $2\times(4\times3\times2\times1)=48$ 个．

由加法原理，偶数的个数共有

$$2+8+24+48+48=130.$$

例 2 从 1 到 300 的自然数中，完全不含有数字 3 的有多少个?

解法 1 将符合要求的自然数分为以下三类：

(1)一位数，有 1，2，4，5，6，7，8，9 共 8 个．

(2)二位数，在十位上出现的数字有 1，2，4，5，6，7，8，98 种情形，在个位上出现的数字除以上八个数字外还有 0，共 9 种情形，故二位数有 $8\times9=72$ 个．

(3)三位数，在百位上出现的数字有 1，2 两种情形，在十位、个位上出现的数字则有 0，1，2，4，5，6，7，8，9 九种情形，故三位数有

$2\times9\times9=162$ 个．

因此，从 1 到 300 的自然数中完全不含数字 3 的共有

$8+72+162=242$ 个．

解法 2 将 0 到 299 的整数都看成三位数，其中数字 3

不出现的，百位数字可以是 0，1 或 2 三种情况．十位数字与个位数字均有九种，因此除去 0 共有

$$3\times 9\times 9-1=242(个).$$

例 3 在小于 10000 的自然数中，含有数字 1 的数有多少个?

解 不妨将 1 至 9999 的自然数均看作四位数，凡位数不到四位的自然数在前面补 0．使之成为四位数．

先求不含数字 1 的这样的四位数共有几个，即有 0，2，3，4，5，6，7，8，9 这九个数字所组成的四位数的个数．由于每一位都可有 9 种写法，所以，根据乘法原理，由这九个数字组成的四位数个数为

$$9\times 9\times 9\times 9=6561,$$

其中包括了一个 0000,它不是自然数,所以比 10000 小的不含数字 1 的自然数的个数是 6560，于是，小于 10000 且含有数字 1 的自然数共有 9999-6560=3439 个．

例 4 求正整数 1400 的正因数的个数．

解 因为任何一个正整数的任何一个正因数(除 1 外)都是这个数的一些质因数的积，因此，我们先把 1400 分解成质因数的连乘积

$$1400=2^3 5^2 7$$

所以这个数的任何一个正因数都是由 2,5,7 中的 n 个相乘而得到(有的可重复)．于是取 1400 的一个正因数，这件事情是分如下三个步骤完成的：

(1)取 2^3 的正因数是 2^0，2^1，2^2，3^3，共 3+1 种；

(2)取 5^2 的正因数是 5^0，5^1，5^2，共 2+1 种；

(3)取 7 的正因数是 7^0，7^1，共 1+1 种．

所以 1400 的正因数个数为

$$(3+1)\times(2+1)\times(1+1)=24.$$

说明 利用本题的方法，可得如下结果：

若 p_i 是质数，a_i 是正整数(i=1，2，⋯，r)，则数

$$M=p_1^{a1}p_2^{a2}\cdots p_r^{ar}$$

的不同的正因数的个数是

$$(a_1+1)(a_2+1)\cdots(ar+1).$$

例 5 求五位数中至少出现一个 6，而被 3 整除的数的个数．

解 因为五位数$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$被3整除的充要条件是$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$能被 3 整除，于是分别讨论如下：

(1)从左向右计，如果最后一个 6 出现在第 5 位，即 $a_5=6$，那么 a_2，a_3，a_4 可以是 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 这十个数字之一，但 a_1 不能是任意的，它是由 $a_2+a_3+a_4+a_5$ 被 3 除后的余数所决定．因此，为了保证 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$ 能被 3 整除，a_1 只有 3 种可能，根据乘法原理，5 位数中最后一位是 6，而被 3 整除的数有

$$3\times10\times10\times10=3000(个).$$

(2)最后一个 6 出现在第四位，即 $a_4=6$，于是 a5 只有 9 种可能(因为 a5 不能等于 6)，a2，a3 各有 10 种可能，为了保证 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$ 被 3 整除，a_1 有 3 种可能．根据乘法原理，属于这一类的 5 位数有

$$3\times10\times10\times9=2700(个).$$

(3)最后一个 6 出现在第 3 位，即 $a_3=6$，被 3 整除的数应有

$$3\times10\times9\times9=2430(个).$$

(4)最后一个 6 出现在第 2 位，即 $a_2=6$，被 3 整除的数应有

$$3\times9\times9\times9=2187(个).$$

(5)$a_1=6$，被 3 整除的数应有

$$3\times9\times9\times9=2187(个).$$

根据加法原理，5 位数中至少出现一个 6 而被 3 整除的数应有

$$3000+2700+2430+2187+2187=12504(个).$$

例 6 如图 1－63，A，B，C，D，E 五个区域分别用红、蓝、黄、白、绿五种颜色中的某一种着色．如果使相邻的区域着不同的颜色，问有多少种不同的着色方式？

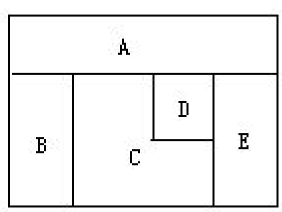


图 1-63

解 对这五个区域，我们分五步依次给予着色：

(1)区域 A 共有 5 种着色方式；

(2)区域 B 因不能与区域 A 同色，故共有 4 种着色方式；

(3)区域 C 因不能与区域 A，B 同色，故共有 3 种着色方式；

(4)区域 D 因不能与区域 A，C 同色，故共有 3 种着色方式；

(5)区域 E 因不能与区域 A，C，D 同色，故共有 2 种着色方式.

于是，根据乘法原理共有

$$5\times4\times3\times3\times2=360$$

种不同的着色方式.

例 7 在 6×6 的棋盘上剪下一个由四个小方格组成的凸字形，如图 1－64，有多少种不同的剪法?

解 我们把凸字形上面那个小方格称为它的头，每个凸字形有并且只有一个头.

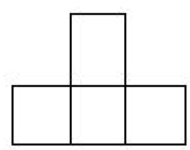


图 1－64

凸字形可以分为两类：第一类凸字形的头在棋盘的边框，但是棋盘的四个角是不能充当凸字形的头的．于是，边框上(不是角)的小方格共有 4×4=16 个，每一个都是一个凸字形的头，所以，这类凸字形有 16 个.

第二类凸字形的头在棋盘的内部，棋盘内部的每一个小方格可以作为 4 个凸字形的头(即头朝上，头朝下，头朝左，头朝右)，所以，这类凸字形有

$$4\times(4\times4)=64(个).$$

由加法原理知，有 16+64=80 种不同的凸字形剪法.

练习十八

1．把数、理、化、语、英 5 本参考书，排成一行放在书架上.

(1)化学不放在第 1 位，共有多少种不同排法?

(2)语文与数学必须相邻，共有多少种不同排法?

(3)物理与化学不得相邻，共有多少种不同排法?

(4)文科书与理科书交叉排放，共有多少种不同排法?

2．在一个圆周上有 10 个点，把它们两两相连，问共有多少条不同的线段?

3．用 1，2，3，4，5，6，7 这七个数，

(1)可以组成多少个数字不重复的五位奇数?

(2)可以组成多少个数字不重复的五位奇数，但 1 不在百位上?

4．从 1，2，3，4，5 这五个数字中任取三个数组成一个三位数，问共可得到多少个不同的三位数?

5．由 1，2，3，4，5，6 这六个数字能组成多少个大于 34500 的五位数?

6．今有一角币一张，两角币一张，伍角币一张，一元币四张，伍元币两张，用这些纸币任意付款，可以付出不同数额的款子共有多少种?

7．将三封信投到 5 个邮筒中的某几个中去，有多少种不同的投法?

8．从字母 a，a，a，b，c，d，e 中任选 3 个排成一行，共有多少种不同的排法?

第十九讲* 几何图形的计数问题

在几何中，有许多有趣的计数问题，如计算线段的条数，满足某种条件的三角形的个数，若干个图分平面所成的区域数等等．这类问题看起来似乎没有什么规律可循，但是通过认真分析，还是可以找到一些处理方法的．常用的方法有枚举法、加法原理和乘法原理法以及递推法等．

例 1 如图 1－65 所示，数一数图中有多少条不同的线段?

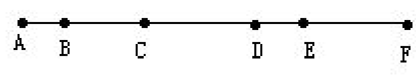


图 1-65

解 对于两条线段，只要有一个端点不同，就是不同的线段，我们以左端点为标准，将线段分 5 类分别计数:

(1)以 A 为左端点的线段有 AB，AC，AD，AE，AF 共 5 条;

(2)以 B 为左端点的线段有 BC，BD，BE，BF 共 4 条；

(3)以 C 为左端点的线段有 CD，CE，CF 共 3 条；

(4)以 D 为左端点的线段有 DE，DF 共 2 条；

(5)以 E 为左端点的线段只有 EF 一条．

所以，不同的线段一共有

$$5+4+3+2+1=15(条).$$

一般地，如果一条线段上有 n+1 个点(包括两个端点)，那么这 n+1 个点把这条线段一共分成的线段总数为

$$n+(n-1)+\cdots+2+1=n(n+1)/2$$

例 2 图 1－66 中有多少个三角形?

解 以 OA 为一边的三角形有△OAB，△OAC，△OAD， △OAE，△OAF 共 5 个；以 OB 为一边的三角形还有 4 个(前面已计数过的不再数，下同)，它们是△OBC，△OBD，△OBE， △OBF；以 OC 为一边的三角形有△OCD，△OCE，△OCF 共 3 个；以 OD 为一边的三角形有△ODE，△ODF 共 2 个；以 OE 为一边的三角形有△OEF 一个．所以，共有三角形

$$5+4+3+2+1=15(个).$$

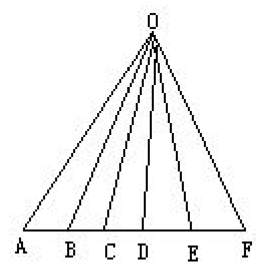


图 1- 66

说明 其实，不同的三角形数目等于线段 AF 中不同线段的条数．一般地，当原三角形的一条边上有 n+1 个点(包括两端点)时，它们与另一顶点的连线所构成的三角形总数为 $n+(n-1)+\cdots+2+1=n(n+1)/2$.

例 3(1)图 1－67 中一共有多少个长方形?

(2)所有这些长方形的面积和是多少?

解(1)图中长的一边有 5 个分点(包括端点)，所以，长的一边上不同的线段共有

$$1+2+3+4=10(条).$$

同样，宽的一边上不同的线段也有 10 条．

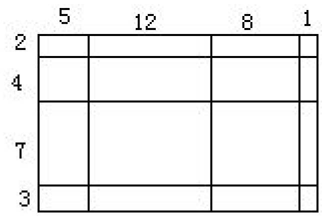


图 1-67

所以，共有长方形

$$10\times10=100(\text{个}).$$

(2)因为长的一边上的 10 条线段长分别为

5，17，25，26，12，20，21，8，9，1，

宽的一边上的 10 条线段长分别为

2，6，13，16，4，11，14，7，10，3．

所以，所有长方形面积和为

$$(5\times2+5\times6+\cdots+5\times3)$$

$$+(17\times2+17\times6+\cdots+17\times3)$$

$$+\cdots+(1\times2+1\times6+\cdots+1\times3)$$

$$=(5+17+\cdots+1)\times(2+6+\cdots+3)$$

$$=144\times86=12384.$$

例 4 图 1－68 中共有多少个三角形?

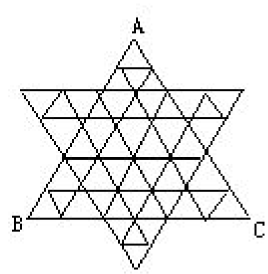


图 1-68

解 显然三角形可分为尖向上与尖向下两大类，两类中三角形的个数相等．尖向上的三角形又可分为 6 类：最大的三角形 1 个(即△ABC)，

第二大的三角形有 1+2=3(个)，

第三大的三角形有 1+2+3=6(个)，

第四大的三角形有 1+2+3+4=10(个)，

第五大的三角形有 1+2+3+4+5=15(个)，

最小的三角形有

$$1+2+3+4+5+6+3=24(\text{个}).$$

我们的计数是有规律的．当然，要注意在△ABC 外面还有三个最小的尖向上的三角形(左、右、下各一个)，所以最小的三角形不是 21 个而是 24 个．

于是尖向上的三角形共

$$1+3+6+10+15+24=59(\text{个}).$$

图中共有三角形

$$59\times2=118(\text{个}).$$

例 5 图 1－69 中有多少个等腰直角三角形?

解 图 1－69 中有

$$5\times5+4\times4=41$$

个点．在每点标一个数，它等于以这点为直角顶点的等腰直角三角形的个数．因此，共有等腰直角三角形

$$4\times8+5\times16+6\times4+10\times4+8\times4+11\times4+16\times1$$

$$=268(\text{个}).$$

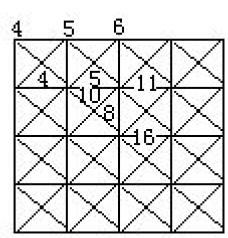


图 1-69

例 6(1)图 1－70(a)中有多少个三角形?

(2)图 1－70(b)中又有多少个三角形?

解(1)图 1－70(a)中有 6 条直线．一般来说，每 3 条直线能围成一个三角形，但是这 3 条直线如果相交于同一点，那么，它们就不能围成三角形了．

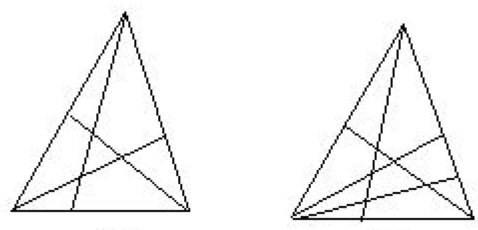

(a) (b)

图 1-70

从 6 条直线中选 3 条，有

$$\frac{6\times5\times4}{6}=20$$

种选法(见说明)，每次选出的 3 条直线围成一个三角形，但是在图 1－70(a)中，每个顶点处有 3 条直线通过，它们不能围成三角形，因此，共有

$$20-3=17$$

个三角形．

(2)图 1－70(b)中有 7 条直线，从 7 条直线中选 3 条，有

$$7\times6\times5/6=35$$

种选法．每不过同一点的 3 条直线构成一个三角形．

图 1－70(b)中，有 2 个顶点处有 3 条直线通过，它们不能构成三角形，还有一个顶点有 4 条直线通过，因为 4 条直线中选 3 条有 4 种选法，即能构成 4 个三角形，现在这 4 个三角形没有了，所以，图 1－70(b)中的三角形个数是

$$35-2-4=29(个)．$$

说明 从 6 条直线中选 2 条，第一条有 6 种选法，第二条有 5 种选法，共有 6×5 种选法．但是每一种被重复算了一次， 例如 l_1l_2 与 l_2l_1 实际上是同一种，所以，不同的选法是 6×5÷2=15 种．

从 6 条直线中选 3 条，第一条有 6 种选法，第二条有 5 种选法，第三条有 4 种选法，共有 $6\times5\times4$ 种选法．但是每一种被重复计算了 6 次，例如，$l_1l_2l_3$，$l_1l_3l_2$，$l_2l_1l_3$，$l_2l_3l_1$，$l_3l_1l_2$，$l_3l_2l_1$ 实际上是同一种，所以，不同的选法应为 $6\times5\times4/6=20$ 种．

下面我们利用递推的方法来计算一些图形区域问题．

例 7 问 8 条直线最多能把平面分成多少部分?

解 1 条直线最多将平面分成 2 个部分；2 条直线最多将平面分成 4 个部分；3 条直线最多将平面分成 7 个部分；现在添上第 4 条直线．它与前面的 3 条直线最多有 3 个交点，这 3 个交点将第 4 条直线分成 4 段，其中每一段将原来所在平面部分一分为二，如图 1－71，所以 4 条直线最多将平面分成 7+4=11 个部分．

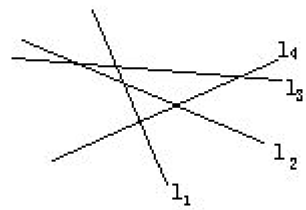


图 1-71

完全类似地，5 条直线最多将平面分成 11+5=16 个部分；6 条直线最多将平面分成 16+6=22 个部分；7 条直线最多将平面分成 22+7=29 个部分；8 条直线最多将平面分成 29+8=37 个部分．

所以，8 条直线最多将平面分成 37 个部分．

说明 一般地，n 条直线最多将平面分成

$$2+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

个部分．

例 8 平面上 5 个圆最多能把平面分成多少个部分?

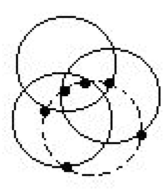


图 1-72

解 1 个圆最多能把平面分成 2 个部分；2 个圆最多能把平面分成 4 个部分；3 个圆最多能把平面分成 8 个部分；现在加入第 4 个圆，为了使分成的部分最多，第 4 个圆必须与前面 3 个圆都有两个交点．如图 1－72 所示．因此得 6 个交点，这 6 个交点将第 4 个圆的圆周分成 6 段圆弧，

而每一段圆弧将原来的部分一分为二，即增加了一个部分，于是，4 个圆最多将平面分成 8+6=14 个部分.

同样道理，5 个圆最多将平面分成 14+8=22 个部分.

所以，5 个圆最多将平面分成 22 个部分.

说明 用上面类似的方法，我们可以计算出 n 个圆最多分平面的部分数为

$$2+1\times2+2\times2+\cdots+(n-1)\times2$$

$$=2+2[1+2+\cdots+(n-1)]$$

$$=n^2-n+2.$$

例 9 平面上 5 个圆和一条直线，最多能把平面分成多少个部分?

解 首先，由上题可知，平面上 5 个圆最多能把平面分成 22 个部分. 现在加入一条直线. 由于一条直线最多与一个圆有两个交点，所以，一条直线与 5 个圆最多有 10 个交点. 10 个点把这条直线分成了 11 段，其中 9 段在圆内，2 条射线在圆外. 9 条在圆内的线段把原来的部分一分为二，这样就增加了 9 个部分；两条射线把圆外的平面一分为二，圆外只增加了一个部分. 所以，总共增加了 10 个部分.

因此，5 个圆和 1 条直线，最多将平面分成 22+10=32 个部分.

例 10 平面上 5 条直线和一个圆，最多能把平面分成多少个部分?

解 首先，由例 7 知，5 条直线最多将平面分成 16 个部分.

现在加入一个圆，它最多与每条直线有两个交点，所以，与 5 条直线最多有 10 个交点. 这 10 个交点将圆周分成 10 段圆弧，每一段圆弧将原来的部分一分为二，所以，10 段圆弧又把原来的部分增加了 10 个部分.

因此，5 条直线和一个圆，最多能把平面分成 16+10=26 个部分.

例 11 三角形 ABC 内部有 1999 个点，以顶点 A，B，C 和这 1999 个点为顶点能把原三角形分割成多少个小三角形?

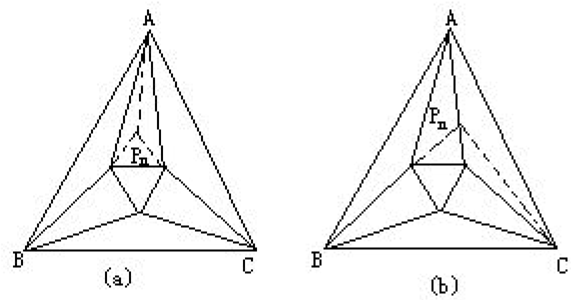


图 1-73

解 设△ABC 内部的 n-1 个点能把原三角形分割成 a_{n-1} 个小三角形，我们考虑新增加一个点 P_n 之后的情况：

(1)若点 P_n 在某个小三角形的内部，如图 1－73(a)，则原小三角形的三个顶点连同 P_n 将这个小三角形一分为三，即增加了两个小三角形；

(2)若点 P_n 在某两个小三角形公共边上，如图 1－73(b)．则这两个小三角形的顶点连同点 P_n 将这两个小三角形分别一分为二，即也增加了两个小三角形．

所以，△ABC 内部的 n 个点把原三角形分割成的小三角形个数为

$$a_n=a_{n-1}+2.$$

易知 $a_0=1$，于是

$$a_1=a_0+2，a_2=a_1+2，\cdots，a_n=a_{n-1}+2.$$

将上面这些式子相加，得

$$a_n=2n+1.$$

所以，当 n=1999 时，三个顶点 A，B，C 和这 1999 个内点能把原三角形分割成 2×1999+1=3999 个小三角形．

练习十九

1．填空：

(1)在圆周上有 7 个点 A，B，C，D，E，F 和 G，连接每两个点的线段共可作出______条．

(2)已知 5 条线段的长分别是 3，5，7，9，11，若每次以其中 3 条线段为边组成三角形，则最多可构成互不全等的三角形_____个．

(3)三角形的三边长都是正整数，其中有一边长为 4，但它不是最短边，这样不同的三角形共有_____个．

(4)以正七边形的 7 个顶点中的任意 3 个为顶点的三角形中，锐角三角形的个数是________.

(5)平面上 10 条直线最多能把平面分成______个部分.

(6)平面上 10 个圆最多能把平面分成______个区域.

2．有一批长度分别为 1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11 厘米的细木条，它们的数量足够多，从中适当选取 3 根木条作为三条边，可围成一个三角形，如果规定底边是 11 厘米长，你能围成多少个不同的三角形?

3．图 1－74 中有多少个三角形?

4．图 1－75 中有多少个梯形?

5．在等边△ABC 所在平面上找到这样一点 P，使△PAB，△PBC，△PAC 都是等腰三角形，具有这样性质的点的个数有多少?

6．平面上有 10 条直线，其中 4 条直线交于一点，另有 4 条直线互相平行，这 10 条直线最多有几个交点？它们最多能把平面分成多少个部分?

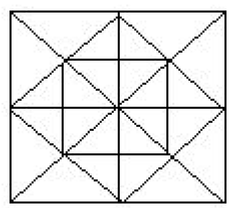


图 1-74

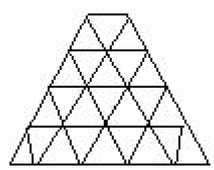


图 1-75

应用篇

第二十讲 应用问题的算术解法与代数解法

从小学到中学，数学课程最显著的变化，就是从算术学习到代数和几何的学习．仅就代数来说，它的基本课题是着眼于利用运算来讨论各种数学问题．从发展的角度看，代数学是在“数”与“运算”的基础上有系统地发展起来的．首先扩大了数的范围，从正整数、正分数和零发展到有理数、实数；其次，在用字母表示数的基础上，应用“运算律”解代数方程和研究代数式．由于在常见的数量关系中，可以说应用问题是最基本的讨论对象，因此，在小学和中学的数学课中，

都有解应用问题这一内容．只不过在小学是用“算术解法”，而在中学是用“代数解法”．下面举几个典型实例，来比较一下这两种解法的不同，从而进一步体会代数解法的优越性．

例 1 某农场计划播种小麦与大豆共 138 公顷，种小麦的面积是种大豆面积的 4 倍．试问该农场应种小麦与大豆各多少公顷?

算术解法 由本题所给的条件可知，播种总面积等于种大豆面积的(4+1)倍，因此种大豆的公顷数=总播种公顷数÷(4+1)，

种小麦的公顷数=总播种公顷数-种大豆的公顷数，即

$$138\div(4+1)=27.6(\text{公顷}),$$

$$138-27.6=110.4(\text{公顷}).$$

即应种大豆 27.6 公顷，小麦 110.4 公顷．

代数解法 用一个字母 x 表示要求的一个未知量，例如，设种大豆 x 公顷；再由题目的条件可知，种小麦 4x 公顷．因此，只要根据关系式

总播种公顷数=种小麦公顷数+种大豆公顷数

和已知条件“总公顷数为 138”，就可以直截了当地写出以下等式(含有未知数的等式，也叫方程)

$$4x+x=138.$$

由于 x 是一个未知数，但它终归是一个数，所以可以对它应用运算律．为此，我们对上式做如下变形

$$(4+1)x=138,$$

即 $5x=138$．

两边同除以 5，得

$$x=27.6(\text{公顷}).$$

从而 $4x=4\times27.6=110.4$(公顷)．

即种大豆 27.6 公顷，种小麦 110.4 公顷．

比较分析 本题的算术解法中，要求对题意进行思考，先求得解决问题的公式，然后再逐步地对公式中的计算找出解释的理由，从而作出解答．而代数解法，只要求用字母 x 表示待求的未知量，再考虑待求的未知量 x 与已知数量之间的关系，然后直截了当地列出一个等式，再应用运算律(或等式的基本性质)，求出这个未知数 x 应取的数值，使问题得到解决．

例 2 鸡兔同笼．共有 56 个头，160 只脚，试问鸡、兔各多少只?

算术解法 这是一个古老而有趣的数学问题，由于思考方法不同，可有不同的解法，以下是较为简单的解法．由于已知鸡、兔共 160 只脚，如果我们假定每只兔抬起 2 只脚，每只鸡抬起一只脚，则落地的脚是 160 只的一半，即 80 只脚．这 80 只脚中鸡的脚数与头数相等．因此，

兔数为： $80-56=24$(只)；

鸡数为： $56-24=32$(只)．

代数解法 设兔为 x 只，则鸡为(56-x)只，兔的脚数为 4x，鸡的脚数为 2(56-x)，又由已知条件，鸡兔一共有 160 只脚，可列出方程

$$4x+2(56-x)=160.$$

去括号

$$4x+112-2x=160,$$

合并同类项

$$4x-2x=160-112,$$

即 $2x=48$，

所以 $x=24$(只)…兔数．

从而 $56-24=32$(只)…鸡数．

比较分析 本题算术解法中，根据题设特点，利用了一个特殊技巧，即鸡、兔各抬起一半脚，然后依据其余脚数中，鸡的脚数与头数一一对应关系，得到解答．这种解法虽然有效，但不具有一般性，这也是算术解法的一个弱点，即一个问题一种解法，缺乏一般的通用性．而代数解法则不同，在本题中，只须用一个字母 x 代表兔(或鸡)的数量，然后便可根据已知条件，顺理成章地找出等量关系，列出方程．下一步解方程求未知数 x 的值，只是进行变形和运算，不需要什么特殊技巧．因此，代数解法具有一般性，这也是它优于算术解法之所在．

在前面的两例中，虽然比较分析了应用问题的算术解法和代数解法的特点，但对两者的联系未作进一步的探讨，下面通过例 3，初步讨论一下这个问题．

例 3 设有 5 元和 10 元的人民币共 12 张，共计 85 元，问其中 5 元、10 元的人民币各几张?

算术解法 假如全部是 5 元的人民币，则共计

$$5\times12=60(\text{元}),$$

与总和相差

$$85-60=25(元).$$

现在让我们逐次用一张 10 元的票子去换一张 5 元的票子，使得总张数保持不变，每换一次，总值将增加

$$10-5=5(元).$$

那么换几次才能补足总差额 25 元呢？这只要做一次除法就行了，即 $25\div5=5$．所以答案是

10 元人民币的张数 $=(85-60)\div(10-5)$ ①

$$=25\div5=5.$$

5 元人民币的张数 $=12-5=7$．

代数解法 设 10 元人民币的张数为 x，则 5 元人民币的张数为 $(12-x)$，其中 x 是一个待求的未知数，在此它只是 10 元人民币张数的简写，利用上述未知数符号，根据

10 元人民币的总元数+5 元人民币的总元数=85，则可写出下列方程

$10x+5(12-x)=85$． ②

以下的工作便是用“运算律”和“等式的性质”解出方程②的 x 值，就可得到解答了．

用分配律，去掉②中之括号，得

$$10x+5\times12-5x=85,$$

由交换律、分配律得

$$(10-5)x+60=85,$$

由等式性质，两边同减 60，得

$$(10-5)x=85-60,$$

等式两边同除以(10-5)，得

$x=(85-60)\div(10-5)=5$． ③

比较分析 在代数解法中，我们先引进一个未知数 x，表示问题中待求的量(如 10 元人民币的张数)，然后把未知数代入问题中，列出方程，再用运算律和等式的性质，求出方程中未知量 x 的值．在本例中，方程②的解就是③式

$$x=(85-60)\div(10-5)=5.$$

容易看出，算术解法其实就是上面由代数方程②所得的求值公式③，然后对于公式③中的每一步进行计算：

$$60=5\times 12,$$

$$85-60=25,$$

$$10-5=5,$$

$$(85-60)\div(10-5)=25\div 5=5.$$

并对每一步计算找出合适的理由加以解释就是了.

同学们可能会问，在算术解法中，怎么会发现求值公式①呢？对这个问题的回答，大体有两种可能：

第一种可能是先用代数解法，由②求得公式①，但由于小学还没有学习代数，所以只好耐心地对①式中的每一步计算，结合题意加以解释，使同学们了解算术解法的合理性.

第二种可能是对上述实际问题，做了一番归纳的工作，就是：假如 12 张人民币都是 5 元的，则 $12\times 5=60$；假如 11 张为 5 元，1 张为 10 元，则 $11\times 5+10=65$；假如 10 张为 5 元，2 张为 10 元，则 $10\times 5+2\times 10=70$；以此类推，不难发现当 10 元人民币的张数由 0 逐次加 1 时，总金额由 60 开始逐次加一个 5，而①式就是这个意思.

把两种解法加以比较可以看出，算术解法的准备工作，对于给定类型的问题，先做一番实验归纳工作，从而求得解决该类问题的公式，或合理的有顺序的计算步骤，然后还要逐步对公式中的计算找出理由加以解释. 显然，这样做是缺乏普遍性的.

而代数解法的准备工作是引入未知数符号，把问题中的数量关系，特别是等量关系用代数方程表示出来，然后再利用“运算律”和“等式性质”，求出方程中未知量应有的值，所以代数解法直截了当、简捷明快，具有高度普遍性.

一般说来，算术解法的公式和理由，由问题的类型不同而不同. 但代数解法的基本原理就是有效地利用了“运算律”和“等式性质”，所以这种解法不仅具有普遍性，也具有统一性.

例 4 有两个图书馆，自建馆以来，每年各进图书 5 千册，如果今年甲馆藏书 23 万册，乙馆藏书 11 万册，今后仍然是每年各进图书 5 千册，试问由今年起，什么时候甲馆藏书是乙馆的 3 倍？

下面用代数解法来解本题，以便从中进一步体会它的普遍性.

解 设由今年起 x 年后甲馆藏书是乙馆的 3 倍，则有代数方程

$$(23+0.5x)=3(11+0.5x).$$

利用分配律得

$$23+0.5x=33+1.5x,$$

两边同减 0.5x 得

$$23=33+1.5x-0.5x,$$

两边同减 33 得

$$23-33=1.5x-0.5x,$$

利用分配律得

$$23-33=(1.5-0.5)x,\quad -10=x,$$

即 $$x=-10.$$

这就是说从今年起，10 年前甲馆藏书已是乙馆藏书的 3 倍．

由此可见，代数解法，由于用字母表示了数，所以对所求的结果用正、负数的意义加以解释，就得到了这一问题的答案．这也就说明了代数解法比算术解法更具有普遍性．

练习二十

1．试用代数解法解下列应用题，再思考一下用算术解法怎么解?

(1)一个公司把它存货的 60％用现金出售，25％用记账出售，15％用支票出售．如果支票出售的钱比记账出售的钱少 4000 元，那么现金出售的钱是多少?

(2)有糖块若干，要分给班上的同学，如果每人 4 块，则余 14 块，如果每人 5 块，则又少 15 块，试问班上共有多少人？共有多少块糖?

2．制造一种零件第一道工序每人每小时可做 5 件，第二道工序每人每小时可做 3 件，现在有工人 40 人，如何分配劳动力才能使生产配套?

3．某生产队春播 2000 公顷小麦，每天比预计多播 50 公顷，因此提前 2 天完成，求实际播种天数．

4．木梁重 90 千克，比木梁长 2 米的铁梁重 160 千克，已知每米木梁比铁梁轻 5 千克，求两根梁的长．

第二十一讲 应用问题的解题技巧

应用问题是中学数学的重要内容．它与现实生活有一定的联系，它通过量与量的关系以及图形之间的度量关系，形成数学问题．应用问题涉及较多的知识面，要求学生灵活应用所学知识，在具体问题中，从量的关系分析入手，设定未知数，发现等量关系列出方程，获得方程的解，并

代入原问题进行验证．这一系列的解题程序，要求对问题要深入的理解和分析，并进行严密的推理，因此对发展创造性思维有重要意义．下面举出几个例题，略述一下解应用问题的技能和技巧．

1．直接设未知元

在全面透彻地理解问题的基础上，根据题中求什么就设什么是未知数，或要求几个量，可直接设出其中一个为未知数，这种设未知数的方法叫作直接设未知元法．

例 1 某校初中一年级举行数学竞赛，参加的人数是未参加人数的 3 倍，如果该年级学生减少 6 人，未参加的学生增加 6 人，那么参加与未参加竞赛的人数之比是 2∶1．求参加竞赛的与未参加竞赛的人数及初中一年级的人数．

分析 本例中要求三个量，即参赛人数、未参赛人数，以及初中一年级人数．由已知条件易知，可直接设未参赛人数为 x，那么参赛人数便是 3x．于是全年级共有(x+3x)人．

由已知，全年级人数减少 6 人，即(x+3x)-6， ①而未参加人数增加 6 人时，则参加人数是未参加人数的 2 倍，从而总人数为

(x+6)+2(x+6)．②

由①，②自然可列出方程．

解 设未参加的学生有 x 人，则根据分析，①，②两式应该相等，所以有方程

$$(x+6)+2(x+6)=(x+3x)-6,$$

所以

$$x+6+2x+12=4x-6,$$

所以 $3x+18=4x-6$,

所以 $x=24$(人)．

所以未参加竞赛的学生有 24 人，参加竞赛的小学生有

$$3\times24=72(\text{人}).$$

全年级有学生

$$4\times24=96(\text{人}).$$

说明 本例若按所求量次序设参加人数为 x 人，则未参加人数为

$\frac{1}{3}x$，这样产生分数，会给计算带来某些麻烦．

例 2 一工人在定期内要制造出一定数量的同样零件，若他每天多做10个，则提前$4\frac{1}{2}$天完成，若他每天少做5个，则要误期3天．问他要做多少个零件？定期是多少天？

分析 若直接设这个工人要做 x 个零件，定期为 y 天，则他每天做$\frac{x}{y}$个零件．根据题目条件，若他每天多做10个，则可减少$4\frac{1}{2}$天工期，所以，

$$x=\left(\frac{x}{y}+10\right)\cdot\left(y-4\frac{1}{2}\right).$$

另一方面，如果他每天少做 5 个，则要增加 3 天工期，因此，

$$x=\left(\frac{x}{y}-5\right)(y+3).$$

显然，将此两式联立，解出 x，y 即可．

解 设工人要做 x 个零件，定期为 y 天，则他每天做 x/y 个，依分析有方程组

$$\begin{cases}\left(\frac{x}{y}+10\right)\left(y-4\frac{1}{2}\right)=x,\\ \left(\frac{x}{y}-5\right)(y+3)=x.\end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases}10y-4\frac{1}{2}\times\frac{x}{y}=45, & ①\\ -5y+3\times\frac{x}{y}=15 & ②\end{cases}$$

②×2+①得

$$\frac{x}{y}=50,\quad x=50y,$$

将 x=50y 代入②得

$$y=27,\quad x=50y=1350,$$

即
$$\begin{cases}x=1350,\\ y=27.\end{cases}$$

答 工人要做 1350 个零件，定期为 27 天．

例 3 一队旅客乘坐汽车，要求每辆汽车的旅客人数相等．起初每辆汽车乘了 22 人，结果剩下 1 人未上车；如果有一辆汽车空着开走，那么所有旅客正好能平均分乘到其他各车上．已知每辆汽车最多只能容纳 32 人，求起初有多少辆汽车？有多少名旅客？

解 设起初有汽车 m 辆，开走一辆空车后，平均每辆车所乘旅客为 n 人．由于 $m\geqslant 2$，$n\leqslant 32$，依题意有

$$22m+1=n(m-1).$$

所以

$$n=\frac{22m+1}{m-1}=22+\frac{23}{m-1}$$

因为 n 为自然数，所以 23/m-1 为整数，因此

$$m-1=1，或 m-1=23,$$

即 m=2 或 m=24.

当 m=2 时，n=45(不合题意，舍去)；当 m=24 时，n=23(符合题意)．

所以旅客人数为：

$$n(m-1)=23\times(24-1)=529(人).$$

答 起初有汽车 24 辆，有乘客 529 人．

注意 解方程后所得结果必须代入原题检验根的合理性，并根据情况做具体讨论．

2．间接设元

如果对某些题目直接设元不易求解，便可将并不是直接要求的某个量设为未知数，从而使得问题变得容易解答，我们称这种设未知数的方法为间接设元法．

例 4 若进货价降低 8％，而售出价不变，那么利润可由目前的 p％增加到(p+10)％，求 p．

分析 本题若直接设未知元为 x，则不易列方程，为此，可间接设元，设进货价为 x，则下降后的进货价为 0.92x．由于售出价不变，它可用以下方程式表示：

$$x(1+p\%)=0.92x[1+(10+p)\%].$$

解 设原进货价为 x，则下降 8%后的进货价为 0.92x．根据题意售货价不变，故有以下方程

$$x(1+0.01p)=0.92x[1+0.01(p+10)],$$

约去 x 得

$$1+0.01p=0.92[1+0.01(p+10)],$$

所以

$$1+0.01p=0.92+0.0092p+0.092,$$

所以

$$(0.01-0.0092)p=0.92+0.092-1,$$

即 $0.0008p=0.012$，

所以 $p=15$．

答 原利润为 15%．

例 5 甲乙两人沿着圆形跑道匀速跑步，它们分别从直径 AB 两端同时相向起跑．第一次相遇时离 A 点 100 米，第二次相遇时离 B 点 60 米，求圆形跑道的总长．

分析与解 如图 1－76，设圆形跑道总长为 2S，又设甲乙的速度分别为 V，V′，再设第一次在 C 点相遇，则第二次相遇有以下两种情况：

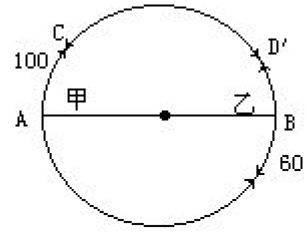


图 1－76

(1)甲乙第二次相遇在 B 点下方 D 处，此时有方程组

$$\begin{cases}\dfrac{100}{V}=\dfrac{S-100}{V'}, & ① \\[2ex] \dfrac{S+60}{V}=\dfrac{2S-60}{V'}. & ②\end{cases}$$

化简得

$$\frac{100}{S}-100=\frac{V}{V'}, \quad ③$$

$$\frac{S+60}{2S-60}=\frac{V}{V'}. \quad ④$$

由③，④得

$$\frac{100}{S-100}=\frac{S+60}{2S-60}.$$

解此方程得

S=0(舍去)，S=240．

所以 2S=480 米．经检验是方程的解．

⑵若甲乙第二次相遇在 B 的上方 D′ 处，则有方程组

$$\frac{100}{V}=\frac{S-100}{V'}, \quad ①'$$

$$\frac{S-60}{V}=\frac{2S+60}{V'}. \quad ②'$$

解此方程组得

S=0(舍去)，S=360．

所以 2S=720 米．经检验也是方程的解．

这样，两人可能在 D 点处相遇，也可能在 D′ 点处相遇，故圆形跑道总长为 480 米或 720 米．

3．设辅助元

有时为了解题方便，可设某些量为辅助量，参与列方程和运算，最后把这些辅助量约去，得出要求的值．

例 6 从两个重量分别为 m 千克和 n 千克，且含铜百分数不同的合金上，切下重量相等的两块，把所切下的每一块和另一种剩余的合金加在一起熔炼后，两者含铜百分数相等，问切下的重量是多少千克?

分析与解 设切下的重量是 x 千克，并设重 m 千克的铜合金中含铜的百分数为 q1，重 n 千克的铜合金中含铜的百分数为 q2，则切下的两块中分别含铜 xq1 和 xq2，而混合熔炼后所得两块合金中分别含铜[xq1+(n-x)q2]和[xq2+(m-x)q1]．故依题意有方程

$$\frac{xq_1+(n-x)q_2}{n}=\frac{xq_2+(m-x)q_1}{m}.$$

解此方程得

$$x=\frac{mn}{m+n}（千克）.$$

答 切下的重量为 mn/m+n(千克)．

例 7 甲乙两邮递员分别从 A，B 两地同时以匀速相向而行，甲比乙多走了 18 千米(km)，相遇后甲走 4.5 小时到达 B 地，乙走 8 小时到 A 地，求 A，B 两地的距离．

解 设甲速为 a 千米/小时，乙速为 b 千米/小时，A，B 两地的距离为 2S，依题意有

$$\begin{cases}\frac{S+9}{b}=8, & ①\\ \frac{S-9}{a}=4.5 & ②\\ \frac{S+9}{a}=\frac{S-9}{b}. & ③\end{cases}$$

由①，②得 $\frac{S-9}{S+9}=\frac{9A}{16b}.$

由③得 $\frac{S+9}{S-9}=\frac{a}{b}.$

所以

$$\left(\frac{S-9}{S+9}\right)^2=\frac{b}{a}\cdot\frac{9a}{16b}=\frac{9}{16},$$

所以 S-9/S+9=3/4，

所以 $S=63$(千米)， $2S=126$(千米)．

答 A，B 两地相距 126 千米．

练习二十一

1．已知甲、乙、丙三人．甲单独做一件工作的时间是乙丙两人合作做这件工作所用时间的 a 倍，乙独做这件工作是甲丙两人合作做这件工作的 b 倍．求丙单独做这件工作是甲乙两人合作做这件工作所需时间的几倍?

2．有甲乙两容量均为 20 升(L)的容器，甲容器内装满纯酒精，而乙为空容器．自甲内倒出若干酒精于乙内，再将乙其余部分注满水，将此混合溶液注满甲容器，最后自甲容器回注入乙容器 62/3 升，则两容器内所含纯酒精量相等，问第一次自甲容器倒出多少酒精?

3．某人骑自行车从 A 地先以每小时 12 千米的速度下坡后，再以每小时 15 千米的速度走平路到 B 地，共用了 55 分钟．回来时他以每小时 8 千米的速度通过平路后，以每小时 4 千米的速度上坡，从 B 地到 A 地共用了 11/2 小时，求地面上 A，B 两地相距多少千米?

4．有一块长方形的场地，长比宽多 4 米，周围有一条宽 2 米的道路环绕着，已知道路的面积和这块土地的面积相等．求这块场地的周长是多少米?

5．一个四位数是奇数，它的千位数字小于其他各位数字，十位数字等于千位数字和个位数字之和的 2 倍，求这个四位数．

第二十二讲 生活中的数学(一)——储蓄、保险与纳税

储蓄、保险、纳税是最常见的有关理财方面的数学问题，几乎人人都会遇到，因此，我们在这一讲举例介绍有关这方面的知识，以增强理财的自我保护意识和处理简单财务问题的数学能力．

1．储蓄

银行对存款人付给利息，这叫储蓄．存入的钱叫本金．一定存期(年、月或日)内的利息对本金的比叫利率．本金加上利息叫本利和．

$$利息=本金\times利率\times存期,$$

$$本利和=本金\times(1+利率经\times存期).$$

如果用 p，r，n，i，s 分别表示本金、利率、存期、利息与本利和，那么有

$$i=prn,\quad s=p(1+rn).$$

例 1 设年利率为 0.0171，某人存入银行 2000 元，3 年后得到利息多少元？本利和为多少元?

解 $i=2000\times0.0171\times3=102.6$(元)．

$s=2000\times(1+0.0171\times3)=2102.6$(元).

答 某人得到利息 102.6 元，本利和为 2102.6 元.

以上计算利息的方法叫单利法，单利法的特点是无论存款多少年，利息都不加入本金. 相对地，如果存款年限较长，约定在每年的某月把利息加入本金，这就是复利法，即利息再生利息. 目前我国银行存款多数实行的是单利法. 不过规定存款的年限越长利率也越高. 例如，1998 年 3 月我国银行公布的定期储蓄人民币的年利率如表 22．1 所示.

表 22．1

存期	1年	2年	3年	5年
年利率（%）	5.22	5.58	6.21	6.66

用复利法计算本利和，如果设本金是 p 元，年利率是 r,存期是 n 年，那么若第 1 年到第 n 年的本利和分别是 s_1，s_2,…，s_n，则

$s_1=p(1+r)$,

$s_2=s_1(1+r)=p(1+r)(1+r)=p(1+r)^2$,

$s_3=s_2(1+r)=p(1+r)_2(1+r)=p(1+r)^3$,

……,

$s_n=p(1+r)^n$.

例 2 小李有 20000 元，想存入银行储蓄 5 年，可有几种储蓄方案，哪种方案获利最多?

解 按表 22．1 的利率计算.

(1)连续存五个 1 年期，则 5 年期满的本利和为

$$20000(1+0.0522)5\approx25794(\text{元}).$$

(2)先存一个 2 年期，再连续存三个 1 年期，则 5 年后本利和为

$$20000(1+0.0558\times2)\cdot(1+0.0522)3\approx25898(\text{元}).$$

(3)先连续存二个 2 年期，再存一个 1 年期，则 5 年后本利和为

$$20000(1+0.0558\times2)^2\cdot(1+0.0552)\approx26003(\text{元}).$$

(4)先存一个 3 年期，再转存一个 2 年期，则 5 年后的本利和为

$$20000(1+0.0621\times3)\cdot(1+0.0558\times2)\approx26374(元).$$

(5)先存一个 3 年期，然后再连续存二个 1 年期，则 5 年后本利和为

$$20000(1+0.0621\times3)\cdot(1+0.0522)2\approx26268(元).$$

(6)存一个 5 年期，则到期后本利和为

$$20000(1+0.0666\times5)\approx26660(元).$$

显然，第六种方案，获利最多，可见国家所规定的年利率已经充分考虑了你可能选择的存款方案，利率是合理的.

例 3 小华是独生子女，他的父母为了给他支付将来上大学的学费，从小华 5 岁上小学前一年，就开始到银行存了一笔钱，设上大学学费每年为 4000 元，四年大学共需 16000 元，设银行在此期间存款利率不变，为了使小华到 18 岁时上大学本利和能有 16000 元，他们开始到银行存入了多少钱？(设 1 年、3 年、5 年整存整取，定期储蓄的年利率分别为 5.22％，6.21％和 6.66％)

解 从 5 岁到 18 岁共存 13 年，储蓄 13 年得到利息最多的方案是：连续存两个 5 年期后，再存一个 3 年期.

设开始时，存入银行 x 元，那么第一个 5 年到期时的本利和为

$$x+x\cdot0.0666\times5=x(1+0.0666\times5).$$

利用上述本利和为本金，再存一个 5 年期，等到第二个 5 年期满时，则本利和为

$$x(1+0.0666\times5)+x(1+0.0666\times5)\cdot0.0666\times5$$

$$=x(1+0.0666\times5)^2.$$

利用这个本利和，存一个 3 年定期，到期时本利和为 $x(1+0.0666\times5)_2(1+0.0621\times3)$. 这个数应等于 16000 元，即

$$x(1+0.0666\times5)^2\cdot(1+0.0621\times3)=16000,$$

所以 $1.777\times1.186x=16000$,

所以 $x\approx7594$(元).

答 开始时存入 7594 元.

2. 保险

保险是现代社会必不可少的一种生活、生命和财产保护的金融事业．例如，火灾保险就是由于火灾所引起损失的保险，人寿保险是由于人身意外伤害或养老的保险，等等．下面举两个简单的实例．

例 4 假设一个小城镇过去 10 年中，发生火灾情况如表 22．2 所示．

表 22． 2

总家数	365	371	385	395	412	418	430	435	440	445
被烧家数	1	0	1	2	0	2	1	2	0	2

试问：(1)设想平均每年在 1000 家中烧掉几家?

(2)如果保户投保 30 万元的火灾保险，最低限度要交多少保险费保险公司才不亏本?

解 (1)因为

1+0+1+2+0+2+1+2+0+2=11(家)，

365+371+385+395+412+418+430+435+440＋445=4096(家)．

11÷4096≈0.0026．

(2)300000×0.0026=780(元)．

答(1)每年在 1000 家中，大约烧掉 2.6 家．

(2)投保 30 万元的保险费，至少需交 780 元的保险费．

例 5 财产保险是常见的保险．假定 A 种财产保险是每投保 1000 元财产，要交 3 元保险费，保险期为 1 年，期满后不退保险费，续保需重新交费．B 种财产保险是按储蓄方式，每 1000 元财产保险交储蓄金 25 元，保险一年．期满后不论是否得到赔款均全额退还储蓄金，以利息作为保险费．今有兄弟二人，哥哥投保 8 万元 A 种保险一年，弟弟投保 8 万元 B 种保险一年．试问兄弟二人谁投的保险更合算些?(假定定期存款 1 年期利率为 5.22%)

解 哥哥投保 8 万元 A 种财产保险，需交保险费

$$80000\div 1000\times 3=80\times 3=240(元).$$

弟弟投保 8 万元 B 种财产保险，按每 1000 元交 25 元保险储蓄金算，共交

$$80000\div 1000\times 25=2000(元),$$

而 2000 元一年的利息为

$$2000\times0.0522=104.4(元).$$

兄弟二人相比较，弟弟少花了保险费约

$$240-104.4=135.60(元).$$

因此，弟弟投的保险更合算些.

3．纳税

纳税是每个公民的义务，对于每个工作人员来说，除了工资部分按国家规定纳税外，个人劳务增收也应纳税．现行劳务报酬纳税办法有三种：

(1)每次取得劳务报酬不超过 1000 元的(包括 1000 元)，预扣率为 3％，全额计税.

(2)每次取得劳务报酬 1000 元以上、4000 元以下，减除费用 800 元后的余额，依照 20％的比例税率，计算应纳税额.

(3)每次取得劳务报酬 4000 元以上的，减除 20％的费用后，依照 20％的比例税率，计算应纳税额.

每次取得劳务报酬超过 20000 元的(暂略).

由(1)，(2)，(3)的规定，我们如果设个人每次劳务报酬为 x 元，y 为相应的纳税金额(元)，那么，我们可以写出关于劳务报酬纳税的分段函数：

$$\begin{cases} x\cdot 3\%, & x\leqslant 1000; \\ y(x)=(x-800)\cdot 20\%, & 1000<x\leqslant 4000; \\ x(1-20\%)\cdot 20\%, & 4000<x\leqslant 20000. \end{cases} \quad ①$$

例 6 小王和小张两人一次共取得劳务报酬 10000 元，已知小王的报酬是小张的 2 倍多，两人共缴纳个人所得税 1560 元，问小王和小张各得劳务报酬多少元?

解 根据劳务报酬所得税计算方法(见函数①),从已知条件分析可知小王的收入超过 4000 元，而小张的收入在 1000～4000 之间，如果设小王的收入为 x 元，小张的收入为 y 元，则有方程组：

$$\begin{cases} x+y=10000, & ① \\ x(1-20\%)20\%+(y-800)20\%=1560. & ② \end{cases}$$

由①得 y=10000-x，将之代入②得

$$x(1-20\%)20\%+(10000-x-800)20\%=1560,$$

化简、整理得

$$0.16x-0.2x+1840=1560,$$

所以

$$0.04x=280,\ x=7000(元).$$

则 $y=10000-7000=3000$(元).

所以

$$\begin{cases} x=7000（元）, \\ y=3000（元）. \end{cases}$$

答 小王收入 7000 元，小张收入 3000 元.

例 7 如果对写文章、出版图书所获稿费的纳税计算方法是

$$y（x）=\begin{cases}（x-800）\cdot 20\%\cdot（1-30\%）, & x\leqslant 4000; \\ x=（1-20\%）\cdot 20\%\cdot（1-30\%）, & x>4000. \end{cases}$$

其中 $y(x)$表示稿费为 x 元应缴纳的税额.

那么若小红的爸爸取得一笔稿费，缴纳个人所得税后，得到 6216 元，问这笔稿费是多少元?

解 设这笔稿费为 x 元，由于 $x>4000$，所以，根据相应的纳税规定，有方程

$$x(1-20\%)\cdot\ 20\%\times(1-30\%)=x-6216,$$

化简、整理得

$$0.112x=x-6216,$$

所以 $0.888x=6216$,

所以 $x=7000$(元).

答 这笔稿费是 7000 元.

练习二十二

1．按下列三种方法，将 100 元存入银行，10 年后的本利和各是多少？(设 1 年期、3 年期、5 年期的年利率分别为 5.22％，6.21％，6.66％保持不变)

(1)定期 1 年，每存满 1 年，将本利和自动转存下一年，共续存 10 年；

(2)先连续存三个 3 年期，9 年后将本利和转存 1 年期，合计共存 10 年；

(3)连续存二个 5 年期．

2．李光购买了 25000 元某公司 5 年期的债券，5 年后得到本利和为 40000 元，问这种债券的年利率是多少?

3．王芳取得一笔稿费，缴纳个人所得税后，得到 2580 元，问这笔稿费是多少元?

4．把本金 5000 元存入银行，年利率为 0.0522，几年后本利和为 6566 元(单利法)?

第二十三讲 生活中的数学(二)——地板砖上的数学

随着人们生活水平的提高,很多家庭都装修房子,其中铺地板砖就是一项重要的美化工作.当你看到地板砖展铺成美丽的图案时,你是否想到展铺这美丽图案的数学原理呢？如果你注意到的话，可能会对下面的简单分析发生兴趣．

地板砖展铺的图形，一般都是用几种全等的平面图形展铺开来的，有时用由直线构成的多边形组成的图案，有时用由曲线组成的图案，千变万化．但是作为基础还是用平面多边形展铺平面．有时虽然有曲线，却常常是由多边形和圆作适当变化而得到的．例如，一个由正方形展铺的平面图案(图 1－77(a))，如果对正方形用圆弧做一些变化(图 1－77(b))，那么把以上两个图形结合起来设计，就可由比较单调的正方形图案，变化曲线形成花纹图案了(图 1－77(c))．

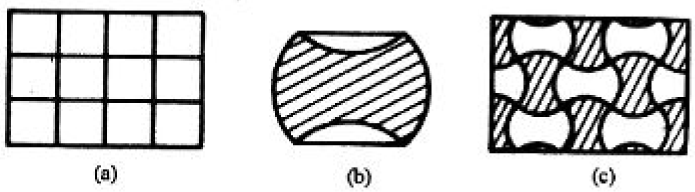


图 1-77

由于多边形是构成地板砖展铺复杂图形的基础，因此，下面我们对利用多边形展铺平面图形做些简要分析．

例 1 怎样以三角形为基础展铺平面图案．

分析与解 三角形是多边形中最简单的图形，如果用三角形为基本图形来展铺平面图案， 那么就要考虑三角形的特点．由于三角形的三个内角和为 180°，所以要把三角形的三个角集中到一起，就组成了一个平角．如果要在平面上一个点的周围集中三角形的角，那么必须使这些角的和为两个平角．因此，若把图 1－78 中的三角形的三个内角集中在一起，并进行轴对称变换或中心对称变换，就可以得到集中于一点的六个角，它们的和为 360°，刚好覆盖上这一点周围的平面．变换的方法见图 1－79．

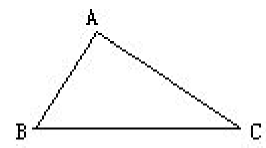


图 1-78

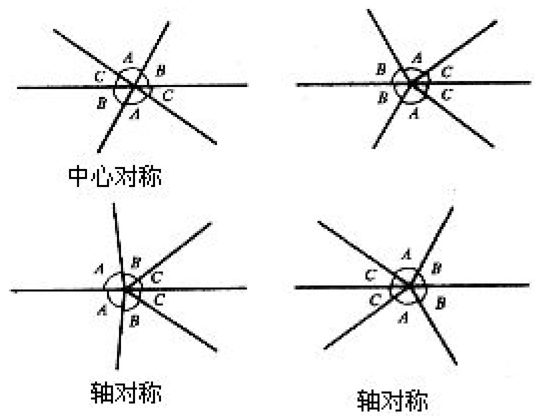


图 1-79

在中心对称的情况下，三角形不翻折，在轴对称的情况下，三角形要翻折．如果把三角形正、反两面涂上颜色，那么通过对称变换，正、反两面就会明显地反映出来了．

由上面的分析可知，用三角形为基本图形展铺平面图案，共有以下四种情况，如图 1－80．

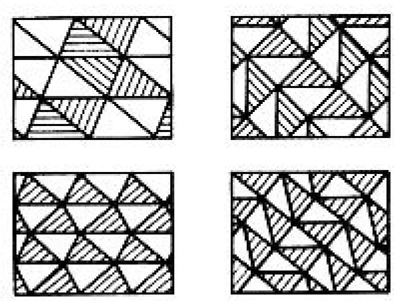


图 1-80

例 2 怎样以四边形为基础展铺平面图案?

分析与解 由于四边形内角和为 360°，所以，任何四边形都可以作为基本图形来展铺平面图案．图 1－81 中的(a)，(b)，(C)，(d)分别是以矩形、菱形、梯形、一般四边形为基本图形的平面展铺图案．

例 3 怎样以正多边形为基本图形展铺平面图案?

分析与解 用正多边形为基本图形展铺平面图案，集中于一点的周围的正多边形的各个角的和应是 360°．例如，正五边形一个内角为

$$\frac{(5-2)\times180^\circ}{5}=108^\circ\;;$$

正十边形一个内角为

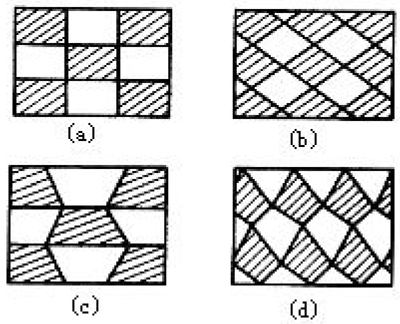


图 1-81

如果把两个正五边形的内角与一个正十边形的内角加起来，则其和为 2×108°+144°=360°．但是它们并不能用来展铺平面．

如果用同种的正 n 边形来展铺平面图案，在一个顶点周围集中了 m 个正 n 边形的角．由于这些角的和应为 360°，所以以下等式成立

$$m\cdot\frac{(n-2)\times180^\circ}{n}=360^\circ\;,$$

即
$$m\cdot\frac{(n-2)\times2\times90^\circ}{n}=4\times90^\circ\;,$$

即
$$m\cdot\left(2-\frac{4}{n}\right)=4.$$

因为 m，n 都是正整数，并且 m＞2，n＞2．所以 m-2，n-2 也都必定是正整数．所以当 n-2=1，m-2=4 时，则 n=3，m=6；当 n-2=2，m-2=2 时，则 n=4，m=4；当 n-2=4，m-2=1 时，则 n=6，m=3．这就证明了只用一种正多边形展铺平面图案，只存在三种情况：

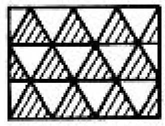
(1)由 6 个正三角形拼展，我们用符号(3，3，3，3，3，3)来表示(见图 1－82)．

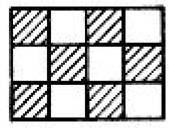
(2)由 4 个正方形拼展，我们用符号(4，4，4，4)来表示

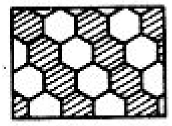
(见图 1－83)．

(3)由 3 个正六边形来拼展，我们用符号(6，6，6)来表示

(见图 1－84)．


(3, 3, 3, 3, 3, 3)
图 1-82


(4, 4, 4, 4)
图 1-83


(6, 6, 6)
图 1-84

如果用两种正多边形来拼展平面图案，那么就有以下五种情况：(3，3，3，4，4)，(3，3，3，3，6)，(3，3，6，6)，(3，12，12)以及(4，8，8)．这五种情况中，(3，3，3，4，4)又可有两种不同的拼展方法，参看下面六种拼展图形(图 1－85)．

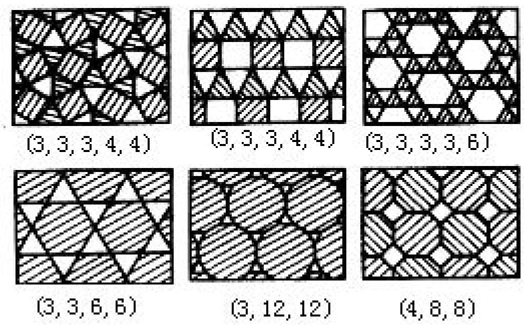


图 1-85

用三种正多边形展拼平面图形就比较难设计了．下面举出两例供同学们思考(图 1－86)．

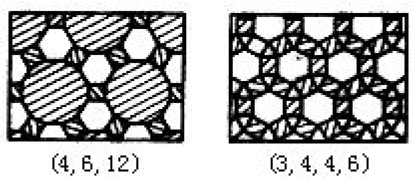


图 1-86

有兴趣的同学请自己构想出一两个例子．

练习二十三

1．试用三角形和梯形这两种多边形拼展平面图案．

2．试用形如图 1－87 的图形拼展平面图案．

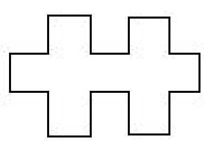


图 1- 87

3．试用边长为 1 的正三角形、边长为 1 的正方形和两腰为 1、夹角为 120° 的等腰三角形拼展平面图案．

4．试用圆弧和多边形(多边形可以用圆弧割补)设计一种平面图案．

5．试用一个正方形，仿照图 1－76(a)，(b)，(c)的变化方式，设计一种平面图案．

复习题

1．计算 $\underbrace{11\cdots1}_{2000个1}\underbrace{55\cdots5}_{2000个5}\div\underbrace{33\cdots3}_{1999个3}5$.

2．设 a，b，c 为实数，且 $|a|+a=0$，$|ab|=ab$，$|c|-c=0$，求代数式 $|b|-|a+b|-|c-b|+|a-c|$ 的值．

3．若 $m<0$，$n>0$，$|m|<|n|$，且 $|x+m|+|x-n|=m+n$，求 x 的取值范围．

4．设 $(3x-1)^7=a_7x^7+a_6x^6+\cdots+a_1x+a_0$，试求 $a_0+a_2+a_4+a_6$ 的值．

5．已知方程组

$$\begin{cases} x+(1+k)y=0, & ① \\ (1-k)x+ky=1+k, & ② \\ (1+k)x+(12-k)y=-(1+k) & ③ \end{cases}$$

有解，求 k 的值．

6．解方程 $2|x+1|+|x-3|=6$．

7．解方程组

$$\begin{cases} |x-y|=2, \\ |x|+|y|=4. \end{cases}$$

8．解不等式 $||x+3|-|x-1||>2$．

9．比较下面两个数的大小：

$$A=\frac{9999^{1111}+1}{9999^{2222}+1},\ B=\frac{9999^{2222}+1}{9999^{3333}+1}.$$

10．x，y，z 均是非负实数，且满足：

$$x+3y+2z=3，3x+3y+z=4，$$

求 $u=3x-2y+4z$ 的最大值与最小值．

11．求 $x^4-2x^3+x^2+2x-1$ 除以 x^2+x+1 的商式和余式．

12．如图 1－88 所示．小柱住在甲村，奶奶住在乙村，星期日小柱去看望奶奶，先在北山坡打一捆草，又在南山坡砍一捆柴给奶奶送去．请问：小柱应该选择怎样的路线才能使路程最短？

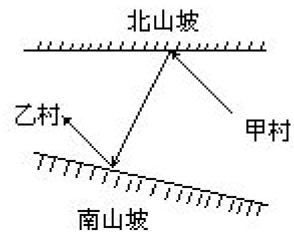


图 1-88

13．如图 1－89 所示．AOB 是一条直线，OC，OE 分别是∠AOD 和∠DOB 的平分线，∠COD=55°．求∠DOE 的补角．

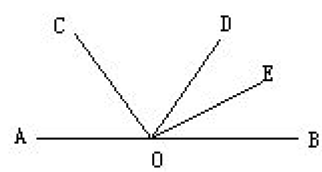


图 1-89

14．如图 1－90 所示．BE 平分∠ABC，∠CBF=∠CFB=55°，∠EDF=70°．求证：BC∥AE．

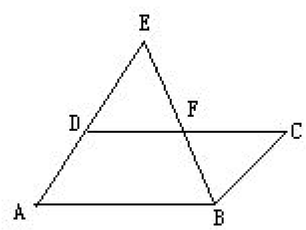


图 1-90

15．如图 1－91 所示．在△ABC 中，EF⊥AB，CD⊥AB，∠CDG=∠BEF．求证：∠AGD=∠ACB．

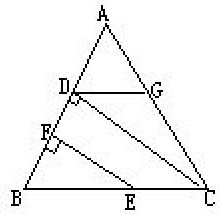


图 1-91

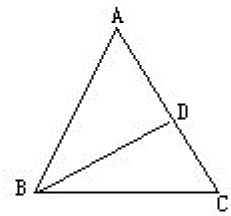


图 1-92

16．如图 1－92 所示．在△ABC 中，∠B=∠C，BD⊥AC 于 D．求

证：$\angle DBC=\frac{1}{2}\angle A$.

17．如图 1－93 所示．在△ABC 中，E 为 AC 的中点，D 在 BC 上，且 BD∶DC=1∶2，AD 与 BE 交于 F．求△BDF 与四边形 FDCE 的面积之比．

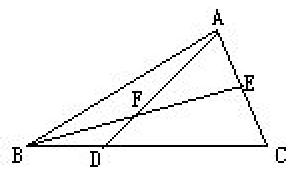


图 1-93

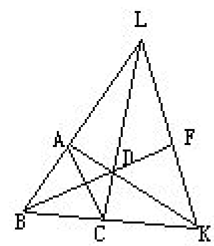


图 1-94

18．如图 1－94 所示．四边形 ABCD 两组对边延长相交于 K 及 L，对角线 AC∥KL，BD 延长线交 KL 于 F．求证：KF=FL．

19．任意改变某三位数数码顺序所得之数与原数之和能否为 999？说明理由．

20．设有一张 8 行、8 列的方格纸，随便把其中 32 个方格涂上黑色，剩下的 32 个方格涂上白色．下面对涂了色的方格纸施行“操作”，每次操作是把任意横行或者竖列上的各个方格同时改变颜色．问能否最终得到恰有一个黑色方格的方格纸？

21．如果正整数 p 和 p+2 都是大于 3 的素数，求证：$6\mid(p+1)$．

22．设 n 是满足下列条件的最小正整数，它们是 75 的倍数，且恰有

75个正整数因子（包括1和其本身），求$\frac{n}{75}$．

23．房间里凳子和椅子若干个，每个凳子有 3 条腿，每把椅子有 4 条腿，当它们全被人坐上后，共有 43 条腿(包括每个人的两条腿)，问房间里有几个人？

24．求不定方程 49x-56y+14z=35 的整数解．

25．男、女各 8 人跳集体舞．

⑴如果男女分站两列；

⑵如果男女分站两列，不考虑先后次序，只考虑男女如何结成舞伴．

问各有多少种不同情况?

26．由 1，2，3，4，5 这 5 个数字组成的没有重复数字的五位数中，有多少个大于 34152?

27．甲火车长 92 米，乙火车长 84 米，若相向而行，相遇后经过 1.5 秒(s)两车错过，若同向而行相遇后经 6 秒两车错过，求甲乙两火车的速度．

28．甲乙两生产小队共同种菜，种了 4 天后，由甲队单独完成剩下的，又用 2 天完成．若甲单独完成比乙单独完成全部任务快 3 天．求甲乙单独完成各用多少天?

29．一船向相距 240 海里的某港出发，到达目的地前 48 海里处，速度每小时减少 10 海里，到达后所用的全部时间与原速度每小时减少 4 海里航行全程所用的时间相等，求原来的速度．

30．某工厂甲乙两个车间，去年计划完成税利 750 万元，结果甲车间超额 15％完成计划，乙车间超额 10％完成计划，两车间共同完成税利 845 万元，求去年这两个车间分别完成税利多少万元?

31．已知甲乙两种商品的原价之和为 150 元．因市场变化，甲商品降价 10％，乙商品提价 20％，调价后甲乙两种商品的单价之和比原单价之和降低了 1％，求甲乙两种商品原单价各是多少?

32．小红去年暑假在商店买了 2 把儿童牙刷和 3 支牙膏，正好把带去的钱用完．已知每支牙膏比每把牙刷多 1 元，今年暑假她又带同样的钱去该商店买同样的牙刷和牙膏，因为今年的牙刷每把涨到 1.68 元，牙膏每支涨价 30％，小红只好买 2 把牙刷和 2 支牙膏，结果找回 4 角钱．试问去年暑假每把牙刷多少钱？每支牙膏多少钱?

33．某商场如果将进货单价为 8 元的商品，按每件 12 元卖出，每天可售出 400 件，据经验，若每件少卖 1 元，则每天可多卖出 200 件，问每件应减价多少元才可获得最好的效益?

34．从 A 镇到 B 镇的距离是 28 千米，今有甲骑自行车用 0．4 千米/分钟的速度，从 A 镇出发驶向 B 镇，25 分钟以后，乙骑自行车，用 0．6 千米/分钟的速度追甲，试问多少分钟后追上甲?

35．现有三种合金：第一种含铜 60％，含锰 40％；第二种含锰 10％，含镍 90％；第三种含铜 20％，含锰 50％，含镍 30％．现各取适当重量的这三种合金，组成一块含镍 45％的新合金，重量为 1 千克．

⑴试用新合金中第一种合金的重量表示第二种合金的重量；

⑵求新合金中含第二种合金的重量范围；

(3)求新合金中含锰的重量范围.

自测题

自测题一

1. 甲乙两人每年收入相等，甲每年储蓄全年收入的$\frac{1}{5}$，乙每月比甲多开支100元，三年后负债600元.求每人每年收入多少?

2．若$S=15+195+1995+19995+\cdots+\underbrace{199\cdots95}_{44个9}$，则和数S的末四位数字的和是多少?

3．试确定等式$\left|\frac{a-b}{a}\right|=\frac{b-a}{a}$（$a\neq 0$）成立的条件.

4．一个人以3千米/小时的速度上坡，以6千米/小时的速度下坡，行程12千米共用了3小时20分钟，试求上坡与下坡的路程.

5．求和

$$\frac{3}{1\cdot 2\cdot}+\frac{5}{2\cdot 3\cdot 5}+\frac{7}{3\cdot 4\cdot 6}+\cdots+\frac{2n+1}{n(n+1)(n+3)}.$$

6．证明：质数p除以30所得的余数一定不是合数.

7．若p，q，$\frac{2p-1}{q}$，$\frac{2q-1}{p}$都是整数，且$p>1$，$q>1$，求$p+q$的值.

8．若两个整数x，y使x^2+xy+y^2能被9整除，证明：x和y能被3整除.

9．如图1－95所示．在四边形ABCD中，对角线AC，BD的中点为M，N，MN的延长线与AB边交于P点．求证：△PCD的面积等于四边形ABCD的面积的一半.

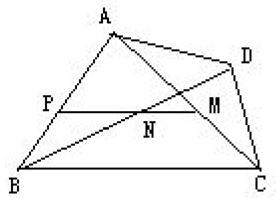


图 1- 95

自测题二

1．已知 $3x^2-x=1$，求 $6x^3+7x^2-5x+2000$ 的值．

2．某商店出售的一种商品，每天卖出 100 件，每件可获利 4 元，现在他们采用提高售价、减少进货量的办法增加利润，根据经验，这种商品每涨价 1 元，每天就少卖出 10 件．试问将每件商品提价多少元，才能获得最大利润？最大利润是多少元？

3．如图 1－96 所示．已知 CB⊥AB，CE 平分∠BCD，DE 平分∠CDA，∠1＋∠2=90°．求证：

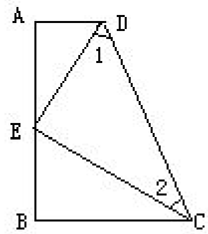


图 1-96

DA⊥AB．

4．已知方程组

$$\begin{cases}ax+by=-16,\\ cx+20y=-224\end{cases}$$

的解应为

$$\begin{cases}x=8,\\ y=-10,\end{cases}$$

一个学生解题时把 c 抄错了，因此得到的解为

$$\begin{cases} x=12, \\ y=-13, \end{cases}$$

求 $a^2+b^2+c^2$ 的值．

5．求方程｜xy｜-｜2x｜+｜y｜=4 的整数解．

6．王平买了年利率 7.11％的三年期和年利率为 7.86％的五年期国库券共 35000 元，若三年期国库券到期后，把本息再连续存两个一年期的定期储蓄，五年后与五年期国库券的本息总和为 47761 元，问王平买三年期与五年期国库券各多少？(已知一年期定期储蓄年利率为 5.22％)

7．对 k，m 的哪些值，方程组

$$\begin{cases} y=kx+m, \\ y=(2k-1)x+4 \end{cases}$$

至少有一组解？

8．求不定方程 3x＋4y＋13z=57 的整数解．

9．小王用 5 元钱买 40 个水果招待五位朋友．水果有苹果、梨子和杏子三种，每个的价格分别为 20 分、8 分、3 分．小王希望他和五位朋友都能分到苹果，并且各人得到的苹果数目互不相同，试问他能否实现自己的愿望？

自测题三

1．解关于 x 的方程

$$ax+b-\frac{3x+2ab}{3}=\frac{1}{2}.$$

2．解方程

$$\frac{x-a}{bc}+\frac{x-b}{ac}+\frac{x-c}{ab}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

其中 $a+b+c\neq 0$．

3．求 $(8x^3-6x^2+4x-7)^3(2x^5-3)^2$ 的展开式中各项系数之和．

4．液态农药一桶，倒出 8 升后用水灌满，再倒出混合溶液 4 升，再用水灌满，这时农药的浓度为 72％，求桶的容量．

5．满足$[-1.77x]=-2x$的自然数x共有几个？这里$[x]$表示不超过x的最大整数，例如$[-5.6]=-6$，$[3]=3$．

6．设P是△ABC内一点．求：P到△ABC三顶点的距离和与三角形周长之比的取值范围．

7．甲乙两人同时从东西两站相向步行，相会时，甲比乙多行24千米，甲经过9小时到东站，乙经过16小时到西站，求两站距离．

8．黑板上写着三个数，任意擦去其中一个，将它改写成其他两数的和减1，这样继续下去，最后得到19，1997，1999，问原来的三个数能否是2，2，2?

9．设有n个实数x_1，x_2，…，x_n，其中每一个不是+1就是-1，且

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}=0,$$

求证：n是4的倍数．

自测题四

1．已知a，b，c，d都是正数，并且

$$a+d<a，c+d<b.$$

求证：$ac+bd<ab$．

2．已知甲种商品的原价是乙种商品原价的1.5倍．因市场变化，乙种商品提价的百分数是甲种商品降价的百分数的2倍．调价后，甲乙两种商品单价之和比原单价之和提高了2%，求乙种商品提价的百分数．

3．在锐角三角形ABC中，三个内角都是质数．求三角形的三个内角．

4．某工厂三年计划中，每年产量递增相同，若第三年比原计划多生产1000台，那么每年比上一年增长的百分数就相同，而且第三年的产量恰为原计划三年总产量的一半，求原计划每年各生产多少台?

5．解不等式$\left|\,|x+1|-|x-1|\,\right|<\frac{x}{2}+1$．

6．试求$\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\cdots+\frac{1}{1000^2}$的误差小于0.006的近似值．

7．已知$|x|\leqslant 1$，$|y|\leqslant 1$，且

$$z=|x+y|+|y+1|+|x-2y+4|,$$

求 z 的最大值与最小值．

8．从 1 到 500 的自然数中，有多少个数出现 1 或 5?

9．从 19，20，21，…，98 这 80 个数中，选取两个不同的数，使它们的和为偶数的选法有多少种?

自测题五

1．一项任务，若每天超额 2 件，可提前计划 3 天完工，若每天超额 4 件，可提前 5 天完工，试求工作的件数和原计划完工所用的时间．

2．已知两列数

$$2，5，8，11，14，17，\cdots，2+(200-1)\times 3，$$

$$5，9，13，17，21，25，\cdots，5+(200-1)\times 4，$$

它们都有 200 项，问这两列数中相同的项数有多少项?

3．求 $x^3-3px+2q$ 能被 $x^2+2ax+a^2$ 整除的条件．

4．证明不等式

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\dots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}.$$

5．若两个三角形有一个角对应相等．求证：这两个三角形的面积之比等于夹此角的两边乘积之比．

6．已知$(x-1)^2$除多项式 $x^4+ax^3-3x^2+bx+3$ 所得的余式是 $x+1$，试求 a，b 的值．

7．今有长度分别为 1，2，3，…，9 的线段各一条，可用多少种不同方法，从中选用若干条，使它们能围成一个正方形?

8．平面上有 10 条直线，其中 4 条是互相平行的．问：这 10 条直线最多能把平面分成多少部分?

9．边长为整数，周长为 15 的三角形有多少个?

复习题解答

1．令$x=\underbrace{11\cdots1}_{2000个1}$,

$$原式=(\underbrace{11\cdots1}_{2000个1}\underbrace{00\cdots0}_{2000个0}+\underbrace{55\cdots5}_{2000个5})\div\underbrace{33\cdots3}_{1999个3}5$$

$$=x(10^{2000}+5)\div(3x+2)$$

$$=x(\underbrace{99\cdots9}_{2000个9}+1+5)\div(3x+2)$$

$$=x(9x+6)\div(3x+2)$$

$$=3x$$

$$=\underbrace{33\cdots3}_{2000个3}.$$

2．因为｜a｜=-a，所以 a≤0，又因为｜ab｜=ab，所以 b≤0，因为｜c｜=c，所以 c≥0．所以 a＋b≤0，c-b≥0，a-c≤0．所以

原式=-b＋(a＋b)-(c-b)-(a-c)=b．

3．因为 m＜0，n＞0，所以｜m｜=-m，｜n｜=n．所以｜m｜＜｜n｜可变为 m＋n＞0．当 x+m≥0 时，｜x+m｜=x＋m；当 x-n≤0 时，｜x-n｜=n-x．故当-m≤x≤n 时，

｜x＋m｜＋｜x-n｜=x＋m-x＋n=m＋n．

4．分别令 x=1，x=-1，代入已知等式中，得

$$\begin{cases}(3\times1-1)^7=a_7+a_6+\cdots+a_1+a_0, & ①\\ [3\times(-1)-1]^7=-a_7+a_6-a_5+\cdots-a_1+a_0, & ②\end{cases}$$

$\dfrac{①+②}{2}$得

$$a0+a^2+a^4+a^6=-8128.$$

5．②＋③整理得

$$x=-6y,\quad ④$$

④代入①得 (k-5)y=0．

当 k=5 时，y 有无穷多解，所以原方程组有无穷多组解；当 k≠5 时， y=0，代入②得(1-k)x=1＋k，因为 x=-6y=0，所以 1＋k=0，所以 k=-1．

故 k=5 或 k=-1 时原方程组有解．

6．当$x\leqslant -1$时，有$-2(x+1)-(x-3)=6$，所以$x=-\frac{5}{3}$；当$-1<x\leqslant 3$时，有$2(x+1)-(x-3)=6$，所以$x=1$；当$x>3$时，有

$2(x+1)+(x-3)=6$，所以$x=\frac{7}{3}$．因为$x=\frac{7}{3}$不在$x>3$的范围内,所以应舍去.

故原方程的解为$x_1=-\frac{5}{3}$，$x_2=1$.

7．由$|x-y|=2$得

$$x-y=2，或\ x-y=-2，$$

所以

$$\begin{cases}x-y=2,\\|x|+|y|=4;\end{cases}\text{或}\begin{cases}x-y=-2,\\|x|+|y|=4.\end{cases}$$

由前一个方程组得

$$|2+y|+|y|=4.$$

当$y<-2$时，$-(y+2)-y=4$，所以 $y=-3$，$x=-1$；当$-2\leqslant y<0$时，$(y+1)-y=4$，无解；当$y\geqslant 0$时，$(2+y)+y=4$，所以$y=1$，$x=3$.

同理，可由后一个方程组解得

$$\begin{cases}x=-3,\\y=-1;\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=1,\\y=3.\end{cases}$$

所以解为

$$\begin{cases}x_1=1,\\y_1=3;\end{cases}\begin{cases}x_2=-1,\\y_2=-3;\end{cases}\begin{cases}x_3=3,\\y_4=1;\end{cases}\begin{cases}x_4=-3,\\y_4=-1.\end{cases}$$

8．$\begin{cases}x\leqslant -3,\\|-(x+3)+(x-1)|>2;\end{cases}$ ①

或 $\begin{cases}-3<x\leqslant 1, \\ |(x+3)+(x-1)|>2;\end{cases}$ ②

或 $\begin{cases}x>1, \\ (x+3)-(x-1)|>2.\end{cases}$ ③

解①得 $x\leqslant -3$；解②得

$$-3<x<-2 \text{ 或 } 0<x\leqslant 1;$$

解③得 $x>1$．

所以原不等式解为 $x<-2$ 或 $x>0$．9．令 $a=9999^{1111}$，则

$$A=\frac{a+1}{a^2+1},\quad B=\frac{a^2+1}{a^3+1},$$

于是

$$\begin{aligned}A-B&=\frac{a+1}{a^2+1}-\frac{a^2+1}{a^3+1}\\&=\frac{(a^4+a^3+a+1)-(a^4+2a^2+1)}{(a^2+1)(a^3+1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{a^3-2a^2+a}{(a^2+1)(a^3+1)}\\&=\frac{a(a-1)^2}{(a^2+1)(a^3+1)}\end{aligned}$$

显然有 $a>1$，所以 $A-B>0$，即 $A>B$．

10．由已知可解出 y 和 z

$$\begin{cases}y=\dfrac{5}{3}(1-x), \\ z=2x-1.\end{cases}$$

因为 y，z 为非负实数，所以有

$$\begin{cases}\frac{5}{3}(1-x)\geqslant 0,\\ 2x-1\geqslant 0.\end{cases}$$

所以$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$，所以

$$u=3x-2y+4z$$

$$=3x-2\times\frac{5}{3}(1-x)+4(2x-1)$$

$$=\frac{1}{3}(43x-22).$$

当$x=1$时，$u_{最大值}=7$；当$x=\frac{1}{2}$时，$u_{最小值}=-\frac{1}{6}$.

11.

$$\begin{array}{r|l} & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\ \ x^2-3x+3 \\ x^2+x+1 & x^4-2x^3+x^2+2x-1 \\ & \underline{x^4+x^3+x^2\quad\quad\quad\ } \\ & -3x^3+0+2x \\ & \underline{-3x^3-3x^2-3x} \\ & \quad 3x^2+5x-1 \\ & \quad \underline{3x^2+3x+3} \\ & \quad\quad 2x-4 \end{array}$$

所以商式为 x^2-3x+3，余式为 $2x-4$.

12．小柱的路线是由三条线段组成的折线(如图 1—97 所示).

我们用“对称”的办法将小柱的这条折线的路线转化成两点之间的一段“连线”(它是线段).设甲村关于北山坡(将山坡看成一条直线)的对称点是甲′；乙村关于南山坡的对称点是乙′，连接甲′乙′，设甲′乙′所连得的线段分别与北山坡和南山坡的交点是 A，B，则从甲→A→B→乙的路线的选择是最好的选择(即路线最短).

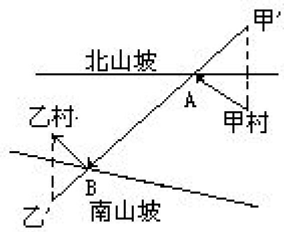


图 1-97

显然，路线甲→A→B→乙的长度恰好等于线段甲′乙′的长度．而从甲村到乙村的其他任何路线，利用上面的对称方法，都可以化成一条连接甲′与乙′之间的折线．它们的长度都大于线段甲′乙′．所以，从甲→A→B→乙的路程最短．

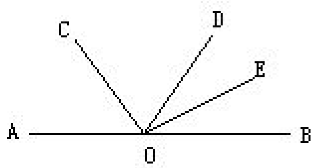


图 1-98

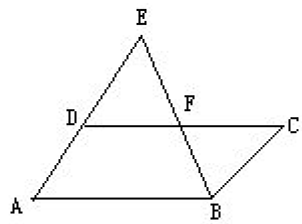


图 1-99

13．如图 1－98 所示．因为 OC，OE 分别是∠AOD，∠DOB 的角平分线，又

$$\angle AOD+\angle DOB=\angle AOB=180^\circ,$$

所以 $\angle COE=90^\circ$．

因为 $\angle COD=55^\circ$，

所以$\angle DOE=90^\circ-55^\circ=35^\circ$．

因此，∠DOE 的补角为

$$180^\circ-35^\circ=145^\circ.$$

14．如图 1－99 所示．因为 BE 平分∠ABC，所以

$$\angle CBF=\angle ABF,$$

又因为 $\angle CBF=\angle CFB$，

所以 $\angle ABF=\angle CFB$．

从而

$AB\parallel CD$(内错角相等，两直线平行)．

由$\angle CBF=55^\circ$及 BE 平分$\angle ABC$，所以

$$\angle ABC=2\times 55^\circ=110^\circ. \quad ①$$

由上证知$AB\parallel CD$，所以

$$\angle EDF=\angle A=70^\circ, \quad ②$$

由①，②知

$BC\parallel AE$(同侧内角互补，两直线平行)．

15．如图 1-100 所示．$EF\perp AB$，$CD\perp AB$，所以

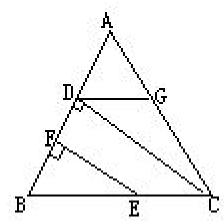


图 1- 100

$$\angle EFB=\angle CDB=90^\circ,$$

所以$EF\parallel CD$(同位角相等，两直线平行)．所以

$\angle BEF=\angle BCD$(两直线平行，同位角相等)．①又由已知 $\angle CDG=\angle BEF$． ②

由①，② $\angle BCD=\angle CDG$．

所以

$BC\parallel DG$(内错角相等，两直线平行)．

所以

$\angle AGD=\angle ACB$(两直线平行，同位角相等)．

16．在△BCD 中，

$\angle DBC+\angle C=90^\circ$(因为$\angle BDC=90^\circ$)，①

又在△ABC 中，$\angle B=\angle C$，所以

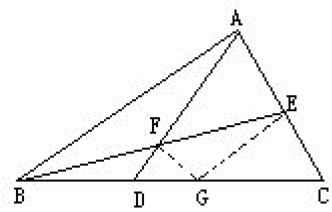


图 1-101

$$\angle A+\angle B+\angle C=\angle A+2\angle C=180^\circ,$$

所以

$$\angle C=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A, \quad ②$$

由①，②

$$\angle DBC+(90^\circ-\frac{1}{2}\angle A)=90^\circ,$$

所以 $\angle DBC=\frac{1}{2}\angle A.$

17．如图 1－101，设 DC 的中点为 G，连接 GE．在△ADC 中，G，E 分别是 CD，CA 的中点．所以，GE∥AD，即在△BEG 中，DF∥GE．从而 F 是 BE 中点．连结 FG．所以

$$S_{\triangle BFD}=\frac{1}{2}S_{\triangle BFG}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}S_{\triangle BEG})=\frac{1}{2}S_{\triangle BEG}.$$

又

$$S_{\triangle EFD}=S_{\triangle BFG}-SEFDG=4S_{\triangle BFD}-SEFDG,$$

所以 $S_{\triangle EFGD}=3S_{\triangle BFD}$.

设 $S_{\triangle BFD}=x$，则 SEFDG=3x．又在△BCE 中，G 是 BC 边上的三等分点，所以

$$S_{\triangle CEG}=S_{\triangle BCE}E,$$

从而

$$S_{\triangle CEG}=\frac{1}{2}S_{\triangle BEG}=\frac{1}{2}(S_{\triangle BFD}+\frac{1}{2}S_{EFDG})$$
$$=\frac{1}{2}(x+3x)=2x,$$

所以

$$S_{EFDC}=3x+2x=5x,$$

所以

$$S_{\triangle BFD}:S_{EFDC}=1:5.$$

18．如图 1－102 所示．

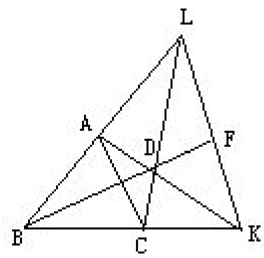


图 1－102

$$\frac{KF}{FL}=\frac{S_{\triangle KFB}}{S_{\triangle FLB}}=\frac{S_{\triangle KFD}}{S_{\triangle FLD}}$$
$$=\frac{S_{\triangle KFB}-S_{\triangle KFD}}{S_{\triangle FLB}-S_{\triangle FLD}}$$

$$=\frac{S_{\triangle KFD}}{S_{\triangle LBD}}=\frac{S_{\triangle KBD}}{S_{\triangle FBL}}\cdot\frac{S_{\triangle KBL}}{S_{\triangle LBD}}$$
$$=\frac{DC}{LC}\cdot\frac{KA}{AD}. \qquad ①$$

由已知 AC∥KL，所以 $S_{\triangle}ACK=S_{\triangle}ACL$，所以

$$\frac{DC}{CL}\cdot\frac{KA}{AD}=\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ACL}}\cdot\frac{S_{\triangle ACK}}{S_{\triangle ADC}}=1. \qquad ②$$

由①，② $$\frac{KF}{FL}=1,$$

即 $$KF=FL.$$

19．设三位数为$\overline{abc}$，改变数码顺序后的三位数为$\overline{a_1b_1c_1}$（可能$a_1=0$）．如果$\overline{abc}+\overline{a_1b_1c_1}=999$，则只能是$c+c_1=9$，同理b

$+b_1=9$，$a+a_1=9$，于是 $a+b+c+a_1+b_1+c_1=9+9+9$，即 $2(a+b+c)=27$，矛盾！

20．答案是否定的．设横行或竖列上包含 k 个黑色方格及 8-k 个白色方格，其中 $0\leqslant k\leqslant 8$．当改变方格的颜色时，得到 8-k 个黑色方格及 k 个白色方格．因此，操作一次后，黑色方格的数目“增加了”$(8-k)-k=8-2k$ 个，即增加了一个偶数．于是无论如何操作，方格纸上黑色方格数目的奇偶性不变．所以，从原有的 32 个黑色方格(偶数个)，经过操作，最后总是偶数个黑色方格，不会得到恰有一个黑色方格的方格纸．

21．大于 3 的质数 p 只能具有 $6k+1$，$6k+5$ 的形式．若 $p=6k+1(k\geqslant 1)$，则 $p+2=3(2k+1)$不是质数，所以，$p=6k+5(k\geqslant 0)$．于是，$p+1=6k+6$，所以，$6\mid(p+1)$．

22．由题设条件知 $n=75k=3\times 5^2\times k$．欲使 n 尽可能地小，可设 $n=2^\alpha 3^\beta 5^\gamma(\beta\geqslant 1,\ \gamma\geqslant 2)$，且有

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=75.$$

于是$\alpha+1$，$\beta+1$，$\gamma+1$ 都是奇数，α，β，γ均为偶数．故取$\gamma=2$．这时

$$(\alpha+1)(\beta+1)=25.$$

所以

$$\begin{cases}\alpha+1=1,\\ \beta+1=25;\end{cases} \text{或}\begin{cases}\alpha+1=5,\\ \beta+1=5.\end{cases}$$

故$(\alpha,\beta)=(0,24)$，或$(\alpha,\beta)=(4,4)$，即 $n=20\cdot 3^{24}\cdot 5^2$

或$n=2^4\cdot 3^4\cdot 5^2$，故n的最小值为$2^4\cdot 3^4\cdot 5^2$，$\frac{n}{75}=432$．

23．设凳子有 x 只，椅子有 y 只，由题意得

$$3x+4y+2(x+y)=43,$$

即 $5x+6y=43$．

所以 $x=5$，$y=3$ 是唯一的非负整数解．从而房间里有 8 个人．

24．原方程可化为

$$7x-8y+2z=5.$$

令 $7x-8y=t$，$t+2z=5$．易见 $x=7t$，$y=6t$ 是 $7x-8y=t$ 的一组整数解．所以它的全部整数解是

$$\begin{cases}x=7t+8t_1,\\y=6t+7t_1.\end{cases}$$

而 t=1，z=2 是 t＋2z=5 的一组整数解．它的全部整数解是

$$\begin{cases}t=1-2t_2,\\z=2+t_2.\end{cases}$$

把 t 的表达式代到 x，y 的表达式中，得到原方程的全部整数解是

$$\begin{cases}x=7-14t_2+8t_1,\\y=6-12t_2+7t_1,\ t_1,\ t_2=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots.\\z=2+t_2\end{cases}$$

25．(1)第一个位置有 8 种选择方法，第二个位置只有 7 种选择方法，…，由乘法原理，男、女各有

$$8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=40320$$

种不同排列．又两列间有一相对位置关系，所以共有 2×40320^2 种不同情况．

(2)逐个考虑结对问题．

与男甲结对有 8 种可能情况，与男乙结对有 7 种不同情况，…，且两列可对换，所以共有

$$2\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=80640$$

种不同情况．

26．万位是 5 的有

$$4\times3\times2\times1=24(个).$$

万位是 4 的有

$$4\times3\times2\times1=24(个).$$

万位是 3，千位只能是 5 或 4，千位是 5 的有 3×2×1=6 个，千位是 4 的有如下 4 个:

34215，34251，34512，34521．

所以，总共有

24+24＋6+4＝58

个数大于 34152．

27．两车错过所走过的距离为两车长之总和，即

92＋84=176(米)．

设甲火车速度为 x 米/秒，乙火车速度为 y 米/秒．两车相向而行时的速度为 x+y；两车同向而行时的速度为 x-y，依题意有

$$\begin{cases}1.5(x+y)=176,\\ 6(x-y)=176,\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}x=73\frac{1}{3}（米/秒），\\ y=44（米/秒）.\end{cases}$$

28．设甲队单独完成全部任务用x天，每天完成全部的$\frac{1}{x}$，乙队单独完成全部任务用（x＋3）天，每天完成全部的$\frac{1}{x+3}$，由题意可得

$$1-4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)=\frac{2}{x}.$$

解之得 x=9(天)，x＋3=12(天)．

29．设原速度为x海里/小时，则减速前所用的时间为$\frac{240-48}{x}$，减速后所用的时间为$\frac{48}{x-10}$，按原速减少4海里/小时航行全程时间为$\frac{240}{x-10}$．依题意有

$$\frac{240-48}{x}+\frac{48}{x\_10}=\frac{240}{x-4}$$

解之得 x=16(海里/小时)．

经检验，x=16 海里/小时为所求之原速．

30．设甲乙两车间去年计划完成税利分别为 x 万元和 y 万元．依题意得

$$\begin{cases}x+y=750,\\(1+15\%)x+(1+10\%)y=845.\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}x=400（万元），\\y=350（万元）.\end{cases}$$

故甲车间超额完成税利

$$15\%\cdot x=\frac{15}{1000}\times 400=60（万元），$$

乙车间超额完成税利

$$10\%\cdot y=\frac{10}{1000}\times 350=35（万元）.$$

所以甲共完成税利 400+60=460(万元)，乙共完成税利 350+35=385(万元)．

31．设甲乙两种商品的原单价分别为 x 元和 y 元，依题意可得

$$\begin{cases}x+y=150, & ①\\x(1-10\%)+y(1+20\%)=150(1-1\%). & ②\end{cases}$$

由②有

$$0.9x+1.2y=148.5,\quad ③$$

由①得 x=150-y，代入③有

$$0.9(150-y)+1.2y=148.5,$$

解之得 y=45(元)，因而，x=105(元)．

32．设去年每把牙刷 x 元，依题意得

$$2\times1.68+2(x+1)(1+30\%)=[2x+3(x+1)]-0.4,$$

即

$$2\times1.68+2\times1.3+2\times1.3x=5x+2.6,$$

即 $2.4x=2\times1.68$，

所以 $x=1.4$(元).

若 y 为去年每支牙膏价格，则 $y=1.4+1=2.4$(元).

33．原来可获利润 $4\times400=1600$ 元．设每件减价 x 元，则每件仍可获利(4-x)元，其中 $0<x<4$．由于减价后，每天可卖出(400+200x)件，若设每天获利 y 元，则

$$\begin{aligned}y&=(4-x)(400+200x)\\&=200(4-x)(2+x)\\&=200(8+2x-x^2)\\&=-200(x^2-2x+1)+200+1600\\&=-200(x-1)^2+1800.\end{aligned}$$

所以当 $x=1$ 时，$y_{最大}=1800$(元)．即每件减价 1 元时，获利最大，为 1800 元，此时比原来多卖出 200 件，因此多获利 200 元．

34．设乙用 x 分钟追上甲，则甲到被追上的地点应走了(25+x)分钟，所以甲乙两人走的路程分别是 0．4(25+x)千米和 0．6x 千米．因为两人走的路程相等，所以

$$0.4(25+x)=0.6x,$$

解之得 $x=50$ 分钟．于是

$$左边=0.4(25+50)=30(千米),$$

$$右边=0.6\times50=30(千米),$$

即乙用 50 分钟走了 30 千米才能追上甲．但 A，B 两镇之间只有 28 千米．因此，到 B 镇为止，乙追不上甲．

35．(1)设新合金中，含第一种合金 x 克(g)，第二种合金 y 克，第三种合金 z 克，则依题意有

$$\begin{cases}x+y+z=1000, & ①\\ y\times90\%+z\times30\%=1000\times45\%. & ②\end{cases}$$

由②得 $z=1500-3y$，代入①有 $y=\dfrac{x+500}{2}$，且 $z=\dfrac{1500-3x}{2}$.

⑵当 x=0 时，y=250，此时，y 为最小；当 z=0 时，y=500 为最大，即 250≤y≤500，所以在新合金中第二种合金重量 y 的范围是：最小 250 克，最大 500 克.

⑶新合金中，含锰重量为：

$$x\cdot 40\%+y\cdot 10\%+z\cdot 50\%=400-0.3x,$$

而 0≤x≤500，所以新合金中锰的重量范围是：最小 250 克，最大 400 克.

自测题解答

自测题一

1．设每人每年收入x元，甲每年开支$\frac{4}{5}$x元，依题意有

$$3\left(\frac{4}{5}x+1200\right)=3x+600,$$

即 $$\left(3-\frac{12}{5}\right)x=3600-600,$$

所以 x=5000(元).

2．$S=(20-5)+(200-5)+\cdots+(2\underbrace{0\cdots0}_{45个0}-5)$

$=20+200+\cdots+2\underbrace{00\cdots0}_{45个0}-5\times45$

$=\underbrace{22\cdots2}_{45个2}0-225$

$=\underbrace{22\cdots2}_{42个2}1995.$

所以 S 的末四位数字的和为 1＋9＋9＋5=24.

3．因为

$$\left|\frac{a-b}{a}\right|=\frac{b-a}{a}=-\frac{a-b}{a}.$$

所以 $$\frac{a-b}{a}\leqslant 0.$$

要使$\frac{a-b}{a}\leqslant 0$成立，须当$a>0$时，$a-b\leqslant 0$，即$a\leqslant b$；当$a<0$时，

时，a-b≥0，即 a≥b．即当 b≥a>0 或 b≤a<0 时，等式成立．4．设上坡路程为 x 千米，下坡路程为 y 千米．依题意则

有

$$\begin{cases} x+y=12, & ① \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{6}=3\frac{1}{3} & ② \end{cases}$$

由②有 $2x+y=20$， ③

由①有 y=12-x．将之代入③得

$$2x+12-x=20.$$

所以 x=8(千米)，于是 y=4(千米)．

5．第 n 项为

$$\frac{2n+1}{n(n\_1)(n+3)}=\frac{1}{n(n+3)}+\frac{1}{(n+1)(n+3)}$$

所以

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\\
&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)
\end{aligned}$$

$$=\frac{37}{36}-\frac{1}{3(n+1)}-\frac{5}{6(n+2)}-\frac{5}{6(n+3)}$$

6．设 $p=30q+r$，$0\leqslant r<30$．因为 p 为质数，故 $r\neq 0$，即 $0<r<30$．假设 r 为合数，由于 $r<30$，所以 r 的最小质约数只可能为 2，3，5．再由 $p=30q+r$ 知，当 r 的最小质约数为 2，3，5 时，p 不是质数，矛盾．所以，r 一定不是合数．

7．设

$$\frac{2p-1}{q}\cdot\frac{2q-1}{p}=m, \qquad ①$$

由①式得 $(2p-1)(2q-1)=mpq$，即

$$(4-m)pq+1=2(p+q).$$

可知 $m<4$．由①，$m>0$，且为整数，所以 $m=1$，2，3．下面分别研究 p，q．

(1)若 $m=1$ 时，有

$$\begin{cases}\dfrac{2p-1}{q}=1,\\[2mm] \dfrac{2q-1}{p}=1,\end{cases}$$

解得 $p=1$，$q=1$，与已知不符，舍去．

(2)若 $m=2$ 时，有

$$\begin{cases}\dfrac{2p-1}{q}=2,\\[2mm] \dfrac{2q-1}{p}=1;\end{cases}\quad \text{或}\begin{cases}\dfrac{2p-1}{q}=1,\\[2mm] \dfrac{2q-1}{p}=2.\end{cases}$$

因为 $2p-1=2q$ 或 $2q-1=2p$ 都是不可能的，故 $m=2$ 时无解．

(3)若 $m=3$ 时，有

$$\begin{cases}\dfrac{2p-1}{q}=3,\\[2mm] \dfrac{2q-1}{p}=1;\end{cases}\quad \text{或}\begin{cases}\dfrac{2p-1}{q}=1,\\[2mm] \dfrac{2q-1}{p}=3.\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} p=5, \\ q=3; \end{cases} \text{或} \begin{cases} p=3, \\ q=5. \end{cases}$$

故 $$p+q=8.$$

8．因为 $x^2+xy+y^2=(x-y)^2+3xy$．由题设，$9\mid(x^2+xy+y^2)$，所以 $3\mid(x^2+xy+y^2)$，从而 $3\mid(x-y)^2$．因为 3 是质数，故 $3\mid(x-y)$．进而 $9\mid(x-y)^2$．由上式又可知，$9\mid 3xy$，故 $3\mid xy$．所以 $3\mid x$ 或 $3\mid y$．若 $3\mid x$，结合 $3(x-y)$，便得 $3\mid y$；若 $3\mid y$，同理可得，$3\mid x$．

9．连结 AN，CN，如图 1－103 所示．因为 N 是 BD 的中点，所以

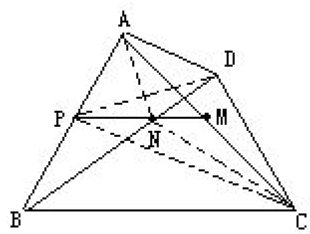


图 1－103

$$S_{\triangle AND}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABD},\quad \frac{1}{2}S_{\triangle CND}=\frac{1}{2}S_{\triangle CDB},$$

上述两式相加

$$S_{\triangle AND}+S_{\triangle CND}=\frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

另一方面，

$$S_{\triangle PCD}=S_{\triangle CND}+S_{\triangle CNP}+S_{\triangle DNP}.$$

因此只需证明

$$S_{\triangle AND}=S_{\triangle CNP}+S_{\triangle DNP}.$$

由于 M，N 分别为 AC，BD 的中点，所以

$$\begin{aligned} S_{\triangle CNP}&=S_{\triangle CPM}-S_{\triangle CMN} \\ &=S_{\triangle APM}-S_{\triangle AMN} \\ &=S_{\triangle ANP}. \end{aligned}$$

又 $S_{\triangle DNP}=S_{\triangle BNP}$，所以

$$S_{\triangle CNP}+S_{\triangle DNP}=S_{\triangle ANP}+S_{\triangle BNP}=S_{\triangle ANB}=S_{\triangle AND}.$$

自测题二

1．原式$=2x(3x^2-x)+3(3x^2-x)-2x+2000$

$=2x\times1+3\times1-2x+2000$

$=2003$.

2．原来每天可获利 4×100 元，若每件提价 x 元，则每件商品获利(4＋x)元，但每天卖出为(100-10x)件．如果设每天获利为 y 元，则

$$\begin{aligned}y&=(4+x)(100-10x)\\&=400+100x-40x-10x^2\\&=-10(x^2-6x+9)+90+400\\&=-10(x-3)^2+490.\end{aligned}$$

所以当 x=3 时，y 最大=490 元，即每件提价 3 元，每天获利最大，为 490 元．

3．因为 CE 平分∠BCD，DE 平分∠ADC 及∠1＋∠2=90°(图 1－104)，所以

$$\angle ADC+\angle BCD=180^\circ,$$

所以　　$AD\parallel BC$．

又因为　　$AB\perp BC$，

由①，②

$$AB\perp AD.$$

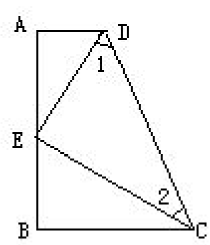


图 1-104

4．依题意有

$$\begin{cases}8a-10b=-16,\\8c-200=-224,\\12a-13b=-16,\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}a=3,\\b=4,\\c=-3,\end{cases}$$

所以 $a^2+b^2+c^2=34$.

5．$|x||y|-2|x|+|y|=4$，即

$$|x|(|y|-2)+(|y|-2)=2,$$

所以

$$(|x|+1)(|y|-2)=2.$$

因为$|x|+1>0$，且 x，y 都是整数，所以

$$\begin{cases}|x|+1=1,\\|y|-2=2;\end{cases}\text{或}\begin{cases}|x|+1=2,\\|y|-2=1.\end{cases}$$

所以有

$$\begin{cases}x_1=0,\\y_1=4;\end{cases}\begin{cases}x_2=0,\\y_2=-4;\end{cases}\begin{cases}x_3=1,\\y_3=3;\end{cases}$$
$$\begin{cases}x_4=1,\\y_4=-3;\end{cases}\begin{cases}x_5=-1,\\y_5=3;\end{cases}\begin{cases}x_6=-1,\\y_6=-3.\end{cases}$$

6．设王平买三年期和五年期国库券分别为 x 元和 y 元，则

$$\begin{cases}x+y=35000,\\x(1+0.0711\times3)(1+0.0522)^2\\+y(1+0.0786\times5)=47761,\end{cases}$$

因为 $y=35000-x$,

所以

$$x(1+0.0711\times 3)(1+0.0522)^2$$

$$+(35000-x)(1+0.0786\times 5)=47761,$$

所以

$$1.3433x+48755-1.393x=47761,$$

所以 $$0.0497x=994,$$

所以 $$x=20000(元),$$

$$y=35000-20000=15000(元).$$

7．因为

$$(k-1)x=m-4, \quad ①$$

当$k\neq 1$时，①有唯一解$x=\frac{m-4}{k-1}$，此时$y=m+\frac{k(m-4)}{k-1}$，所以当$k\neq 1$，

m 为一切实数时，方程组有唯一解．当 k=1，m=4 时，①的解为一切实数，所以方程组有无穷多组解．

当 k=1，m≠4 时，①无解．

所以，k≠1，m 为任何实数，或 k=1，m=4 时，方程组至少有一组解．

8．由题设方程得

$$x=\frac{1}{3}(57-4y-13z)=19-y-4z-\frac{1}{3}(y+z).$$

令$\frac{1}{3}(y+z)=m$，则

$$z=3m-y.$$

$$x=19-y-4(3m-y)-m$$

$$=19+3y-13m.$$

原方程的通解为

$$\begin{cases} x = 19 + 3y - 13m, \\ y = n, \\ z = 3m - y, \end{cases}$$

其中 n，m 取任意整数值．

9．设苹果、梨子、杏子分别买了 x，y，z 个，则

$$\begin{cases} 20x + 8y + 3z = 500, \\ x + y + z = 40. \end{cases}$$

消去 y，得 12x-5z=180．它的解是

$$x=90-5t，z=180-12t.$$

代入原方程，得 y=-230＋17t．故

$$x=90-5t，y=-230+17t，z=180-12t.$$

由$x>0$，$y>0$，$z>0$，可得$13\frac{9}{17}<t<15$，故$t=14$．所以

$$x=20，y=8，z=12.$$

因此，小王的愿望不能实现，因为按他的要求，苹果至少要有 1＋2＋3+4＋5＋6=21＞20 个．

自测题三

1．化简得

$$6(a-1)x=3-6b+4ab,$$

当 a≠1 时，

$$x = \frac{3-6b+4ab}{6(a-1)};$$

当$a=1$，$b=\frac{3}{2}$时，x为任何实数；当$a=1$，$b\neq\frac{3}{2}$时，无解．

2．将原方程变形为

$$\left(\frac{x-a}{bc}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{x-b}{ac}-\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{x-c}{ab}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=0,$$

由此可解得

$$x=a+b+c.$$

3．当 $x=1$ 时，

$$(8-6+4-7)^3(2-1)^2=1.$$

即所求展开式中各项系数之和为 1．

4．设桶的容量为x升，第一次倒出8升加水后，浓度应为$\frac{x-8}{x}$，第二次倒出4升混合溶液中有纯农药$4\left(\frac{x-8}{x}\right)$升；最后桶中有农药$x\cdot 72\%$．

依题意得

$$x-8-4\left(\frac{x-8}{x}\right)=72\%\cdot x,$$

即
$$x-8-\frac{4x-32}{x}=\frac{18}{25}\cdot x,$$

去分母、化简得

$$7x^2-300x+800=0,$$

即
$$(7x-20)(x-40)=0,$$

所以
$$x_1=\frac{20}{7}，x_2=40,$$

因为$x_1=\frac{20}{7}$不能倒出8升，所以不合题意舍去．

5．若 n 为整数，有$[n+x]=n+[x]$，所以

$$[-1.77x]=[-2x+0.23x]$$

$$=-2x+[0.23x].$$

由已知[-1.77x]=-2x，所以

$$-2x=-2x+[0.23x],$$

所以 [0.23x]=0．

又因为 x 为自然数，所以 $0\leqslant 0.23x<1$，经试验，可知 x 可取 1，2，3，4，共 4 个．

6．如图 1－105 所示．在△PBC 中有

$$BC<PB+PC, \quad ①$$

延长 BP 交 AC 于 D．易证

$$PB+PC<AB+AC. \quad ②$$

由①，②

$$BC<PB+PC<AB+AC, \quad ③$$

同理

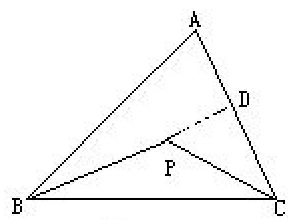


图 1－105

$$AC<PA+PC<AC+BC, \quad ④$$

$$AB<PA+PB<AC+AB. \quad ⑤$$

③＋④＋⑤得

$$AB+BC+CA<2(PA+PB+PC)<2(AB+BC+CA).$$

所以

$$\frac{1}{2}<\frac{PA+PB+PC}{AB+BC+CA}<1$$

7．设甲步行速度为 x 千米/小时，乙步行速度为 y 千米/小时，则所求距离为(9x+16y)千米．依题意得

$$\begin{cases}\dfrac{16y}{x}=\dfrac{9x}{y}, & ①\\ 16y-9x=24, & ②\end{cases}$$

由①得

$$16y^2=9x^2,\quad ③$$

由②得 16y=24＋9x，将之代入③得

$$16\cdot\frac{(24+9)^2}{16^2}=9x^2,$$

即

$$(24+9x)^2=(12x)^2.$$

解之得

$$x=8，x=-\frac{9}{7}（舍去）.$$

于是

$$y=\frac{24+9+8}{16}=6（千米/小时）.$$

所以两站距离为

$$9\times8+16\times6=168(千米).$$

8．答案是否定的．对于 2，2，2，首先变为 2，2，3，其中两个偶数，一个奇数．以后无论改变多少次，总是两个偶数，一个奇数(数值可以改变，但奇偶性不变)，所以，不可能变为 19，1997，1999 这三个奇数．

9．由于n个实数x_1，x_2，…，x_n为＋1或-1，所以$\dfrac{x_1}{x_2}$，$\dfrac{x_2}{x_3}$，…，

。

$\dfrac{x_{n-1}}{x_n}$，$\dfrac{x_n}{x_1}$也均为＋1或-1．设其中有k个-1，则＋1也有k个，于是n＝2k．

又因为

$$(-1)^k=\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdots\cdots\frac{x_{n-1}}{x_n}\cdot\frac{x_n}{x_1}=1,$$

所以，k 是偶数，从而 n 是 4 的倍数．

自测题四

1．由对称性，不妨设 b≤a，则

$$ac+bd\leq ac+ad=a(c+d)<ab.$$

2．设乙种商品原单价为 x 元，则甲种商品的原单价为 1.5x 元．设甲商品降价 y%，则乙商品提价 2y%．依题意有

$$1.5x(1-y\%)+x(1+2y\%)=(1.5x+x)(1+2\%),$$

化简得

$$1.5-1.5y+1+2y=2.5\times 1.02.$$

所以 y=0.1=10%，

所以甲种商品降价 10%，乙种商品提价 20%．

3．因为∠A+∠B+∠C=180°，所以∠A，∠B，∠C 中必有偶数．唯一的偶质数为 2，所以

$$\angle C=2^\circ.$$

所以

$$\angle A+\angle B=178^\circ.$$

由于需∠A，∠B 为奇质数，这样的解不唯一，如

$$\begin{cases}\angle A=89^\circ,\\ \angle B=89^\circ;\end{cases}\begin{cases}\angle A=71^\circ,\\ \angle B=107^\circ;\end{cases}\begin{cases}\angle A=47^\circ,\\ \angle B=131^\circ;\end{cases}\begin{cases}\angle A=41^\circ,\\ \angle B=137^\circ;\end{cases}$$
$$\begin{cases}\angle A=29^\circ,\\ \angle B=149^\circ;\end{cases}\begin{cases}\angle A=17^\circ,\\ \angle B=161^\circ;\end{cases}\begin{cases}\angle A=11^\circ,\\ \angle B=167^\circ.\end{cases}$$

4．设每年增产 d 千台，则这三年的每一年计划的千台数分别为 a-d，a，a＋d．依题意有

$$\begin{cases}a^2=(a-d)(a+d+1),\\(a-d)+a+(a+d)=2(a+d+1).\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}a_1=6,\ a_2=0\text{（舍去）},\\d_1=2;\ d_2=-1\text{（舍去）}.\end{cases}$$

所以三年产量分别是 4 千台、6 千台、8 千台.

5. 应有 $\frac{x}{2}+1>0$，所以$x>-2$. 所以原不等式等价于下面三个

不等式组:

$$\text{（Ⅰ）}\begin{cases}x\geqslant1,\\|(x+1)-(x-1)|<\frac{x}{2}+1;\end{cases}$$

$$\text{（Ⅱ）}\begin{cases}-1\leqslant x<1,\\|(x+1)+(x-1)|<\frac{x}{2}+1;\end{cases}$$

$$\text{（Ⅲ）}\begin{cases}-2<x<-1,\\|-(x+1)+(x-1)|<\frac{x}{2}+1.\end{cases}$$

由（Ⅰ）得 $\begin{cases}x\geqslant1,\\2<\frac{x}{2}+1,\end{cases}$

所以 $x>2$;

由（Ⅱ）得 $\begin{cases}-1\leqslant x<1,\\|2x|<\frac{x}{2}+1,\end{cases}$

所以 $-\frac{2}{5}<x<\frac{2}{3}$；

由（Ⅲ）得 $\begin{cases}-2<x<-1,\\ 2<\frac{x}{2}+1.\end{cases}$

无解．

所以原不等式的解为$x>2$或$-\frac{2}{5}<x<\frac{2}{3}$．

6．设原式为S，则

$$S=\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\cdots+\frac{1}{1000^2},$$

所以

$$\begin{aligned}S&>\frac{1}{10\times 11}+\frac{1}{11\times 12}+\cdots+\frac{1}{1000\times 1001}\\&=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{1000}-\frac{1}{1001}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{10}-\frac{1}{1001}\\&>\frac{1}{10}-\frac{1}{1000}\\&=0.099.\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}S&<\frac{1}{9\times 10}+\frac{1}{10\times 11}+\cdots+\frac{1}{999\times 1000}\\&=\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}\right)\\&=\frac{1}{9}-\frac{1}{1000}\end{aligned}$$

$<0.112-0.001=0.111$．

因为

$$\frac{1}{2}\times(0.111-0.099)=0.006.$$

所以

$$S\approx\frac{1}{2}\times(0.099+0.111)$$

$$=0.105$$

即为所求.

7．由 $|x|\leqslant 1$，$|y|\leqslant 1$ 得

$$-1\leqslant x\leqslant 1,\ -1\leqslant y\leqslant 1.$$

所以

$$y+1\geqslant 0,$$

$$x-2y+4\geqslant -1-2\times 1+4=1>0.$$

所以

$$z=|x+y|+(y+1)+(x-2y+4)$$

$$=|x+y|+x-y+5.$$

(1)当 $x+y+\leqslant 0$ 时，

$$z=-(x+y)+x-y+5=5-2y.$$

由 $-1\leqslant y\leqslant 1$ 可推得 $3\leqslant 5-2y\leqslant 7$，所以这时，z 的最小值为 3、最大值为 7.

(2)当 $x+y>0$ 时，

$$z=(x+y)+(x-y+5)=2x+5.$$

由 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 及可推得 $3\leqslant 2x+5\leqslant 7$，所以这时 z 的最小值为 3、最大值为 7.

由(1)，(2)知，z 的最小值为 3，最大值为 7.

8．百位上数字只是 1 的数有 100，101，…，199 共 100 个数；十位上数字是 1 或 5 的(其百位上不为 1)有

$$2\times3\times10=60(个).$$

个位上出现 1 或 5 的(其百位和十位上都不是 1 或 5)有

$$2\times3\times8=48(个).$$

再加上 500 这个数，所以，满足题意的数共有

$$100+60+48+1=209(个).$$

9．从 19 到 98 共计 80 个不同的整数，其中有 40 个奇数，40 个偶数．第一个数可以任选，有 80 种选法．第一个数如果是偶数，第二个数只能在其他的 39 个偶数中选取，有 39 种选法．同理，第一个数如果是奇数，第二个数也有 39 种选法，但第一个数为 a，第二个为 b 与第一个为 b，第二个为 a 是同一种选法，所以总的选法应该折半，即共有

$$\frac{80\times39}{2}=40\times39=1560$$

种选法．

自测题五

1．设每天计划完成 x 件，计划完工用的时间为 y 天，则总件数为 xy 件．依题意得

$$\begin{cases}(x+2)(y-3)=xy,\\(x+4)(y-5)=xy,\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}2y-3x=6,\\4y-5x=20.\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}x=8,\\y=15.\end{cases}$$

总件数

$$xy=8\times15=120(件),$$

即计划用 15 天完工，工作的件数为 120 件．

2．第一列数中第 n 项表示为 2＋(n-1)×3，第二列数中第 m 项表示为 5＋(m-1)×4．要使

$$2+(n-1)\times 3=5+(m-1)\times 4.$$

所以

$$n=\frac{4m+2}{3}.$$

因为 1≤n≤200，所以

$$1\leqslant \frac{4m+2}{3}\leqslant 200,$$

$$\frac{1}{4}\leqslant m\leqslant 149\frac{1}{2}.$$

因为m为自然数，1≤m≤149，又$n=m+\frac{m-1}{3}$，所以m-1为3的倍数．

所以　m=1，4，7，10，…，148 共 50 项．

3．

$$\begin{array}{r@{}l}
 & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad x-2a \\
x^2+2ax+a^2 \big) & x^3 \quad\quad\quad -3px+2q \\
 & x^3+2ax^2+a^2x \\
\hline
 & -2ax^2-(3p+a^2)x+2q \\
 & -2ax^2-4a^2x-2a^3 \\
\hline
 & 3(a^2-p)x+2(q+a^3)
\end{array}$$

$x^3-3px+2q$ 被 $x^2+2ax+a^2$ 除的余式为

$$3(a^2-p)x+2(q+a^3),$$

所以所求的条件应为

$$\begin{cases}a^2-p=0,\\ q+a^3=0;\end{cases}\quad 即\begin{cases}p=a^2,\\ q=-a^3.\end{cases}$$

4．令

$$x=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{99}{100},$$

因为

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{3},\frac{3}{4}<\frac{4}{5},\cdots,\frac{99}{100}<\frac{100}{101},$$

所以

$$\begin{aligned}x&<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{98}{99}<\frac{100}{101}\\&=\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}\times 101}\\&=\frac{1}{101x},\end{aligned}$$

所以 $$x^2<\frac{1}{101}<\frac{1}{100}.$$

又因为$x>0$．所以$x<\frac{1}{10}$.

5．如图 1-106(a)，(b)所示．△ABC 与△FDE 中，

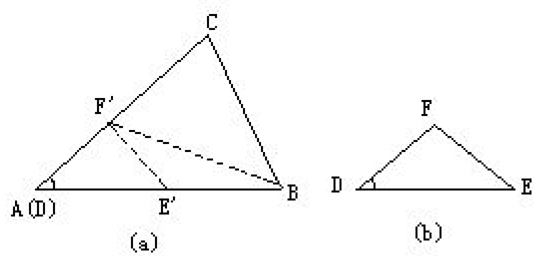


图 1- 106

∠A=∠D．现将△DEF 移至△ABC 中，使∠A 与∠D 重合，DE=AE′，DF=AF′，连结 F′B．此时，△AE′F′ 的面积等于三角形 DEF 的面积．

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABF'}}=\frac{AC}{AF'}, \qquad ①$$

$$\frac{S_{\triangle ABF'}}{S_{\triangle AE'F'}}=\frac{AB}{AE'}. \qquad ②$$

①×②得

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AEF'}}=\frac{AC}{AF'}\times\frac{AB}{AE'},$$

即

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AEF}}=\frac{AB\times AC}{DE\times DF}.$$

6．不妨设商式为 $x^2+\alpha\cdot x+\beta$．由已知有

$x^4+ax^3-3x^2+bx+3$

$=(x-1)^2(x^2+\alpha\cdot x+\beta)+(x+1)$

$=(x^2-2x+1)(x^2+\alpha\cdot x+\beta)+x+1$

$=x^4+(\alpha-2)x^3+(1-2\alpha+\beta)x^2$

$+(1+\alpha-2\beta)x+\beta+1$．

比较等号两端同次项的系数，应该有

$$\begin{cases}\alpha-2=a,\\1-2\alpha+\beta=-3,\\1+\alpha-2\beta=b,\\\beta+1=3.\end{cases}$$

只须解出

$$\begin{cases}a=1,\\b=0.\end{cases}$$

所以 a=1，b=0 即为所求．

7．因为

$$(1+2+3+\cdots+9)\div4=\frac{45}{4}<12,$$

所以正方形的边长≤11．

下面按正方形边的长度分类枚举：

(1)边长为 11：

$$9+2=8+3=7+4=6+5,$$

可得 1 种选法．

(2)边长为 10：

$$9+1=8+2=7+3=6+4,$$

可得 1 种选法．

(3)边长为 9：

$$9=8+1=7+2=6+3=5+4,$$

可得 5 种选法．

(4)边长为 8：

$$8=7+1=6+2=5+3,$$

可得 1 种选法．

(5)边长为 7：

$$7=6+1=5+2=4+3,$$

可得 1 种选法．

(6)边长≤6 时，无法选择．

综上所述，共有

$$1+1+5+1+1=9$$

种选法组成正方形．

8．先看 6 条不平行的直线，它们最多将平面分成

$$2+2+3+4+5+6=22 \text{ 个部分．}$$

现在加入平行线．加入第 1 条平行线，它与前面的 6 条直线最多有 6 个交点，它被分成 7 段，每一段将原来的部分一分为二，故增加了 7 个部分．加入第 2，第 3 和第 4 条平行线也是如此，即每加入一条平行线，最多增加 7 个部分．因此，这些直最多将平面分成

$$22+7\times4=50$$

个部分．

9．不妨设三角形的三边长 a，b，c 满足 $a\geqslant b\geqslant c$．由 $b+c>a$，$a+b+c=15$，$a\geqslant b\geqslant c$ 可得，$15=a+(b+c)>2a$，所以 $a\leqslant 7$．又 $15=a+b+c\leqslant 3a$，故 $a\geqslant 5$．于是 a=5，6，7．当 a=5 时，b+c=10，故 b=c=5；当 a=b 时，b+c=9．于是 b=6，c=3，或 b=5，c=4；当 a=7 时，b+c=8，于是 b=7，c=1，或 b=6，c=2，或 b=5，c=3，或 b=4，c=4．

所以，满足题意的三角形共有 7 个．