2012 年全国高中数学联赛试题

考试时间：2012 年 10 月 14 日上午 8:00-9:20

一． 填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分。把答案填在试卷相应题号的横上。

1. 设P是函数$y=x+\frac{2}{x}(x>0)$的图像上任意一点，过点P分别向直线$y=x$和y轴作垂线，垂足分别为A,B，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的值是____________。

2. 设△ABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且满足$a\cos B-b\cos A=\frac{3}{5}c$，则$\frac{\tan A}{\tan B}$的值是____________。

3. 设$x,y,z\in[0,1]$，则$M=\sqrt{|x-y|}+\sqrt{|y-z|}+\sqrt{|z-x|}$的最大值是____________。

4. 抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点为F，准线为l，A,B是抛物线上的两个动点，且满足$\angle AFB=\frac{\pi}{3}$，设线段AB的中点M在l上的投影为N，则$\frac{|MN|}{|AB|}$的最大值是____________。

5. 设同底的两个正三棱锥$P-ABC$和$Q-ABC$内接于同一个球。若正三棱锥$P-ABC$的侧面与底面所成的角为45°，则正三棱锥$Q-ABC$的侧面与底面所成角的正切值是____________。

6. 设$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，且当$x\geq 0$时，$f(x)=x^2$。若对任意的$x\in[a,a+2]$，不等式$f(x+a)\geq 2f(x)$恒成立，则实数a的取值范围是____________。

7. 满足$\frac{1}{4}<\sin\frac{\pi}{n}<\frac{1}{3}$的所有正整数$n$的和是____________。

8. 某情报站有A,B,C,D四种互不相同的密码，每周使用其中的一种密码，且每周都是从上周未使用的三种密码中等可能地随机选用一种。设第 1 周使用A种密码，那么第 7 周也使用A种密码的概率是____________。（用最简分数表示）。

二． 解答题：本大题共 3 小题，共 56 分。解答应写出文字说明、推理过程或演算步骤。

9. （本小题满分 16 分）

已知函数$f(x)=a\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x+a-\frac{3}{a}+\frac{1}{2}$，$a\in\mathbf{R}$且$a\neq 0$。

（1）若对任意$x\in\mathbf{R}$，都有$f(x)\leq 0$，求a的取值范围；

（2）若$a\geq 2$，且存在$x\in\mathbf{R}$，使得$f(x)\leq 0$，求a的取值范围。

10. （本小题满分 20 分）

已知数列$\{a_n\}$的各项均为非零实数，且对于任意的正整数n，都有

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3$$

（1）当$n=3$时，求所有满足条件的三项组成的数列a_1,a_2,a_3；

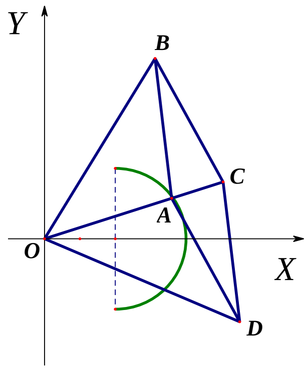
（2）是否存在满足条件的无穷数列$\{a_n\}$，使得$a_{2013}=-2012$？若存在，求出这样的无穷数列的一个通项公式；若不存在，说明理由。

11. （本小题满分 20 分）

如图，在平面直角坐标系XOY中，菱形$ABCD$的边长为 4，且$|OB|=|OD|=6$。

（1）求证：$|OA|\cdot|OC|$为定值；

（2）当点A在半圆$M:(x-2)^2+y^2=4(2\leq x\leq 4)$上运动时，求点$C$的轨迹。

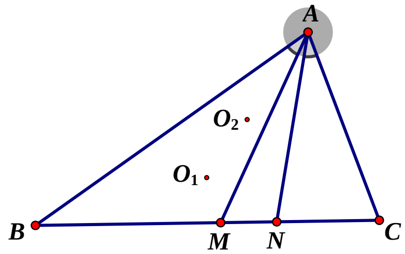


2012年全国高中数学联赛加试试题

考试时间：2012年10月14日上午9:40-12:10

一、（本题满分40分）

如图，在锐角$\triangle ABC$中，$AB > AC, M, N$是BC边上两个不同的点，使得$\angle BAM = \angle CAN$。设$\triangle ABC$和$\triangle AMN$的外心分别为O_1, O_2，求证：O_1, O_2, A三点共线。



二、（本题满分40分）

试证明：集合$A = \{2, 2^2, \cdots, 2^n, \cdots\}$满足

（1）对每个$a \in A$，及$b \in N^*$，若$b < 2a - 1$，则$b(b+1)$一定不是$2a$的倍数；

（2）对每个$a \in \overline{A}$（其中$\overline{A}$表示A在N^*中的补集），且$a \neq 1$，必存在$b \in N^*, b < 2a - 1$，使$b(b+1)$是$2a$的倍数。

三、（本题满分50分）

设$P_0, P_1, P_2, \cdots, P_n$是平面上$n+1$个点，它们两两间的距离的最小值为$d(d > 0)$，求证：

$$|P_0P_1| \cdot |P_0P_2| \cdot \cdots \cdot |P_0P_n| > \left(\frac{d}{3}\right)^n \sqrt{(n+1)!}$$

四、（本题满分50分）

设$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$，$n$是正整数。证明：对满足$0 \leq a < b \leq 1$的任意实数$a, b$，数列$\{S_n - [S_n]\}$中有无穷多项属于$(a, b)$。这里，$[x]$表示不超过实数$x$的最大整数。