



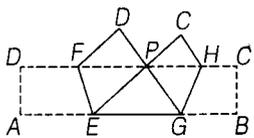
2008 年北京市中学生数学竞赛 初二年级试题解答

一、选择题(满分 25 分,每小题只有一个正确答案,答对得 5 分)

1. 自然数 a, b, c, d 满足 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = 1$, 则 $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}$ 等于().

- (A) $\frac{1}{8}$
- (B) $\frac{3}{16}$
- (C) $\frac{7}{32}$
- (D) $\frac{15}{64}$

2. 如右图所示, $ABCD$ 是一张长方形纸片, 将 AD, BC 折起, 使 A, B 两点重合于 CD 边上的点 P , 然后压平得折痕 EF 与 GH . 若 $PE = 8\text{cm}$, $PG = 6\text{cm}$, $EG = 10\text{cm}$. 则长方形纸片 $ABCD$ 的面积为().



- (A) $105.6(\text{cm})^2$
- (B) $110.4(\text{cm})^2$
- (C) $115.2(\text{cm})^2$
- (D) $124.8(\text{cm})^2$

3. 化简 $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ 的结果是().

- (A) 1
- (B) $\sqrt{3}$
- (C) 2
- (D) 4

4. $\triangle ABC$ 所在平面上的点 P , 使得 $\triangle ABP, \triangle BCP$ 和 $\triangle ACP$ 的面积相等, 这样的点 P 的个数是().

- (A) 8
- (B) 4
- (C) 3
- (D) 1

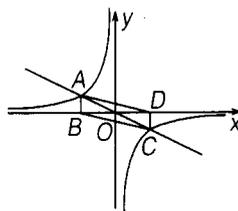
5. 在直角坐标系中, 设点 $A(-1, -2), B(4, -1), C(m, 0), D(n, n)$ 为四边形的四个顶点, 当四边形 $ABCD$ 的周长最短时, $\frac{m}{n}$ 的值为().

- (A) -2
- (B) -1
- (C) $-\frac{1}{2}$
- (D) 1

题号	1	2	3	4	5
答案	D	C	C	B	A

二、填空题(满分 35 分, 每小题 7 分, 将答案写在下面相应的空格中)

1. 如右图所示, 过原点的直线与反比例函数 $y = -\frac{7}{x}$ 的图像交于



点 A 和 C , 自点 A 和点 C 作 x 轴的垂线, 垂足分别为 B 和 D , 则四边形 $ABCD$ 的面积等于_____.

2. 方程组

$$\begin{cases} 2x + y = z - 1 \\ 8x^3 + y^3 = z^2 - 1 \end{cases}$$

的正整数解 (x, y, z) 为_____.

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle CAB = 70^\circ$, $\angle CAB$ 的平分线与 $\angle ACB$ 的平分线相交于 I , 若 $AC + AI = BC$, 则 $\angle ACB$ 等于_____度.

4. 已知 $A = \frac{1^2 + 2^2}{1 \times 2} + \frac{2^2 + 3^2}{2 \times 3} + \frac{3^2 + 4^2}{3 \times 4} + \dots + \frac{1003^2 + 1004^2}{1003 \times 1004} + \frac{1004^2 + 1005^2}{1004 \times 1005}$, 则 A 的整数部分是_____.

5. 凸五边形 $ABCDE$ 中, $\angle BAE + \angle AED = 270^\circ$, $\angle BCD = 90^\circ$, $AB = 3, BC = 12, CD = 5, DE = 4, AE = 8$. 则五边形 $ABCDE$ 的面积等于_____.

题号	1	2	3	4	5
答案	14	(1, 3, 6)	75°	2008	55.2

三、(满分 10 分)

已知 $\frac{x}{y+z+u} = \frac{y}{z+u+x} = \frac{z}{u+x+y} =$

$\frac{u}{x+y+z}$, 求 $\frac{x+y}{z+u} + \frac{y+z}{u+x} + \frac{z+u}{x+y} + \frac{u+x}{y+z}$ 的值.

解 由 $\frac{x}{y+z+u} = \frac{y}{z+u+x} = \frac{z}{u+x+y} =$

$$\frac{u}{x+y+z},$$

$$\text{则 } \frac{x+y+z+u}{y+z+u} = \frac{x+y+z+u}{z+u+x} =$$

$$\frac{x+y+z+u}{u+x+y} = \frac{x+y+z+u}{x+y+z}.$$

①如果分子 $x+y+z+u \neq 0$, 则由分母推得 $x=y=z=u$.

$$\text{此时 } \frac{x+y}{z+u} + \frac{y+z}{u+x} + \frac{z+u}{x+y} + \frac{u+x}{y+z} = 1 +$$

$$1+1+1=4.$$

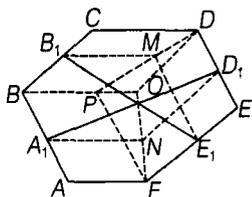
②如果分子 $x+y+z+u=0$,

$$\text{则 } x+y=-(z+u), y+z=-(u+x),$$

$$\text{此时 } \frac{x+y}{z+u} + \frac{y+z}{u+x} + \frac{z+u}{x+y} + \frac{u+x}{y+z} = (-$$

$$1)+(-1)+(-1)+(-1)=-4.$$

四、(满分 15 分)如图,在六边形 $ABCDEF$ 中, $AB \parallel DE, BC \parallel EF, CD \parallel FA, AB+DE=BC+EF, A_1D_1=B_1E_1, A_1, B_1, D_1, E_1$ 分别是 AB, BC, DE, EF 的中点. 求证: $\angle CDE = \angle AFE$.



证明 作 $\square ABPF$, 连接 DP , 取 PD 的中点 M , $BCDP$ 是梯形. 连接 B_1M, E_1M , 由梯形中位线定理, 知 $B_1M \parallel CD \parallel BP \parallel AF, ME_1 \parallel DE \parallel FP \parallel AB$, 且 $B_1M = \frac{BP+CD}{2} = \frac{AF+CD}{2}, E_1M = \frac{PF+DE}{2} = \frac{AB+DE}{2}$.

同理, 作 $\square BCDO$, 连接 OF , 取 FO 的中点 N , 连接 A_1N, D_1N , 则由梯形中位线定理, 知 $A_1N \parallel AF \parallel BO \parallel CD, ND_1 \parallel EF \parallel OD \parallel BC$, 且

$$A_1N = \frac{AF+BO}{2} = \frac{AF+CD}{2},$$

$$D_1N = \frac{EF+OD}{2} = \frac{EF+BC}{2} = \frac{AB+DE}{2}.$$

在 $\triangle B_1ME_1$ 与 $\triangle A_1ND_1$ 中, $B_1M =$

$$A_1N, E_1M = D_1N,$$

又因为 $A_1D_1 = B_1E_1$,

所以 $\triangle B_1ME_1 \cong \triangle A_1ND_1$.

因此 $\angle B_1ME_1 = \angle A_1ND_1$,

所以 $\angle CDE = \angle AFE$.

五、(满分 15 分)求证:

(1) 一个自然数的平方被 7 除的余数只能是 0, 1, 4, 2.

(2) 对任意的正整数 n , $[\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}]$ 不被 7 整除. 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

证明 (1) 设自然数 $m = 7q + r$ ($r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$), 则

$$m^2 = (7q+r)^2 = 49q^2 + 14qr + r^2.$$

由于 r^2 只能取 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 被 7 除的余数对应为 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1. 因此, 一个自然数的平方被 7 除的余数只能是 0, 1, 4, 2.

(2) 由于 $n(n+2)(n+4)(n+6) = (n^2+6n)(n^2+6n+8)$, ($n=1, 2, 3, \dots$),

$$\text{令 } k = n^2 + 6n, \text{ 则}$$

$$n(n+2)(n+4)(n+6) = (n^2+6n)(n^2+6n+8) = k(k+8), \text{ 其中 } k \geq 7.$$

$$\text{则 } \sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)} = \sqrt{k(k+8)} = \sqrt{k^2+8k}, \text{ 其中 } k \geq 7.$$

$$\text{由于 } k^2+6k+9 < k^2+8k < k^2+8k+16,$$

$$\text{所以 } (k+3)^2 < k^2+8k < (k+4)^2.$$

$$\text{因此 } k+3 < \sqrt{k^2+8k} < k+4.$$

$$\text{即 } [\sqrt{k^2+8k}] = k+3.$$

$$\text{也就是 } [\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}] = k+3 = n^2+6n+3 = (n+3)^2-6.$$

如果 $[\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}]$ 被 7 整除, 必须只需 $(n+3)^2$ 被 7 除余 6, 然而一个自然数的平方被 7 除的余数只能为 0, 1, 4 和 2 中的一个, 因此对任意的正整数 n , $(n+3)^2-6$ 不能被 7 整除, 也就是 $[\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}]$ 不能被 7 整除.

中学生数学