2007 年山东省初中数学竞赛

一、选择题(每小题 6 分,共 48 分)

1. 已知函数 $y=x^2+\frac{1}{\sqrt{-x}}$,点 $P(x,y)$ 在该函数的图像上.那么,点 $P(x,y)$ 应在直角坐标平面的(　　).

(A) 第一象限　　(B) 第二象限

(C) 第三象限　　(D) 第四象限

2. 一只盒子中有红球 m 个、白球 10 个、黑球 n 个,每个球除颜色外都相同,从中任取一个球,取得是白球的概率与不是白球的概率相同.那么,m 与 n 的关系是(　　).

(A) $m+n=10$　　(B) $m+n=5$

(C) $m=n=10$　　(D) $m=2$,$n=3$

3. 我省规定:每年 11 月的最后一个星期日举行初中数学竞赛.那么,2008 年举行初中数学竞赛的日期是(　　).

(A) 11 月 26 日　　(B) 11 月 27 日

(C) 11 月 29 日　　(D) 11 月 30 日

4. 在平面直角坐标系中有点 $A(-2,2)$、$B(3,2)$,C 是坐标轴上的一点.若 $\triangle ABC$ 是直角三角形,则满足条件的点 C 有(　　)个.

(A) 1　(B) 2　(C) 4　(D) 6

5. 如图 1,在正 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA 上分别有点 E、F,且满足 $BE=CF=a$,$EC=FA=b\ (a>b)$.当 BF 平分 AE 时,则 $\frac{a}{b}$ 的值为(　　).

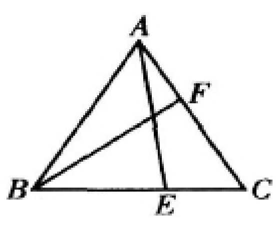

图 1

(A) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　(B) $\frac{\sqrt{5}-2}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　　(D) $\frac{\sqrt{5}+2}{2}$

6. 某单位在一快餐店订了 22 盒盒饭,共花费 140 元,盒饭有甲、乙、丙三种,它们的单价分别为 8 元、5 元、3 元.那么,可能的不同订餐方案有(　　)种.

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

7. 已知 $a>0$,$b>0$ 且 $\sqrt{a}(\sqrt{a}+4\sqrt{b})=3\sqrt{b}(\sqrt{a}+2\sqrt{b})$.则 $\frac{a+6\sqrt{ab}-8b}{2a-3\sqrt{ab}+2b}$ 的值为(　　).

(A) 1　(B) 2　(C) $\frac{19}{11}$　(D) $\sqrt{2}$

8. 如图 2,在梯形 $ABCD$ 中,$\angle D=90°$,M 是 AB 的中点.若 $CM=6.5$,$BC+CD+DA=17$,则梯形 $ABCD$ 的面积为(　　).

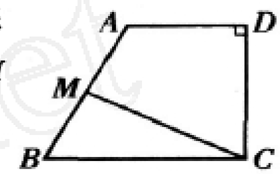

图 2

(A) 20　(B) 30　(C) 40　(D) 50

二、填空题(每小题 8 分,共 32 分)

9. 如图 3,在菱形 $ABCD$ 中,$\angle A=100°$,M、N 分别是边 AB、BC 的中点,$MP\perp CD$ 于点 P.则 $\angle NPC$ 的度数为______.

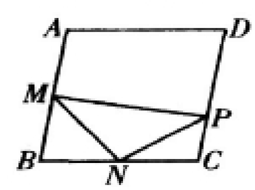

图 3

10. 如图 4,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=45°$,$AD\perp BC$ 于点 D.若 $BD=3$,$CD=2$,则 $S_{\triangle ABC}=$______.

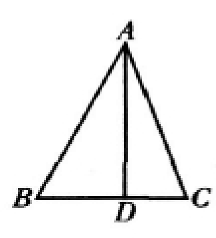

图 4

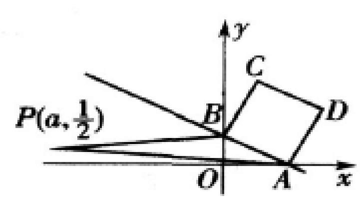

图 5

11. 一次函数 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A、B.以线段 AB 为边在第一象限内作正方形 $ABCD$(如图 5).在第二象限内有一点 $P\left(a,\frac{1}{2}\right)$,满足 $S_{\triangle ABP}=S_{\text{正方形}ABCD}$.则 $a=$______.

12. 若实数 a 满足

$$a^3+a^2-3a+2=\frac{3}{a}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^3},$$

则 $a+\frac{1}{a}=$______.

三、解答题(每小题 20 分,共 60 分)

13. 如图 6,点 A_1、B_1、C_1 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB、BC、CA 上,且 $\frac{AA_1}{AB}=\frac{BB_1}{BC}=\frac{CC_1}{CA}=k\left(k<\frac{1}{2}\right)$. 若 $\triangle ABC$ 的周长为 p,$\triangle A_1B_1C_1$ 的周长为 p_1,求证:

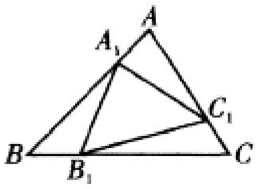

图6

$p_1<(1-k)p$.

14. 某校一间宿舍里有若干名学生,其中一人担任舍长. 元旦时,该宿舍里的每名学生互赠一张贺卡,并且每人又赠给宿舍楼的每位管理员一张贺卡,每位宿舍管理员也回赠舍长一张贺卡,这样共用去了 51 张贺卡. 问这间宿舍里住有多少名学生?

15. 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为正整数,且 $a_1<a_2<\cdots<a_n\leqslant 2\,007$,为保证这些整数中总存在四个互不相同的数 a_i、a_j、a_k、a_l,使得 $a_i+a_j=a_k+a_l=a_n$,那么,n 的最小值是多少?并说明理由.

参考答案

一、**1.** B.

因为 $-x>0$,所以,$x<0$. 又 $y>0$,从而,知点 $P(x,y)$ 应在第二象限.

2. A.

盒子中共有球的个数为 $m+n+10$,取得是白球的概率为 $P=\frac{10}{m+n+10}$;取得不是白球的概率为 $P'=\frac{m+n}{m+n+10}$.

依题意有 $\frac{10}{m+n+10}=\frac{m+n}{m+n+10}$.

故 $m+n=10$.

3. D.

2007 年 11 月 25 日是星期日,2008 年是闰年,从 2007 年 11 月 25 日到 2008 年 11 月 25 日共有 366 天,366 除以 7 余 2,即 2008 年 11 月 25 日是星期二,则 2008 年 11 月 30 日是 11 月的最后一个星期日.

4. D.

(1) 若 $\angle ACB=90^\circ$,此时,

$AC^2+CB^2=AB^2$.

(i) 如图 7,点 $C(a,0)$ 在 x 轴上,有

$(a+2)^2+2^2+(3-a)^2+2^2=5^2$.

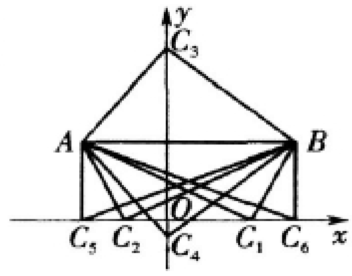

图 7

解得 $a=2$ 或 $a=-1$.

于是,有点 $C_1(2,0)$、$C_2(-1,0)$.

(ii) 点 $C(0,b)$ 在 y 轴上,有

$(b-2)^2+2^2+(b-2)^2+3^2=5^2$.

解得 $b=2\pm\sqrt{6}$.

于是,有点 $C_3(0,2+\sqrt{6})$、$C_4(0,2-\sqrt{6})$.

(2) 若 $\angle BAC=90^\circ$ 或 $\angle ABC=90^\circ$,此时,点 C 必在 x 轴上,且有 $C_5(-2,0)$、$C_6(3,0)$.

总之,满足条件的点 C 共有 6 个.

5. C.

如图 8,过点 E 作 $ED\,/\!/\,BF$ 交 AC 于点 D. 显然,有 $AF=FD=b$.

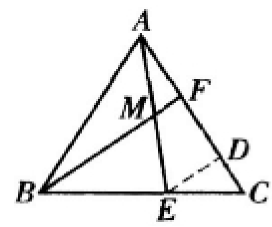

图 8

所以,$DC=a-b$.

注意到 $\frac{DC}{DF}=\frac{EC}{BE}=\frac{b}{a}$,即 $\frac{a-b}{b}=\frac{b}{a}$.

则 $\left(\frac{a}{b}\right)^2-\left(\frac{a}{b}\right)-1=0$.

解得 $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

6. C.

设该单位订甲、乙、丙三种盒饭分别为 x、y、z 盒. 则

$$\begin{cases}x+y+z=22, & ①\\ 8x+5y+3z=140. & ②\end{cases}$$

①×8 − ②得

$3y+5z=36\Rightarrow 5z=36-3y\leqslant 36$.

由此可知 $z\leqslant 7$,且 z 是 3 的倍数,所以,z 的可能值为 0,3,6,相应的 y 值为 12,7,2.

共有 3 组解

$(x, y, z) = (10, 12, 0), (12, 7, 3), (14, 2, 6)$.

7. B.

由 $\sqrt{a}(\sqrt{a}+4\sqrt{b}) = 3\sqrt{b}(\sqrt{a}+2\sqrt{b})$，得 $a+\sqrt{ab}-6b=0$，即

$(\sqrt{a}+3\sqrt{b})(\sqrt{a}-2\sqrt{b})=0$.

因 $\sqrt{a}+3\sqrt{b}\neq 0$，所以，$\sqrt{a}-2\sqrt{b}=0$，即 $a=4b$.

故 $\dfrac{a+6\sqrt{ab}-8b}{2a-3\sqrt{ab}+2b}=\dfrac{4b+12b-8b}{8b-6b+2b}=2$.

8. B.

如图 9，延长 CM 交 DA 的延长线于点 E，则 $\triangle BCM \cong \triangle AEM$. 故 $CE = 2CM = 13$，且 $AE = BC$. 设梯形 $ABCD$ 的面积为 S. 则

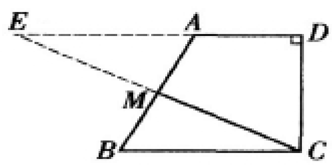

图 9

$$\begin{cases} DE^2 + CD^2 = CE^2, \\ \frac{1}{2}DE\cdot CD = S. \end{cases}$$

由 $CE = 13$，得

$$\begin{cases} DE^2 + CD^2 = 169, & ① \\ 2DE\cdot CD = 4S. & ② \end{cases}$$

①+②得 $(DE+CD)^2 = 169+4S$.

又 $(DE+CD)^2 = (AD+BC+CD)^2$

$= 17^2 = 289$，

所以，$169+4S=289$.

从而，$S=30$.

二、**9.** $50°$.

因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以，

$AB = BC$，$\angle B = 180° - \angle A = 80°$.

又 M、N 分别是边 AB、BC 的中点，则

$BM = BN$，

$\angle BMN = \angle BNM = \frac{1}{2}(180° - 80°) = 50°$.

设 MP 的中点为 E，如图 10，联结 NE. 则 $NE \parallel BM \parallel CP$.

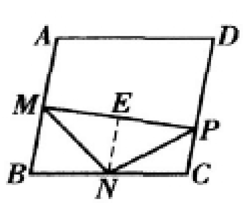

图 10

因为 $MP \perp CD$，则 $NE \perp MP$，有 $NM = NP$.

所以，$\angle NMP$

$= \angle NPM$.

故 $\angle NPC$

$= \angle NMB = 50°$.

10. 15.

解法 **1**：设 $AB = c$，$AC = b$. 则

$AD^2 = c^2 - 9 = b^2 - 4$，$b = \sqrt{c^2-5}$，

$AD = \sqrt{c^2-9}$.

如图 11，过点 C 作 $CE \perp AB$ 于点 E，$\triangle AEC$ 是等腰直角三角形. 于是，

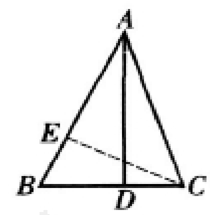

图 11

$EC = \frac{\sqrt{2}}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{2}b$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{c^2-5}$，

$2S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{c^2-5} = 5\sqrt{c^2-9}$.

整理得 $(c^2-10)(c^2-45)=0$.

解得 $c_1 = \sqrt{10} < 5$（舍去），$c_2 = 3\sqrt{5}$.

故 $AD = \sqrt{36} = 6$.

所以，$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\times 5\times 6 = 15$.

解法 **2**：如图 11，作 $CE \perp AB$ 于点 E. 设 $AD = h$. 则

$AB = \sqrt{h^2+9}$，$AC = \sqrt{h^2+4}$，

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AD\cdot BC = \frac{1}{2}CE\cdot AB$，

$CE = \frac{\sqrt{2}}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{h^2+4}$.

故 $\frac{1}{2}\times 5h = \frac{1}{2}\sqrt{h^2+9}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{h^2+4}$.

整理得 $h^4 - 37h^2 + 36 = 0$.

解得 $h^2 = 1$ 或 $h^2 = 36$.

因为 $h > 0$，所以，$h = 1$ 或 $h = 6$.

当 $h = 1$ 时，$\angle BAD > \angle ABC$，$\angle CAD > \angle ACB$，所以，$\angle BAC > \angle ABC + \angle ACB$.

从而，$\angle BAC > \frac{1}{2}\times 180° = 90°$，与 $\angle BAC = 45°$ 矛盾.

故 $AD = 6$.

所以，$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\times 5\times 6 = 15$.

11. $\frac{\sqrt{3}}{2}-8$.

分别令 $x=0$, $y=0$, 得 $A(\sqrt{3},0)$、$B(0,1)$. 则 $OA=\sqrt{3}$, $OB=1$, $AB=2$, $S_{正方形ABCD}=4$.

所以, $S_{\triangle ABP}=4$.

如图 12, 联结 PO. 则

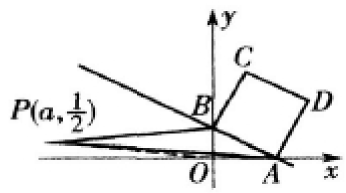

图 12

$S_{\triangle AOP}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$;

$S_{\triangle BOP}=\frac{1}{2}\times(-a)\times 1=-\frac{a}{2}$;

$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle BOP}+S_{\triangle AOB}-S_{\triangle AOP}$.

故 $4=-\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

解得 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}-8$.

12. 2 或 -3.

设 $a+\frac{1}{a}=b$. 则 $a^2+\frac{1}{a^2}=b^2-2$.

又 $a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)-\left(a+\frac{1}{a}\right)$

$=b(b^2-2)-b=b^3-3b$.

根据题意有

$\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)+\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)-3\left(a+\frac{1}{a}\right)+2=0$

$\Rightarrow b^3-3b+b^2-2-3b+2=0$

$\Rightarrow b^3+b^2-6b=0$

$\Rightarrow b=2$ 或 $b=-3$ ($b=0$ 舍去).

因此, $a+\frac{1}{a}=2$ 或 -3.

三、**13.** 如图 13, 过点 A_1 作 $A_1D\parallel BC$, 交 AC 于点 D.

则 $A_1D+DC_1>A_1C_1$.

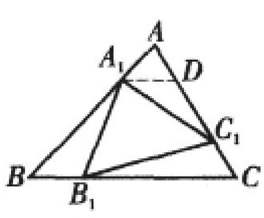

图 13

又 $\frac{A_1D}{BC}=\frac{AD}{AC}=\frac{AA_1}{AB}=k$,

因为 $k<\frac{1}{2}$, 所以,

$DC_1=AC-(AD+CC_1)$

$=AC-2kAC=(1-2k)AC$.

故 $kBC+(1-2k)AC>A_1C_1$.

同理, $kAC+(1-2k)AB>A_1B_1$,

$kAB+(1-2k)BC>B_1C_1$.

从而, $p_1<kp+(1-2k)p=(1-k)p$.

14. 设这间宿舍里有 x 名学生, 宿舍楼有 y 名管理员 (x、$y\in\mathbf{N}_+$). 根据题意有

$x(x-1)+xy+y=51$.

化简得 $x^2+(y-1)x+y-51=0$.

故 $\Delta=(y-1)^2-4(y-51)$

$=y^2-6y+205=(y-3)^2+196$.

因为 $x\in\mathbf{N}_+$, 所以, Δ 必为完全平方数.

设 $(y-3)^2+196=k^2$ ($k\in\mathbf{N}$). 则

$(y-3+k)(y-3-k)=-196$,

其中, $y-3+k$ 和 $y-3-k$ 具有相同的奇偶性, 且 $y-3+k\geqslant y-3-k$.

所以, $\begin{cases}y-3+k=2,\\ y-3-k=-98\end{cases}$ ①

或 $\begin{cases}y-3+k=98,\\ y-3-k=-2\end{cases}$ ②

或 $\begin{cases}y-3+k=14,\\ y-3-k=-14.\end{cases}$ ③

由方程组①得 $y=-45$, 不合题意, 舍去;

由方程组②得 $y=51$, 此时, 原方程为 $x^2+50x=0$, 解得 $x_1=-50$, $x_2=0$ 均不合题意, 舍去;

由方程组③得 $y=3$, 此时, 原方程为 $x^2+2x-48=0$, 解得 $x_1=-8$ (不合题意, 舍去), $x_2=6$.

答: 这间宿舍里住有 6 名学生.

15. 取 $a_1=1$, $a_2=3$, $\cdots$, $a_{1003}=2\ 005$, $a_{1004}=2\ 007$, 共 1 004 个奇数. 显然, 其中任何两数之和不等于 2 007.

第三届北方数学奥林匹克邀请赛

第 一 天

一、(25 分) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, BD、CE 分别是边 AC、AB 上的高. 以 AB 为直径作圆交 CE 于点 M, 在 BD 上取点 N, 使 $AN = AM$. 证明: $AN \perp CN$. (毕耜琨　供题)

二、(25 分) 设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a、b、c, 且 $a + b + c = 3$. 求

$$f(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{4}{3}abc$$

的最小值. (贾应红　供题)

三、(25 分) 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_0 = 2\,007$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n + 1}$ ($n \in \mathbf{N}$). 求证: 当 $0 \leqslant n \leqslant 1\,004$ 时, 有 $[a_n] = 2\,007 - n$ (其中, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数). (哈师大附中　供题)

四、(25 分) 平面上每个点被染为 n 种颜色之一, 同时满足:

(1) 每种颜色的点都有无穷多个, 且不全在同一条直线上;

(2) 至少有一条直线上所有的点恰为两种颜色.

求 n 的最小值, 使得存在互不同色的 4 个点共圆. (张利民　供题)

第 二 天

五、(25 分) 设 α、$\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$. 求

$$A = \frac{\left(1 - \sqrt{\tan\frac{\alpha}{2} \tan\frac{\beta}{2}}\right)^2}{\cot\alpha + \cot\beta}$$

的最大值. (西北工业大学附中　供题)

六、(25 分) 已知

$$f(x) = \lg(x + 1) - \frac{1}{2}\log_3 x.$$

(1) 解方程: $f(x) = 0$;

(2) 求集合

$$M = \{n \mid f(n^2 - 214n - 1\,998) \geqslant 0, n \in \mathbf{Z}\}$$

的子集个数. (李铁汉　供题)

七、(25 分) 设 n 是正整数, $a = [\sqrt{n}]$ (其中, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数). 求同时

若在上述 1 004 个数中再加入数 2 006, 即 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $\cdots$, $a_{1\,003} = 2\,005$, $a_{1\,004} = 2\,006$, $a_{1\,005} = 2\,007$, 此时, 只存在唯一的一对数 $a_1 = 1$, $a_{1\,004} = 2\,006$, 其和为

$$a_{1\,005} = 2\,007.$$

所以, n 的最小值不小于 1 006.

接下来证明: 当 $n \geqslant 1\,006$ 时, 一定存在满足条件的四个数.

当 $a_n = 2\,007$ 时, 因为

$$2\,007 = 1 + 2\,006 = 2 + 2\,005 = \cdots = 1\,003 + 1\,004,$$

这表明 2 007 只能分解为 1 003 个不同的两个正整数的和式, 所以, 当 $n \geqslant 1\,006$, 即 $n - 1 \geqslant 1\,005$ 时, 在除了 $a_n = 2\,007$ 之外的不少于 1 005 个数 a_1, a_2, $\cdots$, a_{n-1} 中, 至少包含了 2 007 的上述 1 003 个不同分解和式中的两个和式 $a_i + a_j$、$a_k + a_l$ 的全部四个加数 a_i、a_j、a_k、a_l, 此即题设要求的四个正整数.

当 $a_n < 2\,007$ 时, 若 $a_n = 2m - 1$, 则 a_n 可表为 m 个两个不同正整数之和的不同和式; 若 $a_n = 2m$, 则 a_n 可表为 $m - 1$ 个两个不同正整数之和的不同和式. $a_n < 2\,007$, 所以, $m \leqslant 1\,003$. 除去 a_n 之外, 在 a_1, a_2, $\cdots$, a_{n-1} 这不少于 1 005 个数中至少包含了这不超过 1 003 个不同和式中的两个的全部四个加数, 此即题设要求的四个数.

综上所述, n 的最小值为 1 006.

(李耀文　提供)